

确定复合型裂纹断裂角的图解法

丁遂栋

(数力系)

提 要

本文将Erdogan, Sih的最大周向应力理论及Palaniswamy的能量释放率理论所提出的确定I—II复合型裂纹断裂角 θ_0 的解析方程转换成图解方程,进而作出 $K_I/K_{II}-\theta_0$ 和 $K_{II}/K_I-\theta_0$ 曲线,对复合型裂纹断裂角 θ_0 的确定提供了一个非常简便的方法。

关键词: 复合型裂纹, 断裂角

一、断裂角 θ_0 的解析方程

复合型裂纹断裂问题是工程中需要解决的一个重要课题,复合型裂纹与单纯张开型裂纹的主要不同点是:裂纹的扩展并不沿原裂纹线方向,而是沿着与裂纹线成某一角度的方向。因此,对复合型裂纹必须解决两个重要问题,一是确定裂纹的扩展方向,即断裂角,二是建立复合型裂纹的断裂判据。

对于复合型裂纹,人们已经提出了多种脆性断裂理论,其中Erdogan, Sih曾提出最大周向应力理论,Palaniswamy曾提出能量释放率理论。他们虽然以不同的观点进行分析,但是得到了完全相同的结果。其确定I—II复合型裂纹断裂角 θ_0 的解析方程,为

$$K_I \sin \theta_0 + K_{II} (3 \cos \theta_0 - 1) = 0 \quad (1)$$

而建立的断裂判据,为

$$\cos \frac{\theta_0}{2} [K_I \cos^2 \frac{\theta_0}{2} - \frac{3}{2} K_{II} \sin \theta_0] = K_{Ic} \quad (2)$$

应该指出,以上二式中 θ_0 的符号规定,是以裂纹尖端为坐标原点的矢径 r 相对于原裂纹线 x 方向逆时针旋转为正,顺时针旋转为负。

二、断裂角 θ_0 的图解曲线

如上所述,由式(1)所描述的确定I—II复合型裂纹断裂角 θ_0 的解析方程是一个超越方程,要利用这个方程求 θ_0 的解析解遇到数学上的困难,而用试算法求解也非常麻烦。因此,为了寻求确定断裂角 θ_0 的简便方法,这里将断裂角 θ_0 的解析方程进行了特殊的变换,即将式(1)改写成

$$\text{或} \quad K_I / K_{II} = \frac{1 - 3 \cos \theta_0}{\sin \theta_0} \quad (3)$$

$$K_{II}/K_I = \frac{\sin\theta_0}{1-3\cos\theta_0} \quad (4)$$

以上二式可称为断裂角 θ_0 的图解方程。

根据式(3)和式(4),我们可以设定 θ_0 的一些具体数值,从而求出相应的 K_I/K_{II} 和 K_{II}/K_I 的数值。这里所设的 θ_0 值与其相应的 K_I/K_{II} , K_{II}/K_I 的数值列表如下:

θ_0	0°	-5°	-10°	-15°	-20°	-30°	-40°	-50°	-60°	-70°	-70.5°
K_I/K_{II}	∞	22.9	11.2	7.34	5.32	3.20	2.02	1.21	0.58	0.03	0
K_{II}/K_I	0	0.04	0.09	0.14	0.19	0.31	0.50	0.83	1.72	33.3	∞

利用上表中 $K_I/K_{II} \sim \theta_0$ 和 $K_{II}/K_I \sim \theta_0$ 的对应数值可在以 θ_0 为横坐标, K_I/K_{II} 或 K_{II}/K_I 为纵坐标的坐标系内描点,然后,用曲线板分别画出 $K_I/K_{II} \sim \theta_0$ 和 $K_{II}/K_I \sim \theta_0$ 的关系曲线,如图1和图2所示。此二曲线称为断裂角 θ_0 的图解曲线。

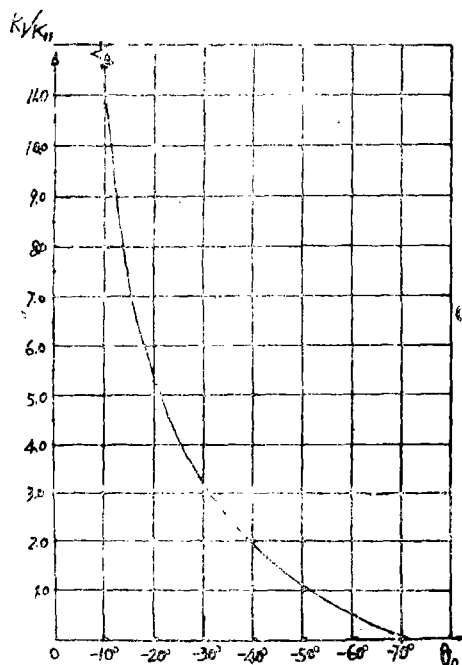


图1 $K_I/K_{II} \sim \theta_0$ 。曲线

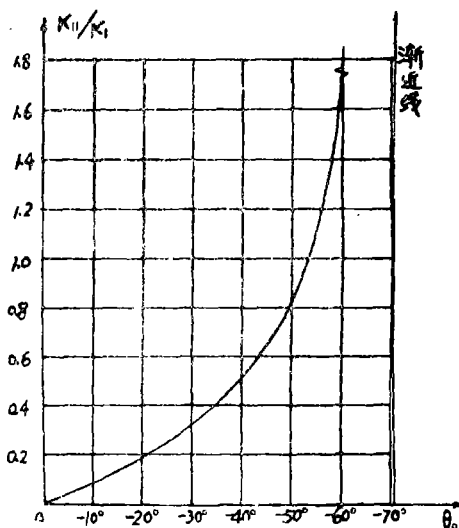


图2 $K_{II}/K_I \sim \theta_0$ 。曲线

由图1可以看出曲线是以 K_I/K_{II} 的纵坐标轴为渐近线,说明当 $\theta_0 = 0^\circ$ 时, $K_I/K_{II} \rightarrow \infty$,即 $K_{II} = 0$,裂纹为纯I型裂纹。曲线与 θ_0 的横坐标轴相交,交点 $\theta_0 = -70.5^\circ$, $K_I/K_{II} = 0$,即 $K_I = 0$,说明裂纹为纯II型裂纹。换言之,对纯I型裂纹其裂纹扩展沿原裂纹线方向,即断裂角 $\theta_0 = 0^\circ$ 。对纯II型裂纹,断裂角 $\theta_0 = -70.5^\circ$ 。由此,也可以说明纯I型裂纹和纯II型裂纹可以看作是I-II复合型裂纹的特殊情况。

同样,由图2可以看出,当 $\theta_0 = 0^\circ$ 时, $K_{II}/K_I = 0$,即 $K_{II} = 0$,其裂纹属纯I型裂

纹。曲线以 $\theta_0 = -70.5^\circ$ 时的竖线为渐近线, 表明当 $\theta_0 = -70.5^\circ$ 时, $K_{11}/K_1 \rightarrow \infty$, 即 $K_1 = 0$, 裂纹属纯Ⅱ型裂纹, 又一次证明纯Ⅱ型裂纹的断裂角 $\theta_0 = -70.5^\circ$ 。

这里作出两种曲线的目的是为了提提高确定 θ_0 数值的精确度, 即当 K_1/K_{11} 之比值较大时宜采用图1所示的曲线, K_1/K_{11} 之比值较小时宜采用图2所示的曲线。

三、工程应用及计算实例

对于工程实际中的Ⅰ—Ⅱ复合型裂纹的脆性断裂计算, 若采用最大周向应力理论或能量释放率理论, 往往可以根据应力强度因子手册查出具体问题的应力强度因子 K_1 和 K_{11} 的计算公式, 然后, 由受力及裂纹情况计算出 K_1 和 K_{11} 的数值, 这样, 就可以求得 K_1/K_{11} 或 K_{11}/K_1 的比值, 于是, 利用图1或图2就可很容易地确定断裂角 θ_0 的数值, 最后, 根据断裂判据进行断裂计算。

例题: 薄壁压力容器如图3所示, 内半径为 R , 壁厚为 t , 若钢材的断裂韧性 $K_{1c} = 44 \text{ MN/m}^{3/2}$, 在容器壁上有一条长为 $2a = 5 \text{ mm}$ 的裂纹, 且与环向应力 σ_θ 方向的夹角为 $\beta = 60^\circ$, 试按最大周向应力理论确定临界压力 P_c 。

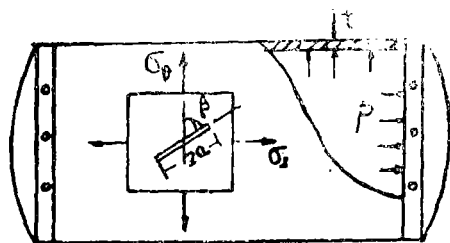


图3

裂纹, 其应力强度因子计算公式, 为

$$K_1 = \frac{PR}{2t} \sqrt{\pi a} (1 + \sin^2 \beta)$$

$$K_{11} = \frac{PR}{2t} \sqrt{\pi a} \sin \beta \cos \beta$$

将 $a = 2.5 \text{ mm}$, $\beta = 60^\circ$ 代入以上二式, 得

$$K_1 = 0.0775 \frac{PR}{t}$$

$$K_{11} = 0.0192 \frac{PR}{t}$$

于是

$$K_1/K_{11} = 4.04$$

由图1曲线查得 $\theta_0 = -23.5^\circ$

将 K_1 , K_{11} , θ_0 及 K_{1c} 代入(2)式, 有

$$\cos\left(\frac{-23.5^\circ}{2}\right) \left[0.0775 \frac{P_c R}{t} \cos^2\left(\frac{-23.5^\circ}{2}\right) - \frac{3}{2} (0.0192) \frac{P_c R}{t} \sin(-23.5^\circ) \right] = 44$$

解: 由材料力学知

$$\sigma_\theta = \frac{PR}{t}$$

$$\sigma_z = \frac{PR}{2t}$$

由断裂力学分析知, 此裂纹属Ⅰ—Ⅱ复合型

解之得临界内压力, 为

$$P_c = 524 \left(\frac{t}{R} \right) \quad \text{MN/m}^2$$

参 考 文 献

- (1) 王仁东编著 《断裂力学理论和应用》, 化学工业出版社, 1984.
- (2) 诸武扬编著 《断裂力学基础》, 科学出版社, 1979.
- (3) 高庆主编 《工程断裂力学》, 重庆大学出版社, 1986.
- (4) 中国航空研究院主编 《应力强度因子手册》, 科学出版社, 1981.

THE GRAPHICAL METHOD TO DETERMINE THE FRACTURE ANGLE OF COMPOUND CRACK

Ding Sui-dong

(Dept. of Math. and Mech.)

Abstract

In this paper, the fracture angle of I—II compound crack is determined by using graphical equation instead of using the analytical equation, which is in Erdogan, Sih's theory of maximum circumferential stress and Palaniswamy's theory of rate of energy release, and the $K_{II}/K_{I,1}-\theta_0$, $K_{I,1}/K_{I,1}-\theta_0$ curve are drawn up, which provide a very simple and convenient method to determine the fracture angle of compound crack.

Key word: Compound crack, Fracture Angle