二维Poisson方程Dirichlet问题解的正则性的一个注记

黄 世 强

（数力系）

摘 要

本文利用保形变换给出Poisson方程Dirichlet问题的一个正则性结果。

关键词 正则性

一、引 言

文〔1〕利用反演变换及kelvin变换得到n维球上Poisson方程Dirchlet问题解的正则性。本文不用反演变换及kelvin变换，直接利用坐标变换证明了文〔1〕中定理4.13，并将定理中的假设条件$u\in C^2(\overline{B})\cap C^0(\overline{B})$以及$u|_{\partial B}=0$减弱为只须

$$u\in C^2(B)\cap C^0(\overline{B})\text{ 以及 }u|_{\partial B}=0$$

二、问题与记号

设$X=(x_1,x_2)\in R^2$，$|x|=(x_1^2+x_2^2)^{\frac{1}{2}}$，半空间$R_1^2=\{x|x_2>0\}$，$T=\{x|x_2=0\}$，$B_2=B_{2R}(x_0)$与$B_1=B_R(x_0)$是中心在$x_0\in R^2_+$，半经分别为$2R$与$R$的园。$B_2^+=B_2\cap R_+^2$，$B_1^+=B_1\cap R_+^2$，对区域$\Omega\subset R^2$，$C^\alpha(\Omega)$表示在$\Omega$中具有指数$\alpha$（$0<\alpha<1$）的HOlder连续性的函数空间，$C^{k,\alpha}(\Omega)$表示在$\Omega$上有直到k阶偏导数且K阶偏导数在$\Omega$中具有指数$\alpha$的HOlder连续性的函数所组成的函数空间。

定理，设B是R^2中的一个园，$\overline{B}$上的函数u满足$u\in C^2(B)\cap C^0(\overline{B})$以及$u|_{\partial B}=0$在B中$\Delta u=f$，$f\in C^\alpha(\overline{B})$则

$$u\in C^{2,\alpha}(\overline{B})$$

三、定理的证明

引理1 [1] 设$u\in C^2(B_2^+)\cap C^0(\overline{B}_2^+)$，$f\in C^\alpha(\overline{B}_2^+)$，在$B_2^+$中满足

本文1987年3月13日收到

$\Delta u=f$，在T上$u=0$，则有

$$u\in C^{2,\alpha}(\overline{B}_1^+)$$

且有估计

$$\left|u\right|'_{2,\alpha;B_1^+}\leqslant C\left(\left|u\right|_{0,B_{\frac{+}{2}}}+R^2\left|f\right|'_{0,\alpha,B_2}\right)$$

其中$C=C(n,\alpha)$ $|f|'(\cdots)$的符号意义按〔1〕中p54的规定。

引理2　设二元函数$u(x_1,x_2)\in C^2(\Omega)$满足Poisson方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}=f(x_1,x_2) \qquad (1)$$

而$g(z)=y_1(x_1,x_2)+iy_2(x_1,x_2)$是一个保角映射，它把$u(x_1,x_2)$变换成$y_1y_2$的函数

$$u=u(x_1(y_1,y_2),x_2(y_1,y_2))\overset{\triangle}{=}w(y_1,y_2),$$

则

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y_1^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y_2^2}=f^*(y_1,y_2) \qquad (2)$$

其中

$$f^*(y_1,y_2)=\frac{1}{|g'(z)|^2}\,f(x_1(y_1,{}_2y),x_2(y_1,y_2))$$

证明　因为$g(z)$是保角变换，所以$y_1(x_1,x_2)$与$y_2(x_1,x_2)$均为调和函数，并且满足柯西——黎曼方程。经计算后，得

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y_1^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y_2^2}=\frac{1}{|g'(z)|^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)$$

其中$|g'(z)|$为$g'(z)$的模。再利用（1）式即得

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y_1^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y_2^2}=\frac{1}{|g'(z)|^2}f(x_1,x_2)$$

$$=f^*(y_1,y_2) \qquad (3)$$

引理3[2]保形变换$g(z)=i\frac{1-z}{1+z}$映单位园$|z|<1$为半空间$B^*=\{(y_1,y_2)y_2>0\}$

其中$Z=x_1+ix_2$，$g(z)=y_1(x_1,x_2)+iy_2(x_1,x_2)$

定理的证明　由于平移和伸缩变换不改变Poisson方程的形式，不妨设定理中的园域B为单位园。依引理3，分式线性变换$g(z)=i\frac{1-z}{1+z}$映B为上半空间B^*。再依引理2，该变换把B上的Poisson方程（1）变成B^*上的Poisson方程（3）该变换的实形式为

$$x_1=\frac{1-y_1^2-y_2^2}{y_1^2+(1+y_2)^2}\qquad x_2=\frac{2y_1}{y_1^2+(1+y_2)^2}\tag{4}$$

而且

$$f^*=\frac{4}{[y^2+(1+y_2)^2]^2}\,f\left(\frac{1-y_1^2-y_2^2}{y^2+(1+y_2^2)^2},\ \frac{2y_1}{y_1^2+(1+y_2)^2}\right)$$

这时

$$W\in C^2(B^*)\cap C^0(\overline{B^*}),\qquad f\in C^\alpha(\overline{B^*})$$

$$\text{在}B^*\text{内}\ \Delta W=f^*,\ \text{在}\partial\overline{B^*}\text{上}W=0$$

对这样的W和f*，使用引理1，得

$$W\in C^{2,\alpha}(\overline{B^*})$$

注意到变换（4）的可逆性，就有 $u\in C^{2,\alpha}(\overline{B})$　　*

参　考　文　献

〔1〕D·吉尔巴格N、S塔Ｉ格著　叶其孝等译　1986　二阶椭园型编微分方程

〔2〕钟玉泉著　复变函数论　1980 5

A REMASK ABOUT REGULARITY OF DIRICHLET PROBLEM FOR THE POISSON EQUATION IN TWO DIMENSIOUEL

Huang　Shiqiang

(Zhengzhou Insjitute of Technolege)

Abstract

This Paper Proof the theorem about reqularity of Dirichlet Problem for the Poisson equation in two——dimensional.

key words: Regularity