

也谈密勒定理及其在电子电路分析中的应用

周 采 苹

(郑州工学院 电机系)

提 要

从电路理论观点看,密勒定理实质上是一种分裂变换,本文证明了该定理的严格性。指出了密勒定理应用中易产生的错误和使用该定理的注意点,并给出了计算实例。

关键词: 密勒定理

(一)

密勒定理在电子电路尤其是放大电路分析中,有着重要的应用。图1(a)所示的放大电路中,由于反馈阻抗 Z_f 的存在,破坏了双口网络的端口条件,此三端网络就不能再作为双口网络处理。为了简化计算,可将反馈阻抗 Z_f 变换为分别并联在入口和出口的两个阻抗

$$\left. \begin{aligned} Z_1 &= \frac{Z_f}{1-K} \\ Z_2 &= \frac{Z_f}{1-\frac{1}{K}} = \frac{KZ_f}{K-1} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中 $K = \frac{\dot{V}_2}{\dot{V}_1}$ 代表放大器的电压放大倍数(或增益),如图1(b)所示。这一有源网络的等效变换就称为密勒定理,而 Z_1 、 Z_2 有时称为密勒阻抗。

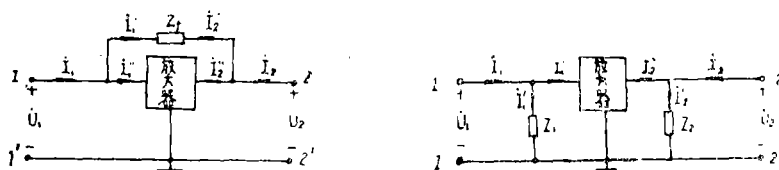


图1

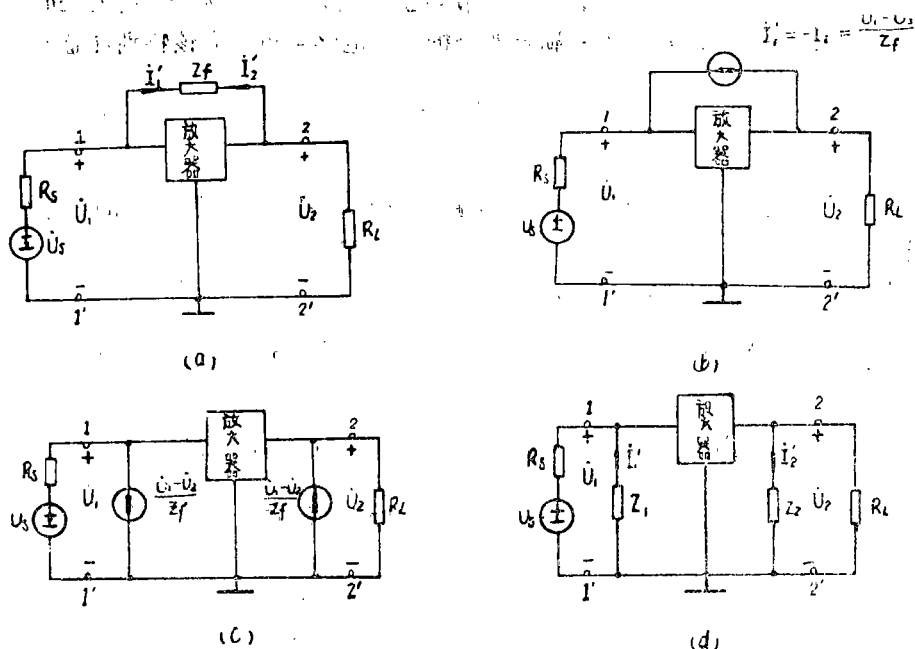
不难证明,图1(a)、(b)所示的两网络在相同节点电压作用下产生的节点电流相同,因而它们是等效的〔1〕、〔2〕。但也可以从另一角度来论证密勒定理。首先应用替代定理,用一个理想电流源 $\dot{I}_1' = -\dot{I}_2' = \frac{\dot{V}_1 - \dot{V}_2}{Z_f}$ 代替反馈阻抗 Z_f 如图2(a)、(b)所示,再

用移源法将该跨接在入口和出口两端子上的理想电流源转移至入口和出口支路, 分裂为两个理想电流源如〔图 2 (c)〕所示, 最后反过来应用替代定理, 用两个阻抗分别代替并联在入口和出口支路的两个理想电流源如图 2 (d) 所示, 这两个等效阻抗可求得为:

$$\left. \begin{aligned} Z_1 &= \dot{V}_1 / \left(\dot{V}_1 - \dot{V}_2 \right) / \frac{Z_f}{1 - \frac{\dot{V}_2}{\dot{V}_1}} \\ Z_2 &= \dot{V}_2 / \left(-\frac{\dot{V}_1 - \dot{V}_2}{Z_f} \right) = Z_f \frac{\frac{\dot{V}_2}{\dot{V}_1}}{\frac{\dot{V}_2}{\dot{V}_1} - 1} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

若令 $K = \frac{\dot{V}_2}{\dot{V}_1}$, 即得到式 (1), 于是密勒定理得证。

综上所述, 密勒定理在电路理论中不过是替代定理和电源分裂法 (移源法) 的一个应用实例而已, 它实质上是一种分裂变换。



应该强调指出, 式 (2) 给出的密勒阻抗表达式是密勒定理的最一般表示式, 因为在网络分析中, 当需要对原网络作某些变动, 例如在计算放大电路的输出阻抗时, 需短接信号源, 但保留其内阻抗; 在分析放大器的高频特性时, 需改变信号源的频率等等, 由此引起的

$K = \frac{\dot{V}_2}{\dot{V}_1}$ 的变化都反应在式 (2) 给出的密勒阻抗的表达式中。因此图 1 (b) 给出的密勒等

效电路中, 若其中的 Z_1 、 Z_2 由式 (2) 确定, 则它与图 1 (a) 所示的原网络完全等效, 对它进行分析计算都能给出正确的结果。特别是只要密勒等效电路中的密勒阻抗由式 (2) 确定, 放大电路的电压放大倍数, 输入阻抗及输出阻抗等都能在密勒等效电路中求得, 而不必用其他方法预先求出电压放大倍数 K 。

但在一般教材或技术文献中, 习惯把密勒定理表示成式 (1) 的形式, 并将给定 K 或可用一定方法求出 K 值作为应用密勒定理分析电子电路的先决条件 (实际这是不必要的)。这时就必须注意 K 的具体含义, 注意到从原网络给出或计算出的 K 值与该网络拓扑结构或元件参数作某些改变后的网络 (例如计入信号源的内阻或信号源频率改变等) 的 K 值不同。否则如果把从原网络给出或计算出的 K 值视为常量, 不区别网络的不同工作状态, 到处乱用以确定密勒阻抗, 就必然导致错误的结果。例如在应用密勒定理计算集电极—基极偏置放大电路, 自举射极跟随器, 电压并联负反馈放大电路的输出电阻, 以及分析单极放大电路的高频特性时, 都要注意这个问题, [2] 中由于个别地方忽视了这一点出现了一些错误。

还应该指出, 虽然先作出放大电路的微变等效电路, 用含受控源网络的分析方法 (例如节点分析法) 可预先求出 K 值。这样做, 从理论上固然是严格的, 但有时计算较繁, 因此在某种情况下可以事先估计到 $|K| \gg 1$, 以致密勒阻抗可以近似地认为与 K 值无关时, 允许作工程上的近似处理, 这一点, 在应用密勒定理分析电子电路中也是应该特别注意的。

(二)

应用举例:

图 3 (a) 所示集电极—基极偏置放大电路。设输入端接入内阻为 R_s 的信号源, 输出端接入负载 R_L , 试求其输入电阻, 电压放大倍数及输出电阻。

1、求电压放大倍数、输入电阻。

应用密勒定理可将图 3 (a) 变换为图 3 (b), 图中 $R_b' = \frac{R_b}{1-K}$, $R_c' = \frac{R_c}{1-\frac{1}{K}}$, 而

$K = \frac{\dot{V}_2}{\dot{V}_1}$ 。进一步分别画出图 3 (a)、(b) 的微变等效电路, 如图 3 (c)、(d) 所示。

由图 3 (d) 的密勒等效电路即可求得电压放大倍数和输入电阻。从该图中可得:

$$\begin{aligned}\dot{V}_2 &= -\beta \dot{I}_b \cdot (R_c' \parallel R_c \parallel R_L) = -\beta \frac{\dot{V}_1}{r_{be}} \cdot \frac{1}{\frac{1}{R_c'} + \frac{1}{R_c} + \frac{1}{R_L}} \\ &= -\beta \frac{\dot{V}_1}{r_{be}} \cdot \frac{1}{G_b \left(1 - \frac{1}{K}\right) + G_c + G_L} = -\frac{\beta g_{be} \dot{V}_1}{(G_b + G_c + G_L) - G_b \frac{1}{K}}\end{aligned}$$

代入 $K = \frac{\dot{V}_2}{\dot{V}_1}$ 经整理得:

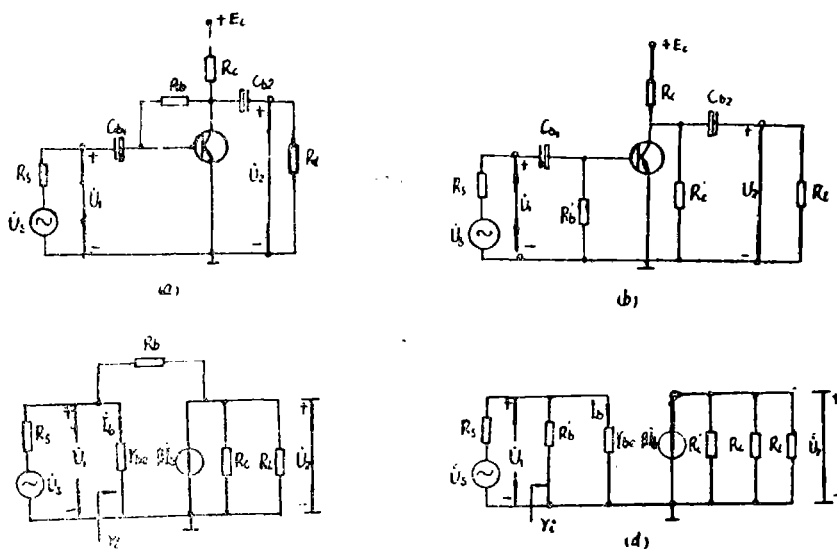


图3

$$(G_b + G_C + G_L) \dot{V}_2 = -(\beta g_{be} - G_b) \dot{V}_1$$

从而电压放大倍数:

$$K = \frac{\dot{V}_2}{\dot{V}_1} = - \frac{\beta g_{be} - G_b}{G_b + G_C + G_L} \quad (3)$$

上述结果不难从原网络图 3 (a) 的微变等效电路图 3 (c) 用节点分析法求得。若放大器不接负载, 即 $R_L = \infty$, 式 (3) 简化为

$$K = \frac{\dot{V}_2}{\dot{V}_1} = - \frac{\beta g_{be} - G_b}{G_b + G_C} \quad (4)$$

设 $\beta = 40$, $r_{be} = 965\Omega$, $R_b = 200K$, $R_C = 10K$, $R_s = 10K$,

则由式 (4) 求得:

$$K = -394.7$$

求出电压放大倍数 K 后即可由式 (1) 确定密勒阻抗 R_b' 并进而求得输入电阻:

$$r_i = R_b' \parallel r_{be} \quad (5)$$

由于 $|K| \gg 1$, 可作工程上的近似处理, 认为 $R_C' = \frac{R_b}{1 - \frac{1}{K}} \approx R_b$, 于是从图 3 (d) 可近

似写出:

$$\dot{V}_2 = -\beta \dot{I}_b \cdot (R_b \parallel R_C \parallel R_L) = - \frac{\beta \dot{V}_1}{r_{be}} \cdot (R_b \parallel R_C \parallel R_L)$$

所以

$$K = \frac{\dot{V}_2}{\dot{V}_1} = - \frac{\beta}{r_{be}} \cdot (R_b \parallel R_C \parallel R_L) \quad (6)$$

若放大器不接负载时:

$$K = -\frac{\beta}{r_{be}} \cdot (R_b \parallel R_c) \quad (7)$$

代入上面给出的数据可求得:

$$K \approx -395$$

$$R_b' = \frac{R_b}{1-K} \approx 0.5 \text{ K}\Omega$$

$$r_i \approx 0.33 \text{ K}\Omega$$

由上述计算过程可以清楚地看到, 只要密勒阻抗是由式(2)给定, 则K及 r_i 均可从密勒等效电路图3(d)中直接求出, 而不必从原网络或其微变等效电路中预先求出K。因此, 把已知K或可用一定办法求出K作为应用密勒定理分析电子电路的先决条件是完全不必要的。

2、求输出电阻

为求输出电阻, 可先将图3(c)改画成图4(a), 注意这时信号源 $V_s=0$, 保留内阻 R_s , 且不应考虑负载影响, 再经密勒变换得图4(b), 图中:

$$R_b' = \frac{R_b}{1-K'} = \frac{R_b}{1-(\dot{V}_2'/\dot{V}_1')}, \quad R_c' = \frac{R_b}{1-\frac{1}{K'}} = R_b \frac{\dot{V}_2'/\dot{V}_2}{(\dot{V}_2'/\dot{V}_2)-1}$$

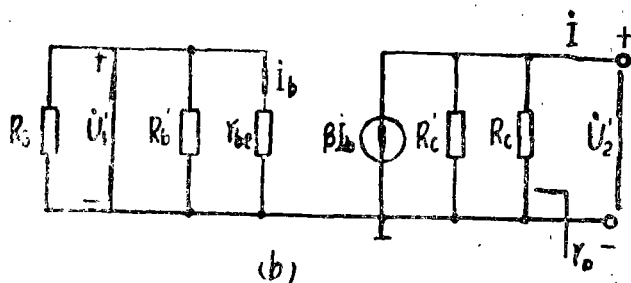
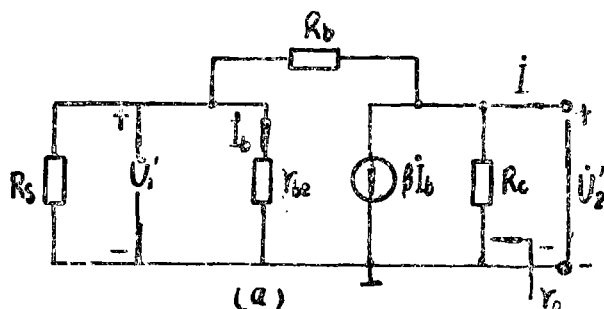


图4

由图4(b)可列出节点方程:

$$\begin{cases} \dot{V}'_1 \left(\frac{1}{R_s} + \frac{1 - \frac{\dot{V}'_2}{\dot{V}'_1}}{R_b} + \frac{1}{r_{be}} \right) = 0 \\ \dot{V}'_2 \left(\frac{1}{R_c} + \frac{\frac{\dot{V}'_2}{\dot{V}'_1} - 1}{R_b} \right) + \beta \frac{\dot{V}'_1}{r_{be}} = I \end{cases}$$

联立求解, 可得电压放大倍数:

$$K' = \frac{\dot{V}'_2}{\dot{V}'_1} = \frac{\frac{1}{R_s} + \frac{1}{R_b} + \frac{1}{r_{be}}}{\frac{1}{R_b}} = \frac{(R_s \parallel r_{be}) + R_b}{(R_s \parallel r_{be})} \quad (8)$$

及输出电阻

$$r_o = \frac{\dot{V}'_1}{I} = R_c \parallel \frac{R_b r_{be} + R_b R_s + R_s r_{be}}{r_{be} + (1 + \beta) R_s} \quad (9)$$

代入上面给出的数据, 可求得:

$$K' \approx 228$$

注意到:

$$K' = 228 \approx K = -395$$

因图 3 (d) 与图 4 (b) 的网络结构不同。

$$\therefore r_o = 10 \approx 10 \parallel 5.36 \approx 3.49 \text{ K}\Omega$$

而 [2] 例 1.8.4 计算出的 $r_o = 9.52 \text{ K}\Omega$ 显然是错误的。

式 (8) 及 (9) 亦可不用密勒变换, 而直接求解图 4 (a) 电路得到。

这里再一次看到, 只要密勒阻抗是由式 (2) 给出, 则 K' 及 r_o 都可以从密勒等效电路图 4 (b) 求出, 而不必用其他方法预先求出 K' 。

也可以从原网络的微变等效电路图 4 (a) 中预先求出电压放大倍数 K' , 由电压分压定律立即可得到:

$$K' = \frac{\dot{V}'_2}{\dot{V}'_1} = \frac{(R_s \parallel r_{be}) + R_b}{(R_s \parallel r_{be})}$$

相应的密勒阻抗为:

$$R_c' = \frac{R_b}{1 - K'}$$

再从图 4 (b) 看出, 输出电阻是下述三个阻抗的并联值:

(1) 密勒阻抗 R_c' ; (2) 集电极负载电阻 R_c ; (3) 受控电流源的等效阻抗

(下转第 79 页)

The former is determined by the regulation of the full-load, which can be obtained from the open-circuit characteristic (i.e., the OCC curve) and the zero power-factor characteristic (i.e., the ZPFC curve).

The latter is obtained nearly from the linearised open-circuit characteristic (i.e., the LOCC curve) and the ZPFC curve.

Because these are the two conditions of saturation under no-load and full-load are very different, it is wrong to designate the former- X_{sc} as the saturated synchronous reactance.

Through the analysis, the paper points out and clears the mistaken concept in the relative article.

key words: synchronous generators, saturation synchronous reactance

(上接第85页)

$$\beta = \frac{\dot{V}_2'}{\beta \dot{I}_b} = \frac{\dot{V}_2'}{\beta \frac{\dot{V}_1'}{r_{be}}} = \frac{r_{be}}{\beta} K' \quad (\text{注: 此时由于 } \dot{I}_b \neq 0, \therefore \beta \dot{I}_b \neq 0, \text{即受控电流源的等效阻抗})$$

r_{β} 是客观存在的一个数值)。这正是一般文献中应用密勒定理时的解题思路。〔3〕

参 考 文 献

- 〔1〕邱关原主编, 电路(电工原理I), 人民教育出版社1978年
- 〔2〕康华光主编, 电子技术基础(上册)人民教育出版社1979年
- 〔3〕康华光等, 密勒定理及其在电子电路分析中的应用, 高等学校电工课程教学工作通讯第18期1982年
- 〔4〕曹慧君, 应用密勒定理值得注意的几个问题, 高等学校电工课程教学工作通讯第24期1983年

ALSO ON MILLER THEOREM AND ITS APPLICATION IN ELECTRONIC CIRCUIT ANALYSIS

Zhou Caiping

(Electrical Engineering Department)

Abstract

Miller Theorem, viewed from circuit theory, is in essence a diakoptic transformation. This paper has proved the Strictness of the theorem and Specified its applications with points for attention guarding against liable mistakes. Calculation examples are also provided.

key words: Miller Theorem