

样条半解析法计算变厚度板

王复明 周鸿钧 林 皋

(郑州工学院)

(大连工学院)

提 要

本文将板的位移函数表示为三次样条函数与梁振型函数的乘积形式,利用位移变分原理建立控制方程,为变厚度板的计算提出一个解析半数值方法。与有限元法以及有限条法相比,计算量和内存要求得到显著节省,利用微机或袖珍机(PC-1500)即可方便地实现。数值算例表明,本文方法具有较高的计算精度。

关键词: 变厚度板, 样条函数, 半解析方法。

变厚度板在工程实际中应用广泛。对于这类结构的计算问题,解析方法常常不便处理。有限元方法是结构分析中强有力的数值方法,但计算量较大,内存要求较高。因此,对于变厚度板,较为适用的分析方法是半解析半数值方法。本文以插值性能良好的样条函数和位移变分原理为基础,吸取有限条法对变厚度板的基本处理方法,对样条有限点法进行改进,克服其难以处理变厚度板的不足。与有限元法以及有限条法相比,本文建立的样条半解析格式,计算量和内存要求得到显著节省,求解的方程一般为6~10阶,利用袖珍机(PC-1500)即可方便地实现,因而便于工程技术人员掌握和应用。

一、弯 曲 问 题

对于图1所示的单向变厚度板,在横向荷载作用下,挠曲函数可用下式表示

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^M [\phi] z_m \{r\}_m \quad (1)$$

式中

$$[\phi] = [\phi_{-1} \phi_0 \phi_1 \cdots \phi_{N+1}]$$

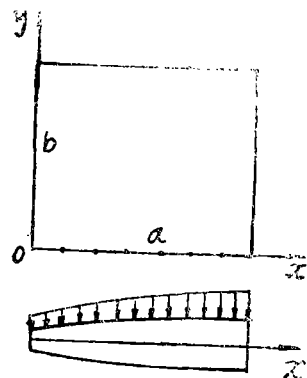
$$\{r\}_m = [r_{-1} \ r_0 \ r_1 \ \cdots \ r_{N+1}]^T$$

$\phi_i = \phi_i(x)$ 是一组由三次B样条构成的基函数[6],
对应于区间 $[0, a]$ 上的 N 等分 ($a = Nh$),

$$\phi_{-1}(x) = \varphi_3\left(\frac{x}{h} + 1\right)$$

$$\phi_0(x) = \varphi_3\left(\frac{x}{h}\right) - 4\varphi_3\left(\frac{x}{h} + 1\right)$$

$$\phi_1(x) = \varphi_3\left(\frac{x}{h} + 1\right) - \frac{1}{2}\varphi_3\left(\frac{x}{h}\right) + \varphi_3\left(\frac{x}{h} - 1\right)$$



同,即:库水位认为不变。忽略水及管壁的弹性,忽略调压室中水头损失,引水道中的水头损失与稳定流时相同,引水道的过水断面不随长度而变化,即 $\partial u/\partial s = 0$,并认为水轮机为突点。

设从阻抗孔口流入外室的流量为 Q_1 ,水体积为 W_1 ,从升管溢入外室的流量为 Q_2 ,水体积为 W_2 。因为升管中水位上升很快,可认为溢流时间与阻抗孔口出流时间相同。则 $\frac{W_1}{W_2} = \frac{Q_1}{Q_2}$

$$\begin{aligned} \text{又 } W_1 &= F_{\text{外}} h_1 & W_2 &= F_{\text{外}} h_2 \\ \text{则 } \frac{h_1}{h_2} &= \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{\mu_1 A \sqrt{2g(h_{w0} + z_m)}}{\mu_1 A \sqrt{2g\eta_1 h_{w0}} \left(1 - \sqrt{\frac{h_{w0} + z_m}{\eta_1 h_{w0}}}\right)} \\ &= \frac{\sqrt{h_{w0} + z_m}}{\sqrt{\eta_1 h_{w0}} - \sqrt{h_{w0} + z_m}} \quad \dots\dots\dots (a) \end{aligned}$$

$$\text{又知 } h_1 + h_2 = h_{w0} + z_m \quad \dots\dots\dots (b)$$

解(a)(b)二式得:

$$h_1 = \frac{(h_{w0} + z_m) \sqrt{h_{w0} + z_m}}{\sqrt{\eta_1 h_{w0}}}$$

$$h_2 = (h_{w0} + z_m) \left(1 - \sqrt{\frac{h_{w0} + z_m}{\eta_1 h_{w0}}}\right)$$

则可根据能量守恒原理写出平衡方程式,经整理后得:

$$\begin{aligned} f l v_0^2 + (F_{\text{外}} + F_{\text{升}}) g h_{w0}^2 &= F_{\text{升}} g (h_{w0} + z_m)^2 + F_{\text{外}} g \frac{(h_{w0} + z_m)^3}{\eta_1 h_{w0}} \\ &+ 2F_{\text{外}} g (h_{w0} + z_m)^2 \left(1 - \sqrt{\frac{h_{w0} + z_m}{\eta_1 h_{w0}}}\right) \end{aligned}$$

此式即为计算差动式调压室最大涌浪的新公式,式中 η_1 为理想式差动调压室的阻抗孔口阻抗系数,与解析法取用值相同,其它符号所代表的意义如图2所示:方程式中只有 z_m 为未知

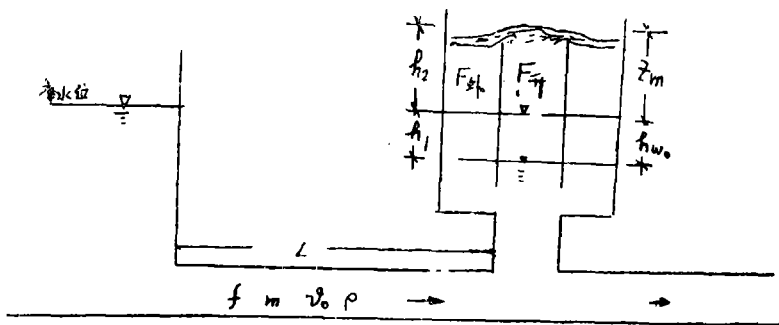


图2

数,因此很容易求出。

表1为一组用计算机计算的结果,本文推荐的公式与常用的解析法(vogt公式)的计算结果相比较是非常接近的,因此本公式完全可以满足工程界的初步设计要求。

表 1

序号	引水道长度	引水道流量	引水道流速	引水道断面面积	升管断面面积	外室断面面积	升管顶部溢流前沿长度	水头损失	用解析法求得第一振幅值	用能量法求得的第一振幅值
	L	Q	V_0	F_1	F_2	F_3	B	h_{w0}	Z_2	Z_3
1	797	200	3.66	28.27	28.27	377	18.84	1.715	6.3	6.4
2	171	57.8	4.6	12.56	12.56	257.91	12.56	1.065	2.7	2.9
3	4500	9	1.27	7.05	7.05	63.785	9.42	2.1	6.2	6.3
4	400	51	2.6	19.625	19.625	103.035	15.7	3.93	3.5	3.4
5	480	73.4	3.46	21.23	21.23	187.34	16.328	0.79	6.4	6.6
6	4500	10.6	1.5	7.065	7.065	70.435	9.42	2.51	6.8	7.0
7	4300	14.14	1.47	9.62	9.62	68.88	10.99	1.6	8.9	8.8
8	3000	22	3.11	7.065	7.065	63.2	9.42	2.15	11	11.3
9	174	44.26	3.52	12.56	12.56	215.91	12.56	0.49	2.6	2.8
10	174	44.26	3.52	12.56	12.56	273.22	12.56	0.49	2.2	2.5
11	584	30	2.39	12.56	12.56	51.025	12.56	0.563	7.9	7.2
12	200	70	5.57	12.56	12.56	241.78	12.56	0.89	4.1	4.5
13	4000	51	2.6	19.625	19.625	103.035	15.7	3.93	16.9	16

二、双室式调压室的最大涌浪值的计算

双室式调压室适用于水电站的水头较高和水库工作深度较大的情况下。水头高则要求调压室的稳定断面小,因此竖井可以采用较小的直径。水库的工作深度大,则要求调压室具有较大的高度,因此采用双室式调压室是比较合理的。

对双室式调压室的结构要求:上室的底部应在最高静水位以上,这样才能充分发挥上室的作用;下室的顶部应在最低静水位以下,其底应在最低涌浪水位以下;上室和下室的底部应有不小于1%的坡倾向竖井,以便放空水;下室的顶部应有不小于1.5%的反坡,当室内水

位上升时, 便于空气逸出。

在满足波动衰减稳定的条件下, 竖井断面小些可以减少整个调压室的工程量, 这是双室式调压室的最大优点。

计算双室式调压室最大涌浪的方法, 以前普遍采用解析公式, 即Frank—schüller公式, 它是适用无溢流堰的简单式上室, 是根据基本公式在负荷全部丢弃时直接积分所得的解,

Frank—schüller公式形式为:

$$e^{2(x_m - x_c)/\varepsilon_c} = \frac{1 + \frac{\alpha x_m}{\varepsilon_c}}{1 - \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_c} [1 - e^{2(x_c - 1)/\varepsilon_s}]} \quad (1)$$

式中: $x_m = \frac{z_m}{h_{w0}}$ z_m 为最大水位上升值,

$x_c = \frac{z}{h_{w0}}$ z 为静水位至上室底的距离。

$$\varepsilon_s = \frac{L f v_0^2}{g F_c h_{w0}}$$

$$\varepsilon_c = \frac{L f v_0^2}{g F_c h_{w0}} = \varepsilon_s \cdot \frac{F_s}{F_c}$$

其它符号见图3。

当已知上室断面面积 F_c 时通过公式可求出最高水位 x_m , 或相反, 当规定 x_m 时可求 ε_c , 由 ε_c 再求 F_{c0} 。

Frank—schüller公式虽是由基本方程严格推导而来, 但计算十分不便。为了能近似估算而且简化计算过程, 因此将上式进行简化; 假定忽略竖井断面 ($F_s = 0$), 而且认为上室的整个体积 W 上处在 z_m 的高度范围之内, 则可得下式

$$W_{上} = \frac{1 f v_0^2}{2 g h_{w0}} \ln \left(1 + \frac{h_{w0}}{z_m} \right)$$

设上室断面为 A , 则 $A \cdot Z_m = W_{上}$ 因此

$$Z_m = \frac{1 f v_0^2}{2 g h_{w0} A} \ln \left(1 + \frac{h_{w0}}{z_m} \right) \quad (2)$$

用试算即可求解所需的 Z_m 值。

当然亦可用图解法或数值积分法求双室式调压室的最大水位涌浪。

现介绍用能量守恒原理 ($m v_0^2 / 2 = m g h$) 来求双室式调压室的最大水位涌浪。其基本假定与优点在上边已有叙述。

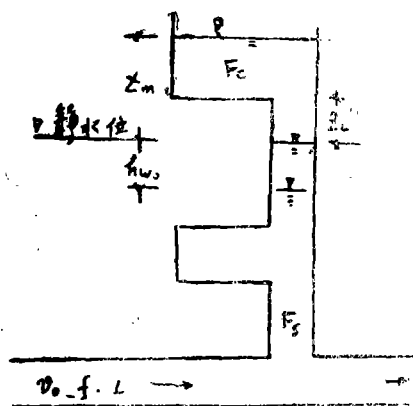


图 3

根据能量守恒原理经简化后可得下式

$$Z_m = \sqrt{\frac{1}{gF} [f v_0^2 - f_b g (p^2 + 2ph_{w0})] + (p + h_{w0})^2 - h_{w0}} \quad \dots\dots (3)$$

式中符号见图4

表2是用公式(1), (2), (3)对一组调压室最大涌浪用计算机计算结果, 由表2计算结果相比较, 可知Frank—schüller公式(公式(1)(2)之间的偏差也很大, 而本文推荐的用能量守恒原理推导出来的公式(3)计算结果大都介于公式(1)和公式(2)计算结果之中间, 与公式(1)的计算结果更接近, Frank—schüller公式是公认的计算双室式调压室的权威公式。已被工程学术界长期运用于工程设计的计算中。因此可以说用能量原理推导的公式(3)也完全可以满足工程界在初设时对调压室的水力计算要求。而且比Frank—schüller公式计算方便, 无需试算。

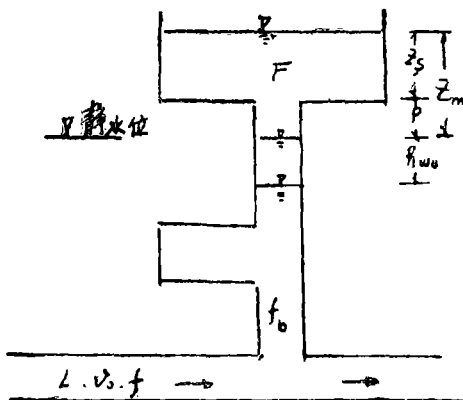


图 4

在推导公式(3)时没有考虑能量转换时的损头, 这是本公式的不足之处, 今后将用较为准确的四阶尤格—库塔算法进行比较, 当然用实践的已运行的调压室进行验证给予修正后会更有说服力。

(表见下页)

参 考 文 献

- | | | | | |
|-----|----------|--------------|---------|-------|
| [1] | 王树人 | 调压室水力计算理论与方法 | 清华大学出版社 | 1983. |
| [2] | E. B. 怀利 | 瞬变流 | 水利电力出版社 | 1983. |
| [3] | 王树人 | 水电站建筑物 | 清华大学出版社 | 1983. |
| [4] | C. 耶格尔 | 水力不稳定流 | 清华大学出版社 | 1983. |
| [5] | Φ. Φ. 古宾 | 水力发电站 | 高等教育出版社 | 1957. |

表2 最大涌浪值计算结果比较表

	糙率 N ₁	升井直 径D ₀	引水洞 径D ₁	上室直 径D _s	净水位 至底P	引水量 Q ₀	引水洞 长l	损头 h _{wo}	公式 (1)z _m	公式 (2)z _m	公式 (3)z _m	备 注
1	0.012	4.5	3.5	17.5	1.01	25	3 500	4.07	7.45	6.07	6.9 6	
2	0.013	5	5	18.5	0	40	4500	2.35	9.67	7.80	9.6 8	
3	0.013	6	4	20	0	30	4500	4.34	7.98	6.33	6.7 7	
4	0.014	5	5	20	0	45	5 000	3.83	10.56	8.30	9.67	
5	0.014	5	5	20	0	45	3 000	2.30	8.24	6.56	7.99	
6	0.014	8	5	20	0.5	55	3 000	3.43	9.88	7.89	9.4 1	
7	0.014	8	5	17.5	0.5	55	3 000	3.43	11.39	9.12	11.09	
8	0.014	4.5	5	17.5	0.5	55	30 00	3.43	11.42	9.12	11.10	
9	00.15	3.5	3.5	10	0.25	20	25 00	2.91	9.48	7.56	9.13	
10	0.015	3.5	3.5	15	0.25	15	3 500	2.29	5.50	4.36	5.03	
11	0.015	6	7.5	25	1.85	55	3 500	5.29	18.08	14.58	18.12	
12	0.017	5	5	25	2	60	4 500	9.03	8.67	7.50	8.05	
13	0.017	5	5	15	2	55	40 00	6.74	14.63	11.87	13.96	
14	0.017	8	5	20	2.5	45	4500	5.08	9.09	7.60	9.17	
15	0.017	6	6	20	0.35	75	4000	4.74	12.99	9.55	12.11	
16	0.012	11	7.5	34	0	141.6	4876.6	3.19	12.93	10.43	12.95	
17	0.013	5	5	18.5	0	35	4500	1.80	8.37	6.88	8.68	
18	0.013	5	5	18.5	0	30	4500	1.32	6.98	5.95	7.63	

THE NEW CALCULATION METHODS OF THE MAXIMUM SURGE VALUE OF SURGE TANKS

Ji Kui

(Department of Hydraulic Engineering)

In this paper the new formulas used to calculate the maximum surge value of all kinds of surge tanks are derived by means of the energy conservation law.

Here, in this paper, are only formulas to calculate the maximum surge value of the surge shafts with expansion chambers and the differential surge tank introduced. And the comparative calculations of a lot of particular case histories with the new method and the common analytical method are made. The comparative analysis of the results is shown in the table. The comparison of the results has amply proved that the results of calculation with the new and analytical methods are approximate. The new method can give acceptable results to the preliminary stage of the design and is easy to use.

Key Words: differential surge chamber, double-chamber surge chamber, swell waves