

动态有限单元法对摩托车刚架的动力分析

兰振凯 刘敏珊

(应力分析研究室) (力学教研室)

提 要

本文采用了各阶动态约束模态函数而组成的平面刚架结构有限单元的各阶动态形函数矩阵及各阶单元特性表达式,利用它们可以准确地计算出摩托车的各阶动特性,进而可求出在各种载荷下的各阶动位移与动应力分量,最后将各阶动应力分量迭加,即可准确地求出动位移及动应力响应。无疑这对摩托车的优化设计是十分有意义的。

关键词: 有限元, 结构动力分析,

一、引 言

对于复杂结构的静强度分析已日趋成熟,而动应力的计算和分析,是结构动力学的一个有待解决的问题。本文提出了用动态下的固有特性来计算动应力,通过考题得到了比较满意的结果。并用此方法对M—50型摩托车车架进行了动应力计算。

对于复杂结构,一般都采用有限单元法进行离散,将其化为一个有限自由度系统,其动力方程为:

$$[M]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{f(t)\} \quad (1)$$

式中: $[M]$, $[C]$, $[K]$ 分别为结构的有限单元模型的质量阻尼和刚度矩阵; $\{q\}$ 为结座位移的列矢量, $\{f(t)\}$ 为结点作用力的列矢量。

对式(1)采用模态迭加法 and 数值积分法很容易得到结点的位移响应。

依应变与位移之间的关系,

$$\{\varepsilon\} = [B]\{q\} \quad (2)$$

式中: $[B]$ 为应变—位移关系矩阵;

由(2)式可计算出任意截面的广义应变,对于平面刚架单元,应变列阵为:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ x \end{Bmatrix} \quad (3)$$

$$\text{其中: } \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad x = V''$$

u , v 分别为单元中任意截面的纵向与横向位移。

在得到 $\{\varepsilon\}$ 之后,根据应力—应变关系:

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \quad (4)$$

式中: $\{\sigma\}$ 为广义应力矢量, $[D]$ 为应力—应变关系矩阵,且为:

$$[D] = \begin{bmatrix} EA & 0 \\ 0 & EI \end{bmatrix}$$

上述过程计算刚架的静应力可以得到十分准确的结果,而对计算结构的动应力时,其效果往往不好,特别是当结构的振动含有高阶模态分量时,就需要使用适用于进行结构动力分析的有限元法——一般称之为动态有限元法。

二、平面刚架结构有限元的动态形函数矩阵

1. 杆单元自由振动的微分方程式

$$\rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = 0 \quad (5)$$

式中: $v(x, t)$ 是杆截面之横向位移, ρ 是杆的单位体积质量, EI 为杆的截面抗弯刚度, A 为杆的截面积。

利用分离变量法设 $v(x, t) = V(x)T(t)$, 则式(5)的解:

$$V(x) = A \sin kx + B \cos kx + C \sinh kx + D \cosh kx \quad (6)$$

其中: $k^4 = \rho A \omega^2 / EI$, ω 为结构的各阶固有频率。A, B, C, D 为待定常数, 由杆的边界条件决定。

由以下四组杆单元的结点边界条件:

$$\begin{cases} V(0)=1 \\ V'(0)=0 \\ V(1)=0 \\ V'(1)=0 \end{cases}, \begin{cases} V(0)=0 \\ V'(0)=1 \\ V(1)=0 \\ V'(1)=0 \end{cases}, \begin{cases} V(0)=0 \\ V'(0)=0 \\ V(1)=1 \\ V'(1)=0 \end{cases}, \begin{cases} V(0)=0 \\ V'(0)=0 \\ V(1)=0 \\ V'(1)=1 \end{cases} \quad (7)$$

则可得到杆单元振动时的四个振型函数, 它们就是杆单元以杆的固有频率为参数的“约束模态函数”: $V_k v_i(x, p_k)$, $V_k \theta_i(x, p_k)$, $V_k v_j(x, p_k)$, $V_k \theta_j(x, p_k)$ 。

由第一组边界条件可确定 $V_k v_i(x, p_k)$ 的系数

$$\begin{cases} A = -[chkl(\sin kl + shkl) + shkl(\cos kl - chkl)]/\Delta \\ B = [shkl(\sin kl - shkl) - chkl(\cos kl - chkl)]/\Delta \\ C = -A \\ D = 1 - B \end{cases} \quad (8-1)$$

由第二组边界条件所决定 $V_k \theta_i(x, p_k)$ 的系数

$$\begin{cases} A = -[shkl(\sin kl + shkl) + chkl(\cos kl - chkl)]/k\Delta \\ B = [chkl(\sin kl - shkl) - shkl(\cos kl - chkl)]/k\Delta \\ C = \frac{1}{K} - A \\ D = -B \end{cases} \quad (8-2)$$

由第三组边界条件所决定 $V_k v_j(x, p_k)$ 的系数

$$\left\{ \begin{array}{l} A = (\sin kl + \operatorname{sh} kl) / \Delta \\ B = (\cos kl - \operatorname{ch} kl) / \Delta \\ C = -A \\ D = -B \end{array} \right. \quad (8-3)$$

由第四组边界条件所决定 $V_k \theta_j(x, p_k)$ 的系数

$$\left\{ \begin{array}{l} A = (\cos kl - \operatorname{ch} kl) / k \Delta \\ B = (\sin kl - \operatorname{sh} kl) / k \Delta \\ C = -A \\ D = -B \end{array} \right. \quad (8-4)$$

在(8-1)~(8-4)式中; $\Delta = \sin^2 kl - \operatorname{sh}^2 kl + (\cos kl - \operatorname{ch} kl)^2$ 由此可得“第k阶动态形函数矩阵”

$$[N_{kv}(x, p_k)] = [N_{kv_i}(x, p_k) N_{kv_\theta}(x, p_k) N_{kv_j}(x, p_k) N_{kv_\theta j}(x, p_k)] = 0 \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \text{式中: } N_{kv_i} &= V_{kv_i}, & N_{kv_\theta} &= V_{kv_\theta}, & N_{kv_j} &= V_{kv_j} \\ N_{kv_\theta j} &= V_{kv_\theta j} \end{aligned}$$

p_k 为杆的第K阶固有频率。由此可知, 经典的杆单元静态形函数矩阵也可称为“零阶动态形函数矩阵”, 而其它各阶动态形函数矩阵必须在求出各阶固有频率时才能求得。

2. 杆的纵向振动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = b^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (10)$$

$$\text{式中: } b = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

利用分离变量法可设 $u(x, t) = U(x)T(t)$, 式(10)的解为:

$$U(x, p_k) = A \sin \frac{p_k x}{b} + B \cos \frac{p_k x}{b} \quad (11)$$

边界条件:

$$\left\{ \begin{array}{l} U(0) = 1 \\ U(1) = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} U(0) = 0 \\ U(1) = 1 \end{array} \right. \quad (12)$$

可得到杆件纵向振动时的两个动约束模态函数 $U_i(X, p_k)$ 和 $U_j(X, p_k)$, 则杆件纵向振动的第K阶动态形函数为:

$$\left\{ \begin{array}{l} N_{ki}(x, p_k) \equiv U_i(x, p_k) \\ N_{kj}(x, p_k) \equiv U_j(x, p_k) \end{array} \right. \quad (13)$$

由此可得到平面刚架单元的动态形函数矩阵为:

$$[N_k(x, p_k)] = \begin{pmatrix} N_k l_1(x, p_k) & 0 & 0 & N_k l_1(x, p_k) \\ 0 & N_k v_1(x, p_k) & N_k \theta_1(x, p_k) & 0 \\ 0 & 0 & N_k v_1(x, p_k) & N_k \theta_1(x, p_k) \end{pmatrix} \quad (14)$$

其中 p_k 是刚架的固有频率 ($k = 0, 1, 2, \dots, n$)

三、平面刚架结构动态性的计算

杆件单元中任一截面之位移可用单元的动态形函数矩阵与其结点座标的乘积表示:

$$\{u(x, t)\} = [N_k(x, p_k)] \{q_N(t)\}^* \quad (15)$$

式中: $\{q_N(t)\}^*$ 为单元的约束模态座标, 且有: $\{q_N(t)\}^* = [u_1(t) \quad v_1(t) \quad \theta_1(t)$

$$u_i(t) \quad v_i(t) \quad \theta_i(t)]^T \quad (16)$$

而刚架单元的“第 k 阶刚度矩阵”与“第 k 阶质量矩阵”可表示为:

$$[K_k^*] = \int_0^l [B_k]^T [D] [B_k] dx$$

$$[M_k^*] = \rho A \int_0^l [N_k]^T [N_k] dx \quad (17)$$

式中: $k = 0, 1, 2, \dots, n$

系统的特征方程为:

$$([K_k] - p^2 [M_k]) \{A\} = \{0\} \quad (18)$$

用递推法可求得结构的各阶特征值, 首先用系统的 0 阶特性矩阵 $[K_0]$ 和 $[M_0]$ 求出一阶特征值 p_1 的近似值 P_1^0 , 把 P_1^0 代入 (8), (9), (13), (14) 式及 (17) 式用数值积分法计算出结构一阶特性矩阵 $[K_1^*]$, $[M_1^*]$, 再由直接刚度法得到系统的一阶刚度矩阵和质量矩阵 $[K_1]$, $[M_1]$ 代入式 (18) 得:

$$([K_1] - P_1^2 [M_1]) \{A\} = \{0\} \quad (19)$$

求解 (19) 式可得到一阶精确特征值 P_1^* 和二阶近似特征值 P_2^0 ; 将 P_1^* 代入 (19) 可得到一阶精确的特征向量 $\{A^1\}^*$. 利用 P_2^0 重复以上过程可得 P_2^* 和 $\{A^2\}^*$; P_3^* 和 $\{A^3\}^* \dots$. 同时可求出各阶动态形函数矩阵 $[N_k(x, p_k)]$.

四、结构动应力计算

结构在激振力的作用运动微分方程式为:

$$[M_0] \ddot{\{q\}} + [C_0] \dot{\{q\}} + [K_0] \{q\} = \{f(t)\} \quad (20)$$

解方程 (20) 对应的齐次方程式可求得主模态矩阵 $[A]$ 令 $\{q\} = [A] \{q_N\}$ 代入 (20) 并左乘 $[A]^T$ 使式 (20) 解耦得:

$$\begin{pmatrix} \diagup M \diagdown \end{pmatrix} \ddot{\{q_N\}} + \begin{pmatrix} \diagup C \diagdown \end{pmatrix} \dot{\{q_N\}} + \begin{pmatrix} \diagup K \diagdown \end{pmatrix} \{q_N\} = \{Q(t)\} \quad (21)$$

式中:

$$\begin{pmatrix} \diagup M \diagdown \end{pmatrix} = [A]^T [M] [A]$$

$$\begin{Bmatrix} C \\ \diagup \end{Bmatrix} = [A]^T [C] [A]$$

$$\begin{Bmatrix} K \\ \diagup \end{Bmatrix} = [A]^T [K] [A]$$

$$\{Q(t)\} = [A]^T \{f(t)\}$$

由(20)式求出 $\{q_N(t)\}$ 后,再由 $\{q\} = [A]\{q_N(t)\}$ 求出 $\{q\}$ 则:

$$\{q(t)\} = [A]\{q_N(t)\} = q_{N1}\{A^1\} + q_{N2}\{A^2\} + \cdots q_{Na}\{A^a\} = \{q_1\} + \{q_2\} + \cdots \{q_k\} \quad (22)$$

显然 $\{q_k\}$ 为在激励下结构的第K阶主振动的结点位移响应。它乘以第K阶动态形函数矩阵 $[N_k(x, p_k)]$ 即可得到相应的应力分量 $\{\sigma_k\}$ 即:

$$\{\sigma_k\} = [D][B_k]\{q_k\} \quad (23)$$

其中:

$$[D] = \begin{pmatrix} EA & 0 \\ 0 & EI \end{pmatrix}$$

$$[B_k] = \begin{pmatrix} \frac{\partial N_k l_i}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial N_k l_j}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2 N_k v_i}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 N_k \theta_i}{\partial x^2} & 0 & \frac{\partial^2 N_k v_j}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 N_k \theta_j}{\partial x^2} \end{pmatrix} \quad (24)$$

$\{\sigma_k(x)\}$ 称为系统在激励 $\{f(t)\}$ 作用下的“第K阶模态应力”,其结构的总应力应为各阶模态应力之分量和,即:

$$\{\sigma(x)\} = \sum_{k=1}^n \{\sigma_k(x)\} \quad (25)$$

五、计算机计算过程

(1) 利用有限元形成第0阶刚度阵 $[K_0]$ 和质量阵 $[M_0]$ 求 P_1^0 ;

(2) 由 P_1^0 形成 $[K_1]$ 和 $[M_1]$ 求出精确的 P_1^* 和 $\{A^{(1)}\}$ 及 P_2^0 ;

(3) 利用 $\{A^{(1)}\}$ 可得单自由度的强迫振动方程;

$$M_1 \ddot{q}_{N1} + C_1 \dot{q}_{N1} + K_1 q_{N1} = Q_1(t) \quad (26)$$

式中:

$$M_1 = \{A^{(1)}\}^T [M] \{A^{(1)}\}$$

$$C_1 = \{A^{(1)}\}^T [C] \{A^{(1)}\}$$

$$K_1 = \{A^{(1)}\}^T [K_1] \{A^{(1)}\}$$

$$Q_1 = \{A^{(1)}\}^T \{f(t)\}$$

利用数值积分即可求出 $q_{N1}(t)$,进而求出第一阶主振型结点位移矢量 $\{q_1\} = q_{N1} \{A^{(1)}\}$ 由此得第一阶主模态应力分量 $\{\sigma_1\} = [D][B_1]\{q_1\}$

(4) 重复上述过程求出 P_k^* 和 $\{A^{(k)}\}$ 后可得:

$$M_k \ddot{q}_{Nk} + C_k \dot{q}_{Nk} + K_k q_{Nk} = Q_k(t) \quad (27)$$

解出 $p_{Nk}(t)$ 后可得:

$$\{q_k\} = q_{Nk}\{A^{(k)}\} \quad (28)$$

$$\{\sigma_k\} = [D][B_k][q_k] \quad (29)$$

将各阶主模态应力分量求和便可得到所求的动应力的近似值:

$$\{\sigma\} = \sum_{k=1}^n \{\sigma_k\} \quad (30)$$

六、实例计算成果分析

利用以上各阶动态形函数矩阵及各阶单元特性表达式针对M—50型摩托车车架进行了计算, 整个车架被划分成60个计算单元, 并施加 $1000\sin 2000t$ 牛顿的激励得出每个单元中点的广义轴向应力 σ_N 和广义弯曲应力 σ_M , (见成果表1)和 $T=0.1$ 秒时的车架广义轴向应力 σ_N 图1, 广义弯曲应力 σ_M 图2, ($T=0.4$ 秒和 $T=0.7$ 秒时的应力图从略), 以及一阶和三阶振型图3, 图4(高阶振型图从略)。

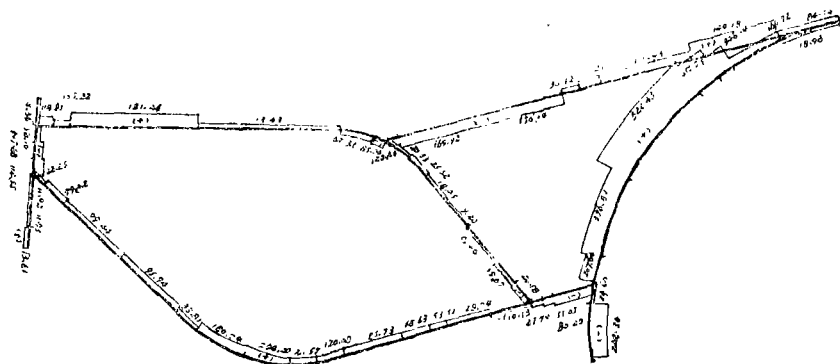


图1. $T=0.1$ 秒的单元中点广义轴向应力 σ_N 图 单位: 牛顿/厘米²

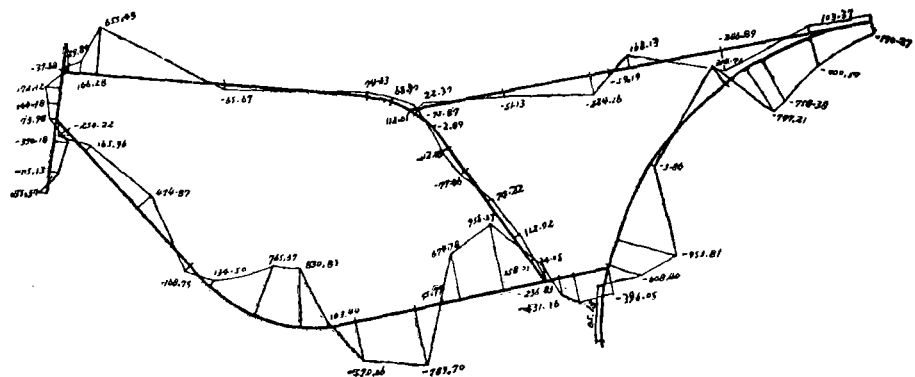


图2. $T=0.1$ 秒的单元中点广义弯曲应力 σ_M 图单位: 牛顿/厘米²

表1 摩托车车架每个计算单元中点广义轴向应力 σ_N 和广义弯曲应力 σ_M 成果表
(牛顿/厘米², 拉为正, 压为负)

单元 编号	t=0.1s		t=0.4s		t=0.7s		单元 编号	t=0.1s		t=0.4s		t=0.7s	
	σ_N	σ_M	σ_N	σ_M	σ_N	σ_M		σ_N	σ_M	σ_N	σ_M	σ_N	σ_M
1	-472.12	-362.53	160.52	388.84	503.00	708.62	31	25.52	-2.89	14.52	-14.84	12.67	21.89
2	58.49	345.10	-101.13	-251.22	-123.90	-435.62	32	20.33	112.61	8.16	-16.42	28.26	-164.00
3	216.94	432.92	-133.42	-153.04	-323.84	-558.18	33	-85.36	68.90	59.01	-1.57	182.11	-128.32
4	-27.74	-236.83	-32.04	102.48	-2.44	260.03	34	-62.32	74.63	49.84	-9.45	149.40	-130.22
5	-51.05	-451.16	-23.96	116.78	1.55	418.25	35	13.43	-65.67	17.17	25.79	35.00	122.75
6	-80.20	-396.05	-14.04	39.54	31.47	322.85	36	181.46	655.43	-64.88	-374.99	-247.78	-94.41
7	166.63	5.63	-6.53	3.77	-199.41	21.52	37	107.22	166.28	-40.74	-61.64	-154.00	-224.93
8	-576.82	436.63	333.77	-267.82	724.92	-521.79	38	118.91	29.80	-31.34	-15.4	-133.44	-75.34
9	-242.86	65.18	144.87	-129.78	356.06	-169.62	39	-8.36	-37.38	2.67	13.55	24.40	48.96
10	-24.67	-608.40	36.39	216.60	100.63	504.66	40	-98.10	172.12	31.96	-61.16	203.40	-280.70
11	207.6	-953.81	-115.43	332.49	-219.42	861.08	41	-107.68	144.98	35.19	-47.76	234.03	-263.59
12	376.81	-5.86	-213.99	173.73	-454.03	161.49	42	-112.55	73.98	37.23	-13.51	252.35	-177.62
13	522.43	314.71	-277.75	-172.16	-611.18	-489.17	43	11.92	-350.18	-16.89	78.52	102.04	337.88
14	455.87	-777.21	-251.26	375.77	-493.84	638.26	44	11.95	-115.13	-15.49	54.96	113.59	164.00
15	348.14	-753.38	-202.51	398.03	-356.97	683.38	45	13.61	135.34	-17.43	31.38	116.11	-21.43
16	160.72	-60.57	-112.82	267.30	-122.58	47.99	46	62.25	-250.22	-12.94	0.71	-50.31	262.48
17	-18.96	-190.27	-22.92	137.18	99.00	229.16	47	79.42	165.36	-23.07	-154.99	-72.49	-267.77
18	84.54	103.37	-3.03	-86.35	-183.65	-123.32	48	99.44	474.87	-33.23	-238.34	-102.60	-704.28
19	140.18	-246.89	-34.08	216.03	-241.42	220.39	49	95.94	-168.75	-33.69	111.76	-107.24	205.42
20	115.96	168.13	-69.17	-66.69	-131.64	-195.25	50	38.81	134.50	-7.31	-50.1	-44.80	-161.88
21	71.25	-59.19	-59.13	55.97	-58.25	104.79	51	180.74	765.67	-41.00	-309.05	-212.32	-923.21
22	38.92	-224.16	-47.42	136.38	-11.61	322.40	52	244.20	830.81	-52.82	-388.96	-28.62	-996.56
23	-156.14	-51.53	42.00	-8.37	223.35	42.13	53	211.57	103.44	-37.71	-117.14	-242.66	-100.98
24	-169.92	22.37	76.93	-21.43	245.67	-30.00	54	120.08	-570.66	2.45	183.26	-130.83	725.09
25	-120.40	-75.87	69.23	16.16	181.89	100.32	55	85.73	-789.70	21.91	356.77	-93.99	987.10
26	-24.58	34.05	14.81	-52.21	11.89	-22.92	56	68.63	55.77	26.85	70.14	-83.96	-31.52
27	-19.67	112.92	17.09	-58.07	11.38	-150.88	57	53.51	674.78	31.21	-200.30	-72.41	-766.29
28	-6.48	74.22	18.90	-11.31	7.90	-110.18	58	28.94	956.27	39.53	-392.16	-51.87	-109.04
29	9.20	-77.46	19.12	36.1	7.09	128.06	59	-10.13	258.01	54.23	-193.38	-17.10	-279.12
30	18.45	-112.46	17.73	19.41	10.22	195.56	60	149.94	83.71	-64.54	-57.49	-207.07	-105.91

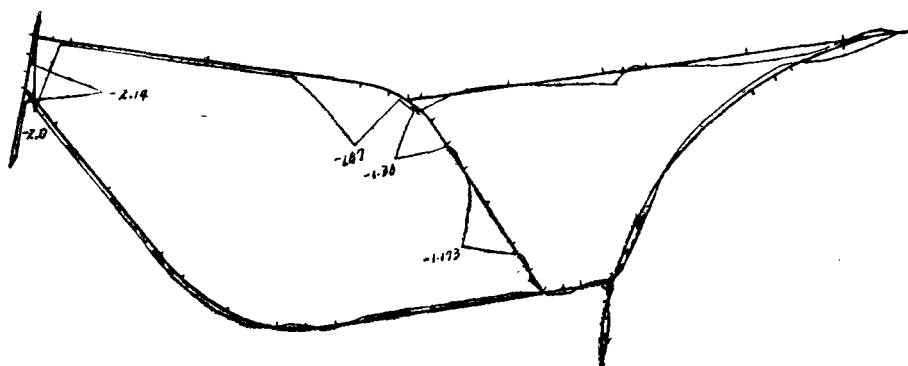


图3.一阶振型图

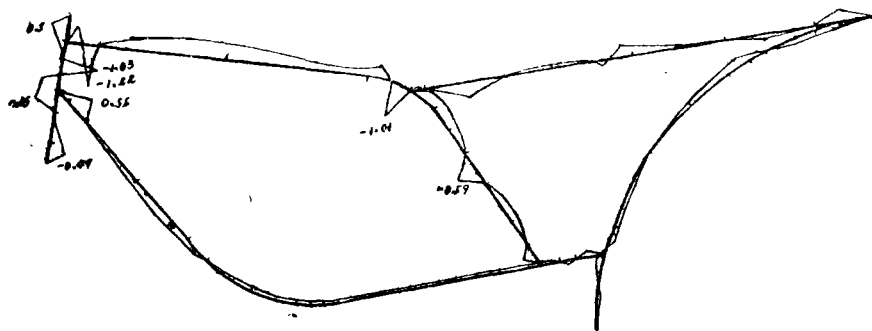
单位: $\times 10^4$ 厘米

图4.三阶振型图

单位: $\times 10^4$ 厘米

主要成果分析

当激励为 $1000\sin 2000t$ 牛顿时的单元中点最大广义轴向应力 σ_{Mmax} 和最大弯曲应力 σ_{Mmax} 见下表2:

表2: 单位: 牛顿/厘米², + 为拉, - 为压

时 间	σ_{Nmax}^+		σ_{Nmax}^-		σ_{Mmax}^+		σ_{Mmax}^-	
(秒)	单元号	数值	单元号	数值	单元号	数值	单元号	数值
T=0.1	13	522.43	21	169.92	58	956.27	11	953.81
T=0.4	9	144.87	13	277.75	16	398.03	58	392.00
T=0.7	9	356.06	13	611.18	11	861.08	58	1098.04

表 3: 各阶固有频率值 单位: 赫兹

阶次	数值	阶次	数值	阶次	数值	阶次	数值	阶次	数值
2	108.94	8	354.60	14	704.80	20	1102.87	26	1623.96
4	186.82	10	461.32	16	794.46	22	1208.09	28	1784.29
6	287.53	12	583.40	18	910.68	24	1393.81	30	1920.46

一阶固有频率的最大竖直位移出现在38单元截面上, 为 -2.01×10^{-4} 厘米;

二阶固有频率的最大竖直位移出现在37单元截面上, 为 1.423×10^{-4} 厘米;

四阶固有频率的最大竖直位移出现在47单元截面上, 为 2.717×10^{-4} 厘米; (其余略)

七、结 论

通过以上论述和实例计算, 可得出以下结论:

1. 该方法, 对于刚架系统, 由于各阶动态形函数, 是其单元振动微分方程的精确解。因此, 只要计算单元粗细划分合理, 并计算到足够的高阶模态分量, 即可得到所要求的比较精确的应力响应。

2. 本方法是根据有限单元的各阶动态形函数矩阵求出各阶模态应力分量, 然后再求得结构的应力响应。因此, 也适合于其它结构的计算应用。

3. 车架上的应力主要有广义轴向应力 σ_N 和广义弯曲应力 σ_M 组合而成, 各截面一般是 $\sigma_M > \sigma_N$, 因此要注意车体各部分抗弯刚度的提高。

参 考 文 献

- (1) 王文亮 杜作润, 结构振动与动态子结构方法 复旦大学出版社
- (2) 约翰M·比格斯 结构动力学 姚玲森译 人民交通出版社
- (3) A·格哈利 结构分析 人民铁道出版社
- (4) Yin Xuegang; Chen Huai

A New Dynamic FEM of Frames Developed From Timoshenko Beam Model

4th IMAC 1986, U.S.A

THE DYNAMIC ANALYSIS OF MOTOR—CYCLE FRAME USING DYNAMIC FINITE ELEMENT METHOD

Lan Zhen—kai

Liu Min—shan

(Zhengzhou Institute of Technology)

Abstract

The each order plane rigid frame element dynamic shape function matrix and each order element characteristics, which is composed of each order dynamic constraint mode function, are adopted in this paper. with them, the each order dynamic characteristics and each order dynamic displacement components and dynamic stress components are calculated out very accurately for motor—cycle subjected to all kinds of loads. At last, the responses of dynamic displacements and dynamic stresses are obtained with compositing method.

key words: finite element, dynamic structural analysis