

调压室最大涌浪值的新计算方法

季 奎 赵世圉 孟春浦

(水利系)

提 要

本文采用能量守恒原理计算调压室最大涌浪值,推导出双室式及差动式调压室的最大涌浪值的计算公式,并用新公式与解析法对一些具体实例进行了计算结果比较。

关键词: 差动式调压室, 双室调压室, 涌浪。

一、差动式调压室的最大水位涌浪值

调压室内最大涌浪值是决定调压室高度的重要数据,除简单园筒式及阻抗式调压室能用微分方程进行理论推导可求出最大涌浪的计算公式外,其它类型的调压室只能用半经验公式来求最大涌浪值,差动式调压室是调压室各类中功效最好的一种,所以在工程实践中被采用的也最多,差动式调压室最大涌浪值的计算,常用vogt建议的半经验公式,vogt公式如下:

$$W = \frac{L f v_0^2}{2 g h_{w0}} \frac{\ln \left[1 + \frac{1}{x_m - 0.15 (x_m - x_b)} \right]}{x_m - 0.3} \cdot \frac{F_{cm}}{(F_{cm} + F_p)} \cdot \frac{1 - \frac{2}{3} \sqrt{\frac{1 + x_m}{\eta_1}}}{2 x_m + 0.3} \quad (1)$$

式中 $x_b = \frac{z_b}{h_{w0}}$ 符号见图1

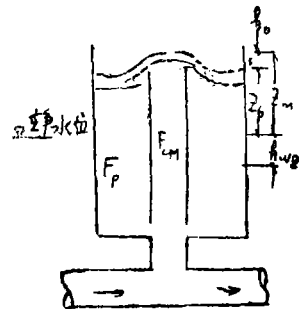


图1

及 $W = F_p (h_{w0} + z_m) \dots \dots (2)$

实际应用时,先假定 z_m 值,用(1)式算得 W 值,如果再用此 z_m 值代入(2)式算得的 W 值与(1)式的 W 值相等,此 z_m 值即为所求之最大涌浪值。这种试算要反复几次方能满足要求。

本文用简单的能量守恒原理,即 $mv^2/2 = mgh$,对差动式调压室的最大涌浪计算公式进行推导,公式形式简单,经过一些具体实例计算与vogt公式相比较,计算结果相差不大,很接近,因此说如果vogt公式能满足工程界的要求,则用能量原理推导出来的计算最大涌浪公式也能满足工程界的要求。

用能量守恒原理推导差动式调压室最大涌浪的基本假定与教科书中解析法的基本假定相

本文1986年12月29日收到。

$$\phi_2(x) = \varphi_3\left(\frac{x}{h} - 2\right)$$

.....

$$\phi_{N-2}(x) = \varphi_3\left(\frac{x}{h} - N + 2\right)$$

$$\phi_{N-1}(x) = \varphi_3\left(\frac{x}{h} - N + 1\right) - \frac{1}{2}\varphi_3\left(\frac{x}{h} - N\right) + \varphi_3\left(\frac{x}{h} - N - 1\right)$$

$$\phi_N(x) = \varphi_3\left(\frac{x}{h} - N\right) - 4\varphi_3\left(\frac{x}{h} - N - 1\right)$$

$$\phi_{N+1}(x) = \varphi_3\left(\frac{x}{h} - N - 1\right)$$

$\phi_i(x)$ 具有这样的特点:

$$\phi_i(0) = 0, \quad (i \neq -1); \quad \phi'_i(0) = 0, \quad (i \neq 0, -1)$$

$$\phi_i(a) = 0, \quad (i \neq N+1); \quad \phi'_i(a) = 0, \quad (i \neq N, N+1)$$

上述特点给处理边界条件带来很大的方便。

$z_m = z_m(y)$ 取为满足端点支承条件的梁振型函数。比如, $y=0$ 及 $y=b$ 均为简支, z_m 取为

$$z_m(y) = \sin \frac{m\pi y}{b} \quad m=1, 2, \dots, M \quad (2)$$

其他支承条件的梁振型函数见文献[5]。

在小变形情况下, 薄板的总势能泛函为

$$\begin{aligned} \Pi = \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a D \{ (\nabla^2 w)^2 - 2(1-\mu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right. \right. \\ \left. \left. - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \} dx dy - \int_0^b \int_0^a q w dx dy \end{aligned} \quad (3)$$

式中弯曲刚度 D 是 x 的函数。为了简化计算, 经样条结点将板分成 N 个板条, 取各条的平均厚度, 分别计算每个板条的形变势能, 然后累加, 则 (3) 式可以表示为

$$\begin{aligned} \Pi = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \int_0^b \int_{(k-1)h}^{kh} \bar{D}_k \{ (\nabla^2 w)^2 - 2(1-\mu) \\ \times \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \} dx dy - \int_0^b \int_0^a q w dx dy \end{aligned} \quad (4)$$

式中 \bar{D}_k 为第 K 条的弯曲刚度, 即

$$\bar{D}_k = \frac{E \bar{t}_k^3}{12(1-\mu^2)}, \quad \bar{t}_k \text{—第 } K \text{ 条的平均厚度}$$

利用最小势能原理 $\delta II = 0$, 可得以样条结点参数为未知量的线性方程组。采取对级数各项分别计算的办法, 方程组的形式为

$$[G]_m \{r\}_m = \{f\}_m \quad m = 1, 2, \dots, M \quad (5)$$

利用梁振型函数的正交性可以证明, 对于 $y = 0$ 及 $y = b$ 均为简支的情况, 上式是精确的, 其他情况是近似的, 但计算实践表明, 按式 (5) 进行计算具有足够的精度^[2]。

刚度矩阵 $[G]_m$ 由下式确定:

$$[G]_m = \sum_{k=1}^N \overline{D}_k (F_z [A_x^K] + \mu B_z ([B_x^K] + [B_x^K]^T) + 2(1-\mu) C_z [C_x^K] + A_z [F_x^K]) \quad (6)$$

式中 $[A_x^K]$ 、 $[B_x^K]$ 、 $[C_x^K]$ 及 $[F_x^K]$ 为下列矩阵:

$$[A_x^K] = \int_{(k-1)h}^{kh} [\phi'']^T [\phi''] dx$$

$$[B_x^K] = \int_{(k-1)h}^{kh} [\phi]^T [\phi''] dx$$

$$[C_x^K] = \int_{(k-1)h}^{kh} [\phi']^T [\phi'] dx$$

$$[F_x^K] = \int_{(k-1)h}^{kh} [\phi]^T [\phi] dx$$

各矩阵的具体形式已在文献[9]中算出, 见附录。 A_z 、 B_z 、 C_z 及 F_z 为下列常数:

$$A_z = \int_0^b z''_m z''_m dy \quad B_z = \int_0^b z_m z''_m dy$$

$$C_z = \int_0^b z'_m z'_m dy \quad F_z = \int_0^b z_m z_m dy$$

上述各常数可利用文献[5]查得。

荷载列阵 $\{f\}_m$ 由下式确定:

$$\{f\}_m = \int_0^b \int_0^a [\phi]^T z_m q dx dy \quad (7)$$

求解方程组 (5), 即得样条结点参数, 然后利用相应公式不难计算板的挠度和内力。

二、振 动 问 题

对于自由振动问题, 板的位移可表示为

$$w_t(x, y, t) = w(x, y) \cos(\omega_t t + \varphi) \quad (8)$$

式中 $w(x, y)$, 与式 (1) 相同。

与弯曲问题相仿, 可将板的总势能泛函表示为:

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{\pi}{2\omega} \times \sum_{k=1}^N \int_0^b \int_{(k-1)h}^{kb} \{ \overline{D}_k \{ (\nabla^2 w)^2 - 2(1-\mu) \\ & \times [\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - (\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y})^2] \} - \rho \overline{t}_k \omega^2 w^2 \} dx dy \end{aligned} \quad (9)$$

利用哈密顿原理 $\delta \Pi = 0$, 可得动力方程。对于振动问题, 级数各项不存在偶联问题, 动力方程可表示为:

$$[G]_m \{r\}_m = \omega^2 [M]_m \{r\}_m \quad m=1, 2, \dots, M \quad (10)$$

式中刚度矩阵 $[G]_m$ 与 (6) 式相同。质量矩阵由下式确定

$$[M]_m = \sum_{k=1}^N \rho \overline{t}_k F_Z [F]_x^k \quad (11)$$

求解方程 (10), 即得板的自振频率和相应的振型。

三、边界条件的处理

本文将板的位移函数表示为三次样条函数与梁振型函数的乘积形式, 利用位移变分原理建立系统方程, 自然边界条件已自动满足, 位移边界条件也能方便地满足。

根据 $\phi_i(x)$ 的特点, 可对基函数进行适当处理, 使其满足 $x=0$ 及 $x=a$ 处的约束条件^[6]。例如, $x=0$ 为简支边, 则划去 $\phi_{-1}\phi_{-1}(x)$ 及各矩阵中对应的第一行、第一列; $x=H$ 为固定边, 则划去 $\phi_N(x)$ 、 $\phi_{N+1}(x)$ 及各矩阵的末两行、末两列, 其余类推。不同支承条件可利用程序方便地处理。

四、算 例

例1、四边简支的变厚度方板, 承受静水压力^[4], 如图2, 泊松比 $\mu=0.25$, 求其挠度和弯矩。本例将板分成6条

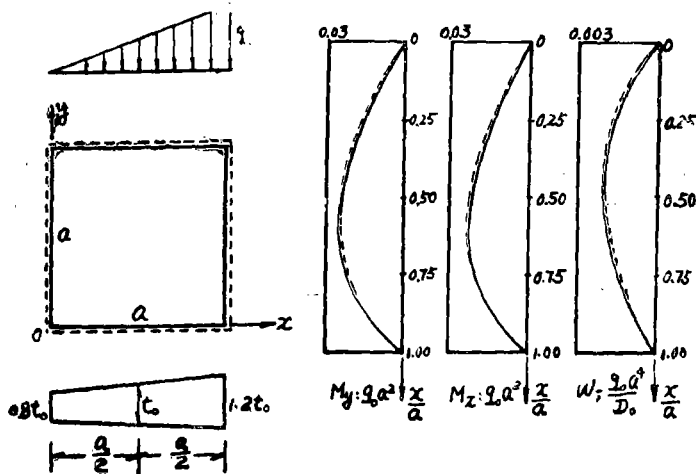


图 2

图 3

($N=6$), $Z_m(y)$ 取为式 (2) 的前三项 ($m=1, 3, 5$) 划去 $\phi_{-1}(x)$ 、 $\phi_{N+1}(x)$ 及其各矩阵对应的第一行、一列及末一行、一列, 求解的方程组为 7 阶, 利用 PC-1500 袖珍机计算, 结果如图 3 所示, 与文献 [4] 的级数解十分吻合 (图中虚线为文献 [4] 结果)。

例2、对边简支、对边固支的变厚度方板, 如图4, $\mu=0.3$, 求其自振频率。本例分条数 $N=10$, 求解的动力方程为 9 阶, 结果列于表 1。

表 1. 对简、对固, 变厚度方板的自振频率 ($-\frac{1}{a^2} \sqrt{\frac{D_0}{\rho t_0}}$)

阶 次	1	2	3	4	5	6
半 波 数	1-1	2-1	1-2	2-2	3-1	1-3
文献[7]	33.011	62.763	79.382	108.551	117.474	
本文(N=10)	33.183	62.700	79.466	108.450	116.809	148.095

例3、四边简支的变厚度方板, 如图5, $\mu = 0.3$, 求其自振频率, 结果列于表2。

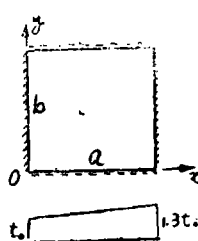


图 4

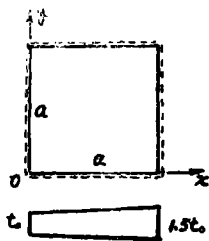


图 5

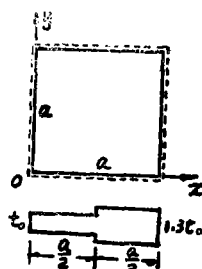


图 6

表 2. 四边简支、变厚度方板的自振频率 ($\frac{1}{a^2} \sqrt{\frac{D_0}{\rho t_0}}$)

阶 次	1	2	3	4	5	6
半波数	1-1	2-1	1-2	2-2	3-1	1-3
文献[7]	24.563					
本文(N=10)	24.562	61.033	61.267	98.166	120.883	122.437

例4、四边简支的阶梯状方板, 如图6, $\mu = 0.3$, 求其自振频率, 结果列于表3。

表 3. 四边简支、阶梯方板的自振频率 ($\frac{1}{a^2} \sqrt{\frac{D_0}{\rho t_0}}$)

阶 次	1	2	3	4	5	6
半波数	1-1	2-1	1-2	2-2	3-1	1-3
文献[8]	22.147					
本文(N=10)	22.534	56.300	56.839	90.564	110.663	111.878

五、结 语

本文为单向变厚度板的弯曲和振动问题建立了样条半解析格式,方法简便,容易在微机、袖珍机上实现。实例计算表明,精度高,收敛性好,因而是一个经济实用的方法。

本文方法同样适用于变厚板的稳定分析。并可进一步推广应用于变厚度、非规则板的计算。

附录: $[A_x^K]$ 、 $[B_x^K]$ 、 $[C_x^K]$ 、 $[F_x^K]$ 的具体形式

文献[9]已算出 $[A_x^K]$ 、 $[B_x^K]$ 、 $[C_x^K]$ 及 $[F_x^K]$ ($N \geq 1$), 各矩阵均为 $(N+3)$ 阶方阵。根据三次B样条的紧凑性, 每个矩阵只含一个非零4阶子阵, 其余元素均为零。非零子阵的位置与K有关, 如下图所示:

K列

(K+3)列

$$\left[\begin{array}{cccc} 0 & & & 0 \\ & \times & \times & \times \\ & & \times & \times \\ & & & \times \\ & \times & \times & \times \\ & & \times & \times \\ & & & \times \\ 0 & & & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} \text{K行} \\ \\ \\ (K+3)\text{行} \\ (N+3)(N+3) \end{array}$$

各非零子阵的具体形式如下:

(一) $[A_x^K]$ ($K=1, 2, \dots, N$)

$$[A_x^1] = \frac{1}{h^3} \times$$

$$\left[\begin{array}{cccc} \frac{1}{3} & -\frac{11}{6} & \frac{7}{12} & \frac{1}{6} \\ & \frac{31}{3} & -\frac{23}{6} & -\frac{2}{3} \\ & & \frac{31}{12} & -\frac{1}{3} \\ & & & \frac{1}{3} \end{array} \right] \begin{array}{l} \text{对} \\ \text{称} \end{array}$$

$$[A_x^2] = \frac{1}{h^3} \times$$

$$\left[\begin{array}{cccc} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{6} \\ & \frac{19}{12} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{12} \\ & & 1 & -\frac{1}{2} \\ & & & \frac{1}{3} \end{array} \right] \begin{array}{l} \text{对} \\ \text{称} \end{array}$$

当 $K=3, 4, \dots, N-2$ 时,

$$[A_x^K] = \frac{1}{h^3} \times$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{6} \\ & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ \text{对} & & 1 & -\frac{1}{2} \\ \text{称} & & & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$[A_x^{N-1}] = \frac{1}{h^3} \times$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{6} \\ & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ \text{对} & & \frac{19}{12} & -\frac{2}{3} \\ \text{称} & & & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

(二) $[B_x^K] (K=1, 2, \dots, N)$

$$[A_x^N] = \frac{1}{h^3} \times$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ & \frac{31}{12} & -\frac{23}{6} & \frac{7}{12} \\ \text{对} & & \frac{31}{3} & -\frac{11}{6} \\ \text{称} & & & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$[B_x^1] = \frac{1}{h} \times$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{30} & -\frac{23}{120} & \frac{19}{240} & \frac{1}{120} \\ \frac{17}{120} & -\frac{7}{10} & \frac{1}{20} & \frac{3}{20} \\ \frac{19}{240} & -\frac{17}{60} & -\frac{29}{120} & \frac{23}{120} \\ \frac{1}{120} & -\frac{1}{60} & -\frac{7}{120} & \frac{1}{30} \end{pmatrix}$$

当 $K=3, 4, \dots, N-2$ 时,

$$[B_x^2] = \frac{1}{h} \times$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{30} & -\frac{3}{40} & \frac{1}{60} & \frac{1}{120} \\ \frac{31}{120} & -\frac{7}{15} & -\frac{1}{10} & \frac{43}{240} \\ \frac{11}{60} & -\frac{11}{60} & -\frac{11}{30} & \frac{11}{40} \\ \frac{1}{120} & \frac{1}{80} & -\frac{7}{120} & \frac{1}{30} \end{pmatrix}$$

$$[B_x^K] = \frac{1}{h} \times$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{30} & -\frac{7}{120} & \frac{1}{60} & \frac{1}{120} \\ \frac{11}{40} & -\frac{11}{30} & -\frac{11}{120} & \frac{11}{60} \\ \frac{11}{60} & -\frac{11}{120} & -\frac{11}{30} & \frac{11}{40} \\ \frac{1}{120} & \frac{1}{60} & -\frac{7}{120} & \frac{1}{30} \end{pmatrix}$$

$$[B_x^{N-1}] = \frac{1}{h} \times$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{30} & -\frac{7}{120} & \frac{1}{80} & \frac{1}{120} \\ \frac{11}{40} & -\frac{11}{30} & -\frac{1}{60} & \frac{11}{60} \\ \frac{43}{240} & -\frac{1}{10} & -\frac{7}{15} & \frac{31}{120} \\ \frac{1}{120} & \frac{1}{60} & -\frac{3}{40} & \frac{1}{30} \end{bmatrix}$$

$$[B_x^N] = \frac{1}{h} \times$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{30} & -\frac{7}{120} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{120} \\ \frac{23}{120} & -\frac{29}{120} & -\frac{17}{60} & \frac{19}{240} \\ \frac{3}{20} & \frac{1}{20} & -\frac{7}{10} & \frac{17}{120} \\ \frac{1}{120} & \frac{19}{240} & -\frac{23}{120} & \frac{1}{30} \end{bmatrix}$$

$$(三) [C_x^K] (K=1, 2, \dots, N)$$

$$[C_x^1] = \frac{1}{h} \times$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{20} & -\frac{17}{120} & -\frac{19}{240} & -\frac{1}{120} \\ & \frac{37}{60} & -\frac{1}{120} & -\frac{1}{15} \\ \text{对} & & \frac{31}{80} & \frac{1}{10} \\ \text{称} & & & \frac{1}{20} \end{bmatrix}$$

$$[C_x^2] = \frac{1}{h} \times$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{20} & \frac{1}{30} & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{120} \\ & \frac{19}{80} & -\frac{23}{120} & -\frac{23}{240} \\ \text{对} & & \frac{17}{60} & \frac{7}{120} \\ \text{称} & & & \frac{1}{20} \end{bmatrix}$$

当 $K=3, 4, \dots, N-2$ 时,

$$[C_x^K] = \frac{1}{h} \times$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{20} & \frac{7}{120} & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{120} \\ & \frac{17}{60} & -\frac{19}{120} & -\frac{1}{10} \\ \text{对} & & \frac{17}{60} & \frac{7}{120} \\ \text{称} & & & \frac{1}{20} \end{bmatrix}$$

$$[C_x^{N-1}] = \frac{1}{h} \times$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{20} & \frac{7}{120} & -\frac{23}{240} & -\frac{1}{120} \\ & \frac{17}{60} & -\frac{23}{120} & -\frac{1}{10} \\ \text{对} & & \frac{19}{80} & \frac{1}{30} \\ \text{称} & & & \frac{1}{20} \end{bmatrix}$$

(四) $[F_x^K] (K=1, 2, \dots, N)$

$$[D_x^N] = \frac{1}{h} \times$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{20} & \frac{1}{10} & -\frac{1}{15} & -\frac{1}{120} \\ & \frac{13}{80} & -\frac{1}{120} & -\frac{19}{240} \\ \text{对} & & \frac{37}{60} & -\frac{17}{120} \\ \text{称} & & & \frac{1}{20} \end{pmatrix}$$

$$[F_x^1] = h \times$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{252} & \frac{7}{720} & \frac{31}{10080} & \frac{1}{5040} \\ & \frac{119}{126} & \frac{203}{2520} & \frac{1}{90} \\ \text{对} & & \frac{563}{5040} & \frac{5}{252} \\ \text{称} & & & \frac{1}{252} \end{pmatrix}$$

当 $K=3, 4, \dots, N-2$ 时,

$$[F_x^2] = h \times$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{252} & \frac{119}{5040} & \frac{1}{84} & \frac{1}{5040} \\ & \frac{133}{630} & \frac{903}{5040} & \frac{119}{10080} \\ \text{对} & & \frac{33}{140} & \frac{129}{5040} \\ \text{称} & & & \frac{1}{252} \end{pmatrix}$$

$$[F_x^K] = h \times$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{252} & \frac{129}{5040} & \frac{1}{84} & \frac{1}{5040} \\ & \frac{33}{140} & \frac{311}{1680} & \frac{1}{84} \\ \text{对} & & \frac{33}{140} & \frac{129}{5040} \\ \text{称} & & & \frac{1}{252} \end{pmatrix}$$

$$[F_x^{N-1}] = h \times$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{252} & \frac{129}{5040} & \frac{119}{10080} & \frac{1}{5040} \\ & \frac{33}{140} & \frac{903}{5040} & \frac{1}{84} \\ \text{对} & & \frac{133}{630} & \frac{119}{5040} \\ \text{称} & & & \frac{1}{252} \end{pmatrix}$$

$$[F_x^N] = h \times$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{252} & \frac{5}{252} & \frac{1}{90} & \frac{1}{5040} \\ & \frac{563}{5040} & \frac{203}{2520} & \frac{31}{10080} \\ \text{对} & & \frac{119}{1260} & \frac{7}{720} \\ \text{称} & & & \frac{1}{252} \end{pmatrix}$$

参 考 文 献

- [1] Y.K. Cheung, Finite Strip Method in Structural Analysis, Pergamon Press, 1976.
[2] Qin Rong, Fundamentals and Applications of Spline Finite-point Method, Proceeding of the International Conference on Finite Element Method, 1982, Shanghai, China.
[3] Wang Fu-ming, Zhou Hong-jun and Lin Gao, Spline Semi-Analytic Solution of Irregular plates, Proceeding of the First World Congress on Computational Mechanics, 1986, Texas USA
[4] S. Timoshenko, S. Woinowsky Krieger, Theory of plates and Shells, 1959.
[5] N.M. 巴巴科夫, 振动理论, 人民教育出版社, 1963.
[6] 石钟慈, 样条有限元, 计算数学1(1979).
[7] 王忠建, 变厚度三角板和矩形板的自由振动, 武汉水利电力学院学报4(1982).
[8] 黄玉盈, 变厚度矩形板的稳定与振动, 力学学报4(1979).
[9] 王复明, 非规则板与薄拱坝的静力及动力计算, 郑州工学院硕士学位论文, 1984.10.

ANALYSIS OF VARIABLE THICKNESS PLATES BY SPLINE SEMI-ANALYTIC METHOD

Wang Fu-ming Zhou Hong-jun Lin Gao
(Zhengzhou Inst. of Technol.) (Dalian Inst. of Technol.)

Abstract

A Semi-analytic approach Capable of analyzing variable thickness plates is presented in this paper. The displacement function of the plate is expressed as a product of the cubic spline and the beam shape function. Then the governing equation Can be obtained by employing the variational principle.

Compared with the finite element method and the finite strip method as well, the main advantage of the present approach is that the computational effort and storage requirement have been greatly saved, and it can conveniently be carried out on a micro-computer or a pocket computer (such as PC-1500). Excellent accuracy has been shown in numerical examples.

Key Words: Variable Thickness plate, Spline Functio, Semi-Analytic Method