

# 关于Fuzzy拓扑空间中的分离性

赵 万 忠

(数学力学系)

## 摘 要

本文在Fuzzy拓扑空间中定义文[1]、[2]不同的 $T_{i0}$  ( $i=0, 1, 2, 3, 4$ )分离性概念, 并证明蕴含序列 $T_4 \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T$ , 从而刻画了FUZZY拓扑空间的分离性。

**关键词:**  $T_i$  ( $i=0, 1, 2, 3, 4$ )分离性。

文中使用符号说明

$fts.$  Fuzzy拓扑空间

$F$  不分明

$x_\lambda \prec A$   $0 < \lambda \leq A(x)$  且仅当 $\lambda = 1$ 时取等号

$A'$   $A$ 的补集

## 一、予 备 知 识

作为预备我们把本文要用的有关概念及结果写在这里。

设 $(X, J)$ 为Fuzzy拓扑空间、

**定义 1·1**  $F$ 集 $A$ 叫 $F$ 点 $x_\lambda$ 的邻域, 如果存在 $0 \in J$ 使 $x_\lambda \prec 0 \subset A$ 、

**定义 1·2** 所有包含 $F$ 集 $A$ 的 $F$ 闭集之交叫 $F$ 集 $A$ 的闭包, 记作 $\overline{A}$ 。即

$$\overline{A} = \bigcap \{F: F \in J' \text{ 且 } F \supset A\} \quad J' \text{ 表全体闭集}$$

**定理 1·1**  $x_\lambda \in \overline{A}$ 的充要条件是对 $x_{1-\lambda}$ 的任何开邻域 $0$ 有 $0 \not\subset A'$ 。

**定义 1·3**  $F$ 点 $x_\lambda$ 叫 $F$ 集 $A$ 的聚点, 如果对 $x_{1-\lambda}$ 的任何开邻域 $0$ 有 $y \in X$ 使 $0(y) + A(y) > 1$ 且当 $x_\lambda \in A$ 时 $y \neq x$ 。

**定义 1·4** 称 $F$ 集 $A^d = \bigcup \{x_\lambda : x_\lambda \text{ 是 } A \text{ 之聚点}\}$ 为 $F$ 集 $A$ 的导集。

**定理 1·2**  $\overline{A} = A \cup A^d$

**定理 1·3**  $F$ 集 $A$ 是闭集  $\Leftrightarrow \overline{A} = A \Leftrightarrow A^d \subset A$ 。

**定义 1·5**  $x_\lambda \in A$  叫A的内点, 如果A是  $x_\lambda$  的邻域. 称F集  $A^\circ \equiv \bigcup \{x_\lambda : x_\lambda \text{ 是A之内点}\}$  为A的内P

**定理 1·4**  $A^\circ$  是含于A的最大开集.

**定义 1·6**  $x_\lambda$  的一个域族B叫做它的邻域基, 如果对  $x_\lambda$  的每一邻域U, 存在  $B \in B$  使  $B \subset U$ .

## 二、 $T_0$ 与 $T_1$ 空间

**定义 2·1**  $\text{fts}(X, J)$  叫 $T_0$ 空间, 如果  $\forall x_\lambda \neq y_\mu, \exists O \in J$  使或者  $x_\lambda \in O$  且  $y_\mu \notin O$ , 或者  $y_\mu \in O$  且  $x_\lambda \notin O$ .

**命题 2·1** 若  $\text{fts}(X, J)$  是 $T_0$ 空间, 则  $\forall x \in X$  及  $\lambda < \mu \in (0, 1]$ ,  $\exists O \in J$  使  $\lambda < O(x) \leq \mu$ .

**定理 2·1**  $\text{fts}(X, J)$  是 $T_0$ 空间的充要条件是  $\forall x_\lambda \neq y_\mu$ , 或者  $x_\lambda \notin \overline{(y_\mu)}$  或者  $y_\mu \notin \overline{(x_\lambda)}$  其中  $(x_\lambda)$  表示仅在点x取值 $\lambda$ 其余全取0值的F集.

**证明** 必要性: 设  $x_\lambda \neq y_\mu \Rightarrow x_{1-\lambda} \neq y_{1-\mu}$ , 由  $\text{fts}(X, J)$  是 $T_0$ 空间  $\Rightarrow \exists O_1 \in J$  使①  $x_{1-\lambda} \in O_1$  且  $y_{1-\mu} \notin O_1$ , 或者②  $y_{1-\mu} \in O_1$  且  $x_{1-\lambda} \notin O_1$ . 由①  $\Rightarrow x_{1-\lambda} \in O_1$  且  $O_1 \subset (y_\mu)'$   $\Rightarrow x_\lambda \notin \overline{(y_\mu)}$ . 由②  $\Rightarrow y_\mu \in \overline{(x_\lambda)}$ .

充分性设  $x_\lambda \neq y_\mu \Rightarrow x_{1-\lambda} \neq y_{1-\mu}$ , 由假设, 若  $x_{1-\lambda} \notin \overline{(y_{1-\mu})} \Rightarrow \exists O \in J$  使  $x_\lambda \in O \subset (y_{1-\mu})'$ , 即  $x_\lambda \in O$  且  $y_\mu \notin O \Rightarrow \text{fts}(X, J)$  为 $T_0$ 空间. 若  $y_{1-\mu} \notin \overline{(x_{1-\lambda})}$  情况相同, 证完.

**系** 设  $\text{fts}(X, J)$  为 $T_0$ 空间, 则  $\forall x \in X$  及  $\lambda < \mu \in (0, 1]$ ,  $x_\mu \in \overline{(x_\lambda)}$

**引理 2·1** 设  $\text{fts}(X, J)$  为 $T_0$ 空间, 则  $\forall x \in X$  及  $\rho \in [0, 1]$ ,  $\exists O \in J$  使  $O(x) = \rho$ .

**证明** 若  $\rho = 0$ , 取  $O = \phi$  即可, 若  $0 < \rho \leq 1$ , 取  $\rho_n = (1 - \frac{1}{n})\rho$  ( $n = 1, 2, 3 \dots$ ), 则  $\rho_n < \rho_{n+1}$  且  $\rho_n \rightarrow \rho$  ( $n \rightarrow \infty$ ), 于是,  $\forall x \in X$ , 由命题 2·1  $\Rightarrow \exists O_n \in J$  使  $\rho_n < O(x) \leq \rho_{n+1}$ , 令  $O = \bigcup_{n=1}^{\infty} O_n \in J$ , 则  $O(x) = \rho$ , 证完.

**定理 2·2**  $\text{fts}(X, J)$  为 $T_0$ 空间的充要条件是  $\forall x_\lambda \neq y_\mu, \exists O \in J$  使或  $\lambda < O(x)$  且  $\mu = O(y)$  或者  $\mu < O(y)$  且  $\lambda = O(x)$ .

**证明** 充分性显然. 今证必要性. 设  $x_\lambda \neq y_\mu$ , 由  $\text{fts}(X, J)$  为 $T_0$ 空间  $\Rightarrow \exists O_1$

$\in J$  使或者① $\lambda < O_1(x)$  且  $\mu \geq O_1(y)$ , 或者② $\mu < O_1(y)$  且  $\lambda \geq O_1(x)$ 。若①, 由引理 2·1  $\Rightarrow \exists O_2 \in J$  使  $O_2(y) = \mu$ , 取  $O = O_1 \cup O_2$  则  $O(x) \geq O_1(x) > \lambda$  且  $O(y) = \mu$ 。若②有相同的情形。证完。

**定义 2·2**  $fts(\mathcal{G}, J)$  叫  $T_1$  空间, 如果  $\forall x_\lambda \neq y_\mu$ , 若① $x \neq y$ ,  $\exists O_1, O_2 \in J$  使  $x_\lambda < O_1$  且  $y_\mu < O_1$ , 同时  $y_\mu < O_2$  且  $x_\lambda < O_2$ , 若② $x = y$ ,  $\lambda < \mu$ ,  $\exists \in J$  使  $\lambda < O(x) \leq \mu$ 。

**命题 2·2** 若  $fts(\infty, J)$  是  $T_1$  空间, 则它也必为  $T_0$  空间。

**定理 2·3**  $fts(x, J)$  为  $T_1$  空间的充要条件为① $\forall x \neq y$  及  $\lambda, \mu \in (0, 1]$ , 则  $x_\lambda \notin \overline{(y_\mu)}$  且  $y_\mu \notin \overline{(x_\lambda)}$ ; ② $\forall x \in x$  及  $\lambda < \mu \in (0, 1]$ ,  $x_\mu \notin \overline{(x_\lambda)}$

**定理 2·4**  $fts(\mathcal{G}, J)$  为  $T_1$  空间的充要条件为  $\forall x_\lambda$ ,  $(x_\lambda)$  为 F 闭集

**证明** 必要性、 $\forall x \neq y$  及  $\mu$ , 由定理 2·3  $y_\mu \notin \overline{(x_\lambda)}$ 。  $\forall \mu > \lambda$ , 由定理 2·3  $x_\mu \notin \overline{(x_\lambda)}$   $\Rightarrow \overline{(X\lambda)} = (x_\lambda) \Rightarrow (x_\lambda)$  为 F 闭集。

充分性  $\forall (x_\lambda) \in J' \Rightarrow (x_\lambda) = \overline{(x_\lambda)} \Rightarrow$  ① $\forall \mu > \lambda$ ,  $x_\mu \in (x_\lambda) = \overline{(x_\lambda)}$ ; ② $\forall x \neq y$ ,  $y_\mu \notin (x_\lambda) = \overline{(x_\lambda)}$  且  $x_\lambda \notin (y_\mu) = \overline{(y_\mu)}$ 、由定理 2·3  $\Rightarrow fts(X, J)$  为  $T_1$  空间。证完。

**系**  $fts(X, J)$  为  $T_1$  空间的充要条件是  $\forall x_\lambda \exists O \in J$  使  $O = (x_\lambda)'$ 。

**定理 2·5**  $fts(X, J)$  为  $T_1$  空间的充要条件为  $\forall x_\lambda$ ,  $B = \bigcap \{U : U \text{ 是 } x_\lambda \text{ 的邻域}\} = (x_\lambda)$ 。

**证明**、必要性、若不然① $\exists x \neq y$  使  $y_\mu \leftarrow B \Rightarrow y_\mu \leftarrow x_\lambda$  的每一邻域。与  $fts(X, J)$  是  $T_1$  空间矛盾。或② $\exists \mu > \lambda$  使  $x_\mu \leftarrow B \Rightarrow x_\mu \leftarrow x_\lambda$  的每一邻域, 与  $fts(X, J)$  是  $T_1$  空间矛盾。

充分性、若不然, ① $\exists y \neq x$ ,  $\lambda, \mu \in (0, 1]$  使 i)  $y_\mu \leftarrow x_\lambda$  的每一邻域  $\Rightarrow y_\mu \leftarrow B = (x_\lambda)$  矛盾。或 ii)  $x_\lambda \leftarrow y_\mu$  的每一邻域  $\Rightarrow x_\lambda \leftarrow \bigcap \{U : U \text{ 是 } y_\mu \text{ 的邻域}\} = (y_\mu)$  矛盾, ② $\exists x_\lambda$  及  $\mu > \lambda$  使  $x_\mu \leftarrow x_\lambda$  的每一邻域  $\Rightarrow x_\mu \leftarrow B = (x_\lambda)$  矛盾。证完。

**定理 2·6** 设  $fts(X, J)$  为  $T_1$  空间, 则  $x_\lambda$  为 F 集 A 的聚点的充要条件是对满足

$x_{1-\lambda} < 0$  的任何  $O \in J$ ,  $\exists X$  的无限子集  $\{x^\alpha \in X; \alpha \in M\}$  ( $M$  为无限指标集) 使、  
 $\forall \alpha \in M \quad O(x^\alpha) + A(x^\alpha) > 1$

**证明**, 必要性, 若不然.  $\exists$  满足  $x_{1-\lambda} \prec O_1$  的  $O_1 \in J$  及  $X$  的有限子集  $\{x^i : i = 2, 3, \dots, n\}$  使,  $O_1(x^i) + A(x^i) > 1$  ( $i = 2, 3, \dots, n$ ) 而  $\forall y \neq x^i$  ( $i = 2, 3, \dots, n$ )  $O_1(y) + A(y) \leq 1$

(一) 当  $x_\lambda \in A$  时, 不妨设  $x^i$  ( $i = 2, 3, \dots, n$ ) 异于  $x$ , 取  $\lambda_i$  使  $\lambda_i \geq A(x^i) > O_1'(x^i)$ , ( $i = 2, 3, \dots, n$ ), 由定理 2·4 系,  $\exists O_i \in J$  使  $O_i = (x_{\lambda_i})'$  ( $i = 2, 3, \dots, n$ )  $\Rightarrow x_{1-\lambda} \prec O_i$  ( $i = 2, 3, \dots, n$ ) 令  $O = \bigcap_{i=1}^n O_i \in J$ , 则  $x_{1-\lambda} \prec O$  且当  $y \neq x^i$  ( $i = 2, 3, \dots, n$ ) 时,  $O(y) + A(y) \leq O_1(y) + A(y) \leq 1$ , 当  $y = x^i$  时,  $O(x^i) + A(x^i) \leq O_i(x^i) + A(x^i) = 1 - \lambda_i + A(x^i) \leq 1$ ,  $\Rightarrow x_\lambda$  不是  $F$  集  $A$  的聚点. 矛盾.

(二) 当  $x_\lambda \notin A$  时, 若  $O_1(x) + A(x) \leq 1$ , 证明同 (一) 今设  $x_\lambda = x$ ,  $\because \lambda > A(x)$ , 取  $\delta$  使  $\lambda > \delta \geq A(x) = A(x^\delta) > O_1'(x)$ , 由定理 2·4 系,  $\exists O_2 \in J$  使  $O_2 = (x_\delta)'$   $\Rightarrow x_{1-\lambda} \prec O_2$ , 令  $O = O_1 \cap O_2$ , 则  $x_{1-\lambda} \prec O \in J$  且  $\forall y \neq x = x^\delta$ ,  $O(y) = O_1(y)$ . 而  $O(x) = 1 - \delta \Rightarrow O(x) + A(x) = 1 - \delta + A(x) \leq 1$ , 于是化为情形 (一).

充分性显然. 证完.

**定理 2·7**, 设  $\text{fts}(X, J)$  为  $T_1$  空间, 则任何  $F$  集的导集是  $F$  闭集

**证明**: 设  $A$  为  $F$  集. 欲证  $A^d \in J'$ , 只须证  $A^d$  的聚点也是  $A$  的聚点. 设  $x_\lambda$  是  $A^d$  的聚点  $\Rightarrow \forall x_{1-\lambda} \prec O \in J$  由定理 2·6  $\Rightarrow \exists y \in X$  使  $O(y) + A^d(y) > 1$ . 取  $\mu$  使  $O'(y) < \mu \leq A^d(y)$  且  $y_\mu$  是  $A$  之聚点. 由  $y_{1-\mu} \prec O$  及定理 2·6  $\Rightarrow \exists X$  的无限子集  $\{x^\alpha : \alpha \in M\}$  使  $\forall \alpha \in M$ ,  $O(x^\alpha) + A(x^\alpha) > 1$ , 再由定理 2·6 得  $x_\lambda$  是  $A$  之聚点. 证完.

### 三、 $T_2$ 空间

**定义 3·1**,  $\text{fts}(X, J)$  叫  $T_2$  空间, 如果, ①  $\forall x \neq y$  及  $\lambda, \mu \in (0, 1]$ ,  $\exists O_1, O_2 \in J$  使  $x_\lambda \prec O_1, y_\mu \prec O_2$ , 且  $\forall z \in X$ ,  $O_1(z) + O_2(z) \leq 1$ , (简记为  $O_1 + O_2 \leq 1$ ), ②  $\forall x \in X$  及  $\lambda < \mu \in (0, 1]$ ,  $\exists O \in J$  使  $\lambda < O(x) \leq \mu$ .

**命题 3·1** 若  $\text{fts}(X, J)$  是  $T_2$  空间, 则它必为  $T_1$  空间.

**证明**  $\forall x_\lambda \neq y_\mu$  若  $x \neq y$ , 由  $\text{fts}(X, J)$  是  $T_2$  空间  $\Rightarrow \exists O_1, O_2 \in J$  使  $x_\lambda \prec O_1, y_\mu \prec O_2$  且  $O_1 + O_2 \leq 1$ ,  $\Rightarrow O_2 \subset O_1' \subset (x_\lambda)'$   $\Rightarrow y_\mu \notin \overline{(x_\lambda)}$ . 同理有  $x_\lambda \notin \overline{(y_\mu)}$ . 若  $x = y$ ,  $\lambda < \mu \Rightarrow 1 - \mu < 1 - \lambda$ , 由  $\text{fts}(X, J)$  是  $T_2$  空间  $\Rightarrow \exists O \in J$  使  $1 -$

$\mu < O(x) \leq 1 - \lambda$ , 即  $x_{1-\mu} \in O \subset (x_\lambda)'$   $\Rightarrow x_\mu \notin \overline{(x_\lambda)}$ , 由定理 2、3  $\Rightarrow$  fts  $(X, J)$  为  $T_1$  空间。证完。

**定义 3·2**、F 点列  $(x_{\lambda n}^n: n \in \mathbb{N})$  叫做终在 F 集  $A$  内, 如果  $\exists n_0$  使  $n > n_0$  时  $x_{\lambda n}^n \in A$

**定义 3·3** fts  $(X, J)$  中 F 点列  $(x_{\lambda n}^n: n \in \mathbb{N})$  叫做常常不小于  $\alpha \in (0, 1]$ , 如果  $\forall n, \exists m > n$ , 使  $\lambda_m \geq \alpha$ 。

**定义 3·4** fts  $(X, J)$  中 F 点列  $(x_{\lambda n}^n: n \in \mathbb{N})$  叫做收敛于 F 点  $x_\lambda$ , 如果 F 点列  $(x_{\lambda n}^n: n \in \mathbb{N})$  终在  $x_\lambda$  的任何开邻域内。

**命题 3·1** 设 F 点列  $(x_{\lambda n}^n: n \in \mathbb{N})$  收敛于  $x_\lambda$ , 则  $\forall \mu \geq \lambda$ , 该 F 点列也收敛于  $x_\mu$

**定理 3·1** 设 fts  $(X, J)$  为  $T_2$  空间, 则常常不小于  $\frac{1}{2}$  的每一 F 点列不能同时收敛于承点不同的 = F 点。

**证明**、设不然, 则有常常不小于  $\frac{1}{2}$  的 F 点列  $(x_{\lambda n}^n: n \in \mathbb{N})$  同时收敛于  $x_\lambda$  及  $y_\mu$  且  $x \neq y$ 。由收敛于  $x_\lambda$ ,  $\forall x_\lambda \in O_1 \in J, \exists n_1$  使  $n > n_1$  时  $x_{\lambda n}^n \in O_1$ , 由收敛于  $y_\mu$ ,  $\forall y_\mu \in O_2 \in J, \exists n_2$  使  $n > n_2$  时,  $x_{\lambda n}^n \in O_2 \Rightarrow n > n_0 = \max \{n_1, n_2\}$  时, 同时有  $x_{\lambda n}^n \in O_1$  且  $x_{\lambda n}^n \in O_2$ , 由  $(x_{\lambda n}^n: n \in \mathbb{N})$  常常不小于  $\frac{1}{2} \Rightarrow \exists n_3 > n_0$  使  $\lambda_{n_3} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow O_1(x_{\lambda_{n_3}}^{n_3}) + (x_{\lambda_{n_3}}^{n_3}) + O_2(x_{\lambda_{n_3}}^{n_3}) \geq \lambda_{n_3} \geq \frac{1}{2}$ 。与 fts  $(X, J)$  为  $T_2$  空间矛盾。证完。

**定理 3·2** 若 fts  $(X, J)$  为  $T_0$  空间, 且其中每一 F 点列不同时收敛于承点不同的 = F 点, 则 fts  $(X, J)$  是  $T_2$  空间。

**证明** 由 fts  $(X, J)$  是  $T_0$  空间  $\Rightarrow \forall x \in X$  及  $\lambda < \mu \in (0, 1], \exists O \in J$  使  $\lambda < O(x) \leq \mu$ ;

其次若  $\exists x_\lambda, y_\mu (x \neq y)$  使  $\forall x_\lambda \in O_1 \in J$  及  $\forall y_\mu \in O_2 \in J \exists z \in X$ , 满足  $O_1(z) + O_2(z) > 1$ , 取  $\rho$  使  $0 < \rho < \min \{O_1(z), O_2(z)\}$ , 则  $z_\rho \in O_1$  且  $z_\rho \in O_2$ , 令  $\rho_n = (1 - \frac{1}{n})\rho < \rho, n = 1, 2, \dots$  则  $z_{\rho_n} \in O_1$  且  $z_{\rho_n} \in O_2 (n = 1, 2, \dots)$  显然 F 点列  $(z_{\rho_n}: n \in \mathbb{N})$  同时收敛于  $x_\lambda$  及  $y_\mu (x \neq y)$  与假设矛盾。故  $\forall x_\lambda \neq y_\mu (x \neq y), \exists O_1, O_2 \in J$  使  $x_\lambda \in O_1, y_\mu \in O_2$  且  $O_1 + O_2 \leq 1$

综上知 fts  $(X, J)$  为  $T_2$  空间。证完

**命题 3·2** 在  $T_1$  与  $T_2$  空间中,  $(x_\lambda)$  的聚点只能呈  $x_\mu (\mu > \lambda)$  型。

**证明** 当 $\lambda \geq \mu$ 时,  $x_\mu \notin (x_\lambda)^d$ . 而 $\forall y \neq x$ , 由定理2·3,  $y_\mu \notin \overline{(x_\lambda)} \Rightarrow y_\mu \notin (x_\lambda)^d$ . 故 $(x_\lambda)$ 的聚点只能呈 $x_\mu (\mu > \lambda)$ 型. 证完.

#### 四、 $T_3$ 与 $T_4$ 空间

**定义4·1**  $\text{fts}(X, J)$ 叫正则空间, 如果,  $x_\lambda$  及 $B \in J'$ 满足 $x_\lambda \prec B'$ , 则 $\exists O_1, O_2 \in J$ 使 $x_\lambda \prec O_1, B \prec O_2$ 且 $O_1 + O_2 \leq 1$ . 这里 $B \prec O_2$ 表示 $\forall x \in X, B(x) \leq O_2(x)$ , 且仅当 $B(x) = O_2(x) = 1$ 时才取等号.

**定理4·1**  $\text{fts}(X, J)$ 是正则空间的充要条件是 $\forall x_\lambda$  及 $x_\lambda$  的任何开邻域 $O$ ,  $\exists O_1 \in J$ 使 $x_\lambda \prec O_1 \subset \overline{O_1} \subset O$ .

**证明**、必要性、 $\forall x_\lambda$  及 $x_\lambda \prec O \in J \Rightarrow x_\lambda \prec (O')'$ , 由 $O' \in J'$ 及定义4·1  $\Rightarrow \exists O_1, O_2 \in J$ 使 $x_\lambda \prec O_1, O' \prec O_2$ 且 $O_1 + O_2 \leq 1, \Rightarrow O_1 \subset O_2' \Rightarrow \overline{O_1} \subset \overline{O_2'} = O_2' \subset O$ .

充分性、设 $x_\lambda$  及 $B \in J'$ 满足 $x_\lambda \prec B'$ . 由 $B' \in J$ 及假设  $\Rightarrow \exists O_1 \in J$ 使 $x_\lambda \prec O_1 \subset O_1 \prec B' \Rightarrow B \prec \overline{O_1'} \in J$ , 令 $O_2 = \overline{O_1'}$   $\Rightarrow O_1 + O_2 \leq 1. \Rightarrow \text{fts}(X, J)$ 为正则空间. 证完.

**定义4·2**  $\text{fts}(X, J)$ 叫 $T_3$ 空间, 如果 $\text{fts}(X, J)$ 是正则空间且是 $T_1$ 空间.

**命题4·1** 若 $\text{fts}(X, J)$ 是 $T_3$ 空间, 则它必是 $T_2$ 空间.

**证明**  $\forall x_\lambda \neq y_\mu$  ①若 $x \neq y$ , 由 $\text{fts}(X, J)$ 是 $T_1$ 空间  $\Rightarrow (x_\lambda) \in J' \Rightarrow y_\mu \notin (x_\lambda) \Rightarrow y_\mu \prec (x_\lambda)'$ . 由 $\text{fts}(X, J)$ 是正则空间  $\Rightarrow \exists O_1, O_2 \in J$ 使 $y_\mu \prec O_1, (x_\lambda) \prec O_2$ 且 $O_1 + O_2 \leq 1$ . ②若 $x = y, \lambda < \mu$ , 由 $\text{fts}(X, J)$ 是 $T_1$ 空间  $\Rightarrow \exists O \in J$ 使 $\lambda \prec O(x) \leq \mu$ . 综合①与②使得 $\text{fts}(X, J)$ 是 $T_2$ 空间. 证完.

**定义4·3**  $\text{fts}(X, J)$ 叫正规空间, 如果 $B_1, B_2 \in J'$ 满足 $B_1 \prec B_2'$ , 则 $\exists O_1, O_2 \in J$ 使 $B_1 \prec O_1, B_2 \prec O_2$ 且 $O_1 + O_2 \leq 1$ .

**定理4·2**  $\text{fts}(X, J)$ 是正规空间的充要条件是若 $O \in J, B \in J'$ 满足 $B \prec O$ , 则 $\exists O_1 \in J$ 使 $B \prec O_1 \subset \overline{O_1} \subset O$ .

**证明**、必要性、设 $O \in J, B \in J'$ 使 $B \prec O = (O')'$ . 由 $O' \in J'$ 及定义4·3  $\Rightarrow \exists O_1, O_2 \in J$ 使 $B \prec O_1, O' \prec O_2$ 且 $O_1 + O_2 \leq 1, \Rightarrow O_1 \subset O_2' \Rightarrow \overline{O_1} \subset \overline{O_2'} = O_2' \subset O$ .

充分性 设 $B_1, B_2 \in J'$ 使 $B_1 \prec B_2'$ , 由 $B_2' \in J$ 及假设  $\Rightarrow \exists O_1 \in J$ 使 $B_1 \prec O_1 \subset \overline{O_1} \subset B_2' \Rightarrow B_2 \prec \overline{O_1'}$ , 取 $O_2 = \overline{O_1'}$   $\in J$ , 则 $O_1 + O_2 \leq 1 \Rightarrow \text{fts}(X, J)$ 为正规空间. 证完.

**定义4·4**  $\text{fts}(X, J)$ 叫 $T_4$ 空间, 如果它既是正规空间又是 $T_1$ 空间.

**命题4·2** 若 $\text{fts}(X, J)$ 是 $T_4$ 空间, 则它必是 $T_3$ 空间.

**定义 4、5** 设  $A, U$  是  $\text{fts}(X, J)$  中  $F$  集。

$U$  叫做  $A$  的邻域, 如果  $\exists O \in J$  使  $A < O \subset U$ .  $A$  的所有邻域组成它的邻域系记作  $U_A$ ,  $A$  的一个邻域族  $\alpha (\subset U_A)$  叫做它的邻域基, 如果  $\forall U \in U_A, \exists V \in \alpha$  使  $V \subset U$ .

**定理 4、3**、 $\text{fts}(X, J)$  为正则空间的充要条件是每个  $F$  点的闭邻域族是该点的邻域基。

**证明**、必要性、设  $x_\lambda$  为  $F$  点,  $B \in U_{x_\lambda} \Rightarrow \exists O \in J$  使  $x_\lambda < O \subset B$ 、由定理 4、1  $\Rightarrow \exists O_1 \in J$  使  $x_\lambda < O_1 \subset \overline{O_1} < O \subset B$ 、这说明  $x_\lambda$  的闭邻域族是它的邻域基。

充分性、 $\forall x_\lambda$  及  $\forall x_\lambda < O \in J \Rightarrow O \in U_{x_\lambda}$  由假设  $\Rightarrow \exists B \in J'$  使  $B \in U_{x_\lambda}$  且  $B < O, \Rightarrow x_\lambda < B^0$  且  $B^0 \subset B < O$ 、由定理 4、1  $\text{fts}(X, J)$  为正则空间。证完。

**定理 4、4**、 $\text{fts}(X, J)$  为正规空间的充要条件是  $F$  闭集的闭邻域族是该  $F$  闭集的邻域基。

**证明**、必要性、设  $B \in J'$ ,  $A \in U_B \Rightarrow B < A^0$  由定理 4、2  $\Rightarrow \exists O \in J$  使  $B < O \subset \overline{O} < A^0 \subset A$ 、这说明  $B$  的闭邻域族是它的邻域基。

充分性、设  $O \in J, B \in J'$  使  $B < O \Rightarrow O \in U_B$ 、由假设  $\Rightarrow \exists A \in J'$  使  $A \in U_B$  且  $A < O \Rightarrow B < A^0$  且  $\overline{A^0} \subset A$ 。由定理 4、2  $\Rightarrow \text{fts}(X, J)$  为正规空间。证完。

## 参 考 文 献

- (1) 蒲保明 刘应明 不分明拓扑学工 (四川大学学报, 自然科学版, 1977年第1期)
- (2) 蒋继光 不分明拓扑空间的分离公理与紧性。(四川大学学报)

# ON SEPARATION PROPERTIES IN FUZZY TOPOLOGY SPACE

Zhao Wanzhong

(Department of Mathematics and Dynamics)

## Abstract

In this paper, We shall define the  $T_i (i = 0, 1, 2, 3, 4)$  Separation properties in fuzzy topology space as distinguished from [1], [2]. and show the inclusion sequence  $T_4 \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$ . From this, the separation properties in fuzzy topology space is characterized.

**keywords:**  $T_i (i = 0, 1, 2, 3, 4)$  separation properties.