

# 低弗汝德数水跃特性的实验研究\*

辛玉传

刘子榕

(水力学教研室)

## 提 要

本文以实测资料为基础,对低弗汝德数水跃下游的时均流速分布,紊动强度分布和沿程衰减,以及它们与河床冲刷之间的关系进行研究分析,同时对水跃的基本方程,紊动流速的测量和信号处理进行了探讨。

**关键词:** 水跃, 消能, 紊流。

## 一、实 验

实验在宽40厘米的玻璃水槽内进行。槽内装置高20厘米和10厘米的溢流堰,堰顶设平板闸门以控制上游水位。实验放水情况如表1所示,跃首弗汝德数  $F_1$  的变化范围为2.35—6.20。

表 1

流量 Q (升/秒)	单宽流量 q(升/ 秒厘米)	开度 e (厘米)	总水头 $E_0$ (厘米)	跃前水深 $h_1$ (厘米)	弗氏数 $F_1$	跃后水深 $h_2$ (厘米)	共轭水深 比 $h_2/h_1$	旋滚长度 $L_r$ (厘米)	跃长 $L_j$ (厘米)	$L_r$ ( $h_2-h_1$ )	$L_j$ ( $h_2-h_1$ )
42.36	1.059	全开	23.40	5.92	2.35	16.92	2.85	32	78	2.91	7.10
25.30	0.633	全开	20.15	3.66	2.88	13.15	3.59	35	67	3.69	7.06
42.36	1.059	全开	33.15	4.48	3.57	19.90	4.44	60	109	3.89	6.07
33.17	0.829	全开	31.45	3.60	3.88	17.37	4.83	58	98	4.21	7.12
25.30	0.633	全开	29.75	2.77	4.38	15.45	5.58	59	88	4.65	6.94
20.00	0.500	全开	28.50	2.25	4.73	13.36	5.94	54	77	4.86	6.93
42.36	1.059	7.00	47.75	3.67	4.81	22.70	6.19	82	135	4.31	7.09
36.61	0.915	6.25	46.20	3.24	5.00	20.60	6.36	80	121	4.61	6.97
36.61	0.915	6.00	49.50	3.18	5.16	21.00	6.60	80	125	4.49	6.99
33.17	0.829	5.00	52.80	2.71	5.94	20.70	7.64	85	123	4.72	6.84
29.25	0.731	4.50		2.42	6.20	19.20	7.93	80	117	4.77	6.97

: 注  $F_1=2.35$  和  $F_1=2.88$  两水跃在  $P=10$  厘米的溢流堰下进行实验。

\*本文为硕士论文的摘要

实验观测内容包括水跃剖面, 跃长, 旋滚长, 底板压力, 流速分布和紊动能量。其关键是紊动流速的测量和信号处理, 对此我们采用激光测速仪和光电流速仪相配合的方法, 收到了较好的效果, 现简介于后:

### 1. 激光测速与信号处理

激光多普勒测速仪(以下简称LDA)的基本原理是光的多普勒效应, 它不需事先率定, 对流动无干扰, 无惯性, 是测量紊动流速较为理想的仪器。但由于受探测区透明度及其它因素的限制, 激光测速只能避开水跃区, 在水跃下游区域进行。

由LDA输出的紊动流速信号经磁带记录仪记录, 然后用JEF-16AN实时信号分析装置进行数字处理。假定水跃下游紊流是各态历经的平稳随机过程, 我们计算了均值、均方差、概率密度, 功率谱和自相关函数, 另外还计算了紊流理论中两个特殊的参数即时间微比尺和时间积分比尺。在进行功率谱和自相关分析时, 时间窗长 $T$ 和最高分辨频率 $f_c$ 的选择至关重要, 经比较可知, 以研究跃后大尺度紊动为目的,  $T$ 值应选择大一些而 $f_c$ 可以小一些。本文具体采用 $T = 41$ 秒,  $f_c = 25\text{Hz}$ (步长 $\Delta t = 0.02$ 秒)和 $T = 102$ 秒,  $f_c = 10\text{Hz}$ ( $\Delta t = 0.05$ 秒)两组数据。在采用 $f_c = 10\text{Hz}$ 时对原信号进行了滤波, 从处理结果看, 由于跃后紊流的低频特点, 两组数据下都不需进行滤波处理。数据分析中采用了汉宁窗函数。

### 2. 光电流速仪测量大尺度紊动

由于前述激光测速的局限性, 我们又试用光电流速仪(即MZL-A型流速仪)测量大尺度紊动得到成功。方法是, 选择平均时间最短的5秒档位, 每一测点读取25个数(越多越好)用来计算时均流速 $\bar{u}$ 和均方差 $\sqrt{u'^2}$ 。因为该仪器记数的方法和旋轮惯性等因素的影响, 其结果必须加以修正, 经分析可知, 这种影响与旋涡的尺度和变化频率直接相关因而其修正系数必与离开跃区的距离有关。以激光测速资料为准, 光电流速仪测量的相对紊动强度 $u'_r (= \sqrt{u'^2}/\bar{u})$ 应乘以以下的修正系数

$$C = 1.93 + 0.0875x/(h_2 - h_1) \quad (1)$$

式中 $x$ 为以跃首为零点的纵坐标,  $h_1$ 和 $h_2$ 分别为跃前和跃后水深。

光电流速仪的测量结果经修正后, 与激光测速资料吻合很好(图7、图8)。这一成功不仅使我们能够在跃尾附近测量大尺度紊动能量, 克服了LDA的某些局限性, 而且在很大程度上减轻了激光测速的工作量。

## 二、水跃的宏观参量

水跃的宏观参量是指共轭水深, 跃长, 旋滚长, 纵剖面等决定水跃外形尺寸的参数。关于这些参数的确定, 已有许多文献进行研究有些已趋于成熟。这里主要讨论修正的水跃动量方程及其求解, 同时为了后边叙述方便, 对其它参量的确定也作一简单介绍。

### 1. 修正的水跃动量方程

平底二元自由水跃的动量方程可由雷诺方程积分得到<sup>[1]</sup>:

$$\rho q(\bar{u}_{a2} - \bar{u}_{a1}) = 0.5\rho g(h_1^2 - h_2^2) - p_f \quad (2)$$

式中 $\bar{u}_a = q/h$ 为断面平均流速;  $p_f$ 为边界剪力。略去边界剪力立即得到常用的共轭水深计算公式即伯朗格方程:

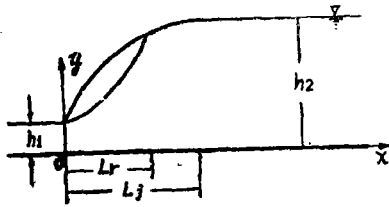


图1

式代入(2)即可得到修正的水跃动量方程:

$$\eta^2 + \frac{1-C_f}{1+C_f} \eta - \frac{2}{1+C_f} F_1^2 = 0 \quad (5)$$

直接求解可得:

$$\eta = 0.5(\sqrt{C^2 + 4(1+C)F_1^2} - C) \quad (6)$$

其中  $C = (1 - C_f)/(1 + C_f)$ 。对于普通光滑底板上的自由水跃, 可取  $C = 0.85$  ( $C_f = 0.0811$ ), 上式成为

$$\eta = 0.5(\sqrt{0.85^2 + 7.4F_1^2} - 0.85) \quad (7)$$

用该式求解二元自由水跃的共轭水深, 即使结果更为精确, 也保留了伯朗格方程的简单特性, 其计算结果如图2所示。

## 2. 水跃剖面、跃长和旋滚长。

文献[3]根据[2]中的大量实测资料总结跃长  $L_j$  的计算公式如下

$$L_j/(h_2 - h_1) = 7.25 - F_1/15 \quad (8)$$

本文把水平线与水跃剖面线的切点作为跃尾, 其结果与上式一致(图2)。对于水跃剖面, 我们认为可用下式拟合

$$(h - h_1)/(h_2 - h_1) = \sin[1.57 \cdot (x/L_j)^{0.75}] \quad (9)$$

式中  $h$  为跃区任一点的水深。另外若把表面时均流速为零的点作为旋滚末端, 则可用下式估算旋滚长度  $L_r$ ,

$$L_r/L_j = 0.84 - 1.1/F_1 \quad (10)$$

## 三、水跃下游的时均流速分布

水跃后的时均流速分布与河床冲刷密切相关, 以往虽有文献进行阐述, 但既缺乏系统的实测资料, 也无有效的定量分析方法。本文提出流速矩和流速分布系数的概念, 对跃后流速分布的大量实测数据进行了有效分析。

### 1. 流速矩和流速分布系数

流速分布的均匀程度固然可用动能修正系数  $\alpha$  进行描述, 但它不能反映主流在垂线上所处的位置, 因而也不能有效的描述流速分布与河床冲刷的关系。本文提出的流速矩可以弥补  $\alpha$  的不足, 其定义如下

$$\eta = h_2/h_1 = 0.5(\sqrt{1 + 8F_1^2} - 1) \quad (3)$$

在考虑边界剪力的情况下, [1]曾给出修正的水跃动量方程, 但结果是一个三次代数方程, 不易求解, 而其中引入的常系数也未与水跃本身特性联系起来。为此本文采用另一假定, 即认为边界的剪应力和水跃长度均与跃高  $(h_2 - h_1)$  成比例, 于是边界剪力可用下式表达

$$p_f = 0.5C_f \rho g (h_2 - h_1)^2 \quad (4)$$

式中  $C_f$  为一比例系数, 其值决定于边界的粗糙情况。上

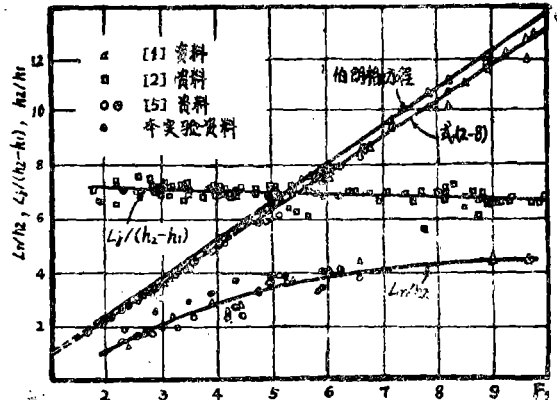


图2

$$M_u = \int_0^h \bar{u} y dy = q \bar{y} \quad (11)$$

其中 $\bar{y}$ 为流速剖面的重心坐标同时也是通过该断面水流的平均位能。对于矩形流速分布有 $M_u = 0.5qh$ , 据此可引出流速分布系数:

$$\theta = M_u / (0.5qh) = \bar{y} / 0.5h \quad (12)$$

显然当 $\theta = 1$ 时, 流动的重心位于 $h/2$ 处; 当 $\theta > 1$ 时, 流动的重心则靠近表面, 反之则靠近底部。根据实测资料, 对于水跃下游水流来说, 已知 $\theta$ 也可由下式求得动能修正系数 $\alpha$ :

$$\alpha = 1 + 10(\theta - 1)^2 \quad (13)$$

## 2. 水跃下游的时均流速分布

实测时均流速分布如图3所示, 由这些资料计算的动能修正系数 $\alpha$ 和流速分布系数 $\theta$ 则示于图4和图5。

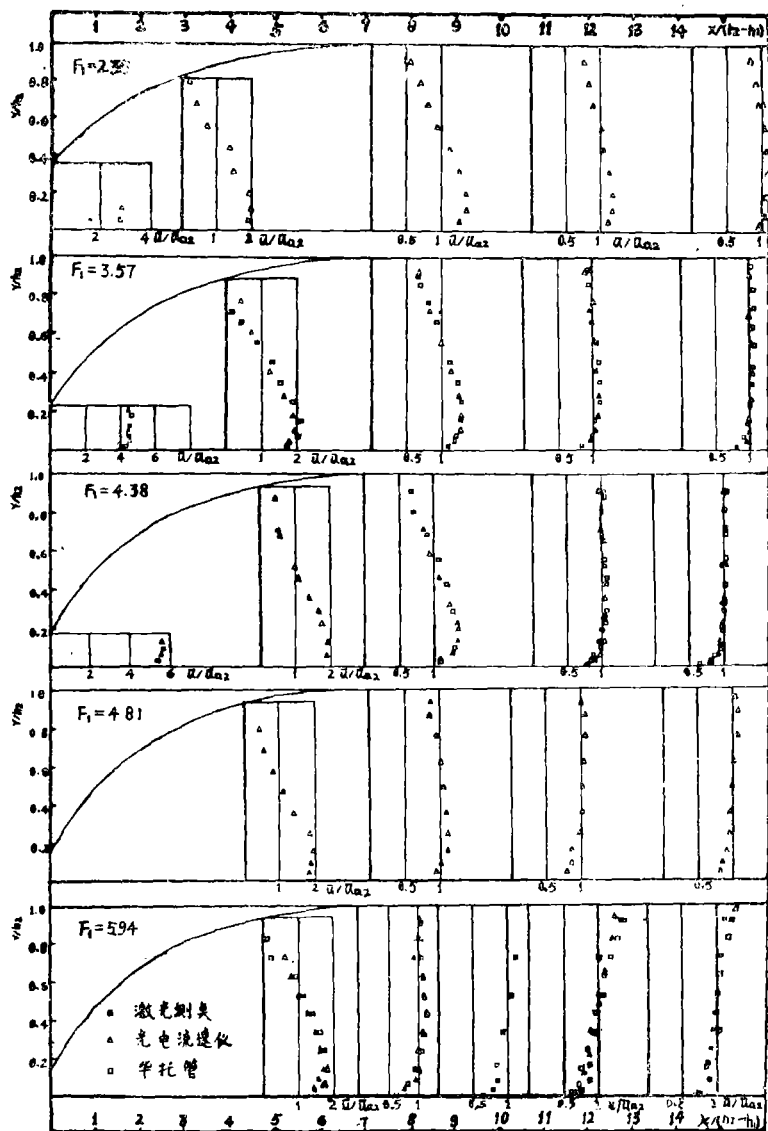
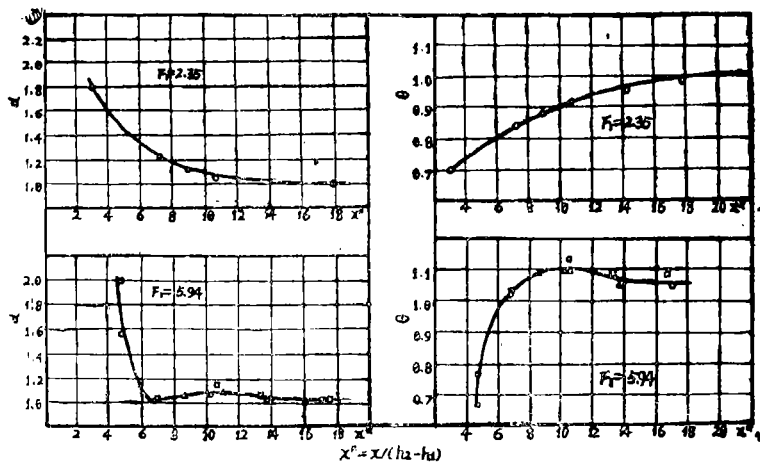
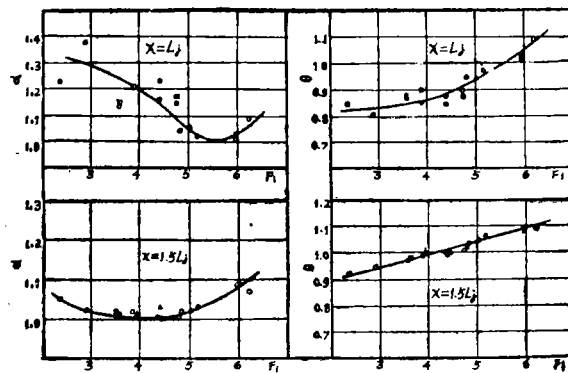


图3 时均流速分布

图4  $\alpha$  和  $\theta$  的沿程变化图4和5中:  $\Delta$  激光测  $\circ$  光电流速仪测  $\square$  毕托管测图5  $\alpha$ 、 $\theta$  与  $F_1$  的关系

由图5可见,在跃尾处,当 $F_1 = 5.5$ 时, $\theta = 1$ ( $\alpha$ 达到极小)。当 $F_1 < 5.5$ 时, $\theta < 1$ ,说明跃尾属于底流状态;而当 $F_1 > 5.5$ 时, $\theta > 1$ ,说明跃尾属于表面流状态。在1.5倍跃长的地方也有相同的变化,但分界点变为 $F_1 = 4.0$ 。以 $F_1 = 4.0$ 和 $F_1 = 5.5$ 为界,可将水跃分为以下三类:

第一类, $F_1 < 4.0$ , $\alpha$ 沿程单调减小, $\theta$ 单调增加,均缓慢的趋于其极限值,这意味着流速分布的沿程调整是从底流状态逐渐向均匀流状态过渡, $F_1$ 越小调整段越长。

第二类, $F_1 = 4.0 - 5.5$ , $\alpha$ 和 $\theta$ 沿程也为单调变化,但在跃尾下游附近即迅速趋于其极限值,这说明流速分布迅速从底流状态过渡为均匀流状态。从流速分布看,这类水跃比较理想。

第三类, $F_1 > 5.5$ ,流速分布的沿程调整明显的要经历两个阶段。大约在1.5倍跃长之前, $\theta$ 持续增大, $\alpha$ 先减后增,二者在同一点达到极大值,这是第一阶段,在这一阶段内流速分布从底流状态迅速过渡为表面流状态;再向下游, $\alpha$ 和 $\theta$ 均缓慢减小并趋于其极限值,表明流速分布又从表面流状态逐渐过渡为均匀流状态,这是第二阶段。这类水跃下游表

面流速过大, 调整段较长, 水面波动较严重。

#### 四、水跃下游紊动流速的谱分析和概率密度分析

实验中对3个水跃的7个断面共52个点的紊动流速进行了实时分析, 图6所示为其中一个点的处理结果。

##### 1. 谱特性

从全部谱分析结果看, 跃后紊动流速的变化频率很低, 当频率 $f > 3\text{Hz}$ 时, 已无能量存在, 有98%以上的能量集中在 $2\text{Hz}$ 以下, 而 $1\text{Hz}$ 以下的能量大约可占全部能量的95%左右。其峰值频率多在 $0.2\text{Hz}$ 左右变化。

在紊流理论中, 把谱曲线分为低频大涡旋区、载能涡旋区和高频的统计平衡区。对于跃后紊流, 可以认为大涡旋区和载能涡旋区处于 $f < 2\text{Hz}$ 的范围内, 当 $f > 2\text{Hz}$ 时即已进入统计平衡区。

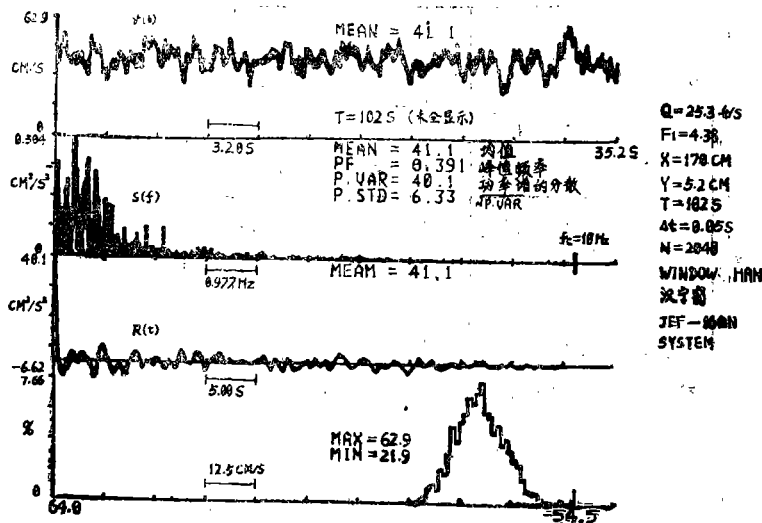


图6

##### 2. 自相关函数和紊流大比尺

各点的自相关函数 $R(\tau)$ 都从其最大值 $R(0)$ 开始迅速衰减至零, 然后稍有摆动并最终趋于零, 加上均值 $\bar{u}$ 为常数的条件, 可以初步说明跃后紊流是一种平稳的随机过程。按照紊流理论, 自相关函数的衰减速度还反映了旋涡尺度的大小, 由此定义的时间积分比尺为

$$T_E = \frac{1}{\bar{u}^2} \int_0^{\infty} R(\tau) d\tau \quad (14)$$

若借用均匀紊流中的公式计算紊流大比尺 $L_t$ :

$$L_t = \bar{u} T_E \quad (15)$$

则无量纲数 $L_t/h_2$ 在1.0左右变化, 也即大旋涡的尺度与水深 $h_2$ 同量级。

##### 3. 概率密度特性

从分析结果看, 跃后紊动流速基本符合正态分布, 偏倚系数为0.17, 峰型系数为2.80。另外为了今后分析方便, 本文还定义并计算了以下两个参数:

$$C_{vmax} = (u_{max} - \bar{u}) / \sqrt{\bar{u}^2} \quad (16)$$

$$C_{vmin} = (\bar{u} - u_{min}) / \sqrt{\bar{u}^2} \quad (17)$$

可分别称为最大正偏系数和最大负偏系数, 其平均值分别为3.2和2.8, 这说明流速在正方向的最大振幅略大于负方向的最大振幅。

## 五、水跃下游的紊动能量与河床冲刷

### 1. 跃后紊动强度的分布与沿程衰减

本文定义相对紊动强度及其断面平均值如下:

$$t_i = \sqrt{\bar{u}^2} / \bar{u} \quad (18)$$

$$t_{i, \text{平均}} = \sqrt{D_z} / \bar{u} \quad (19)$$

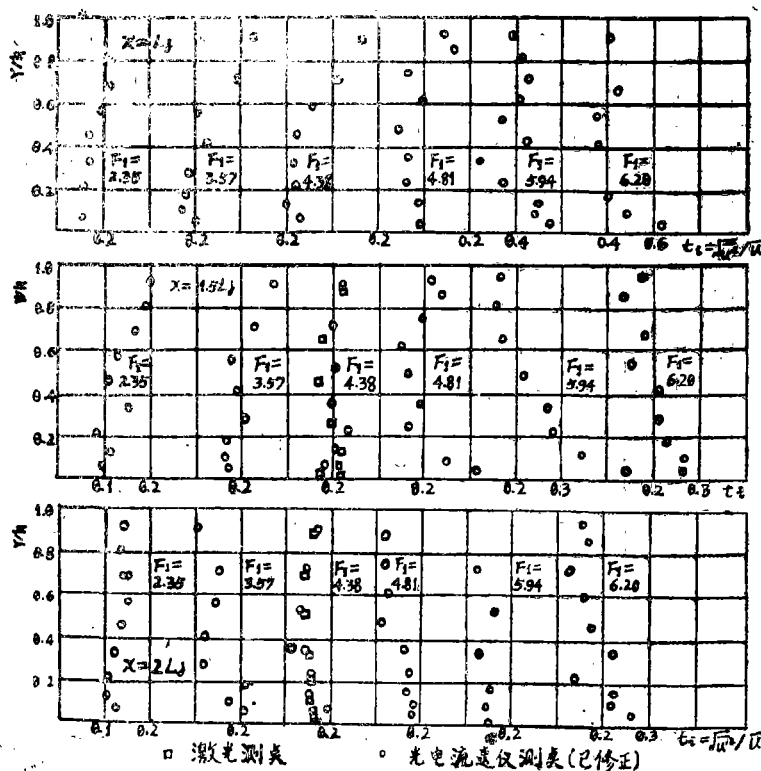


图7 紊动强度分布

其中  $D_z = (\int_0^h \bar{u}^2 dy) / q$  为紊动能量的  $\bar{u}^2$  断面平均值。  $t_i$  和  $t_{i, \text{平均}}$  的实测资料示于图7和图8 (篇幅所限, 未全绘出), 从这些资料可以看到: (1) 相对紊动强度  $t_i$  随流速梯度  $\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$  的增大而增大,  $t_{i, \text{平均}}$  位于  $\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = 0$  处, 由此关系所决定,  $t_i$  的垂线分布曲线正好与流速分布的凹向相反, 其沿程调整过程与流速分布的调整过程也呈一一对应的关系; (2) 当  $F_1 < 4.0$  时,  $t_{i, \text{平均}}$  在  $x = L_v$  和  $x = L_j$  之间有极大值存在,  $F_1$  越小极值点越偏下游, 当  $F_1 > 4.0$

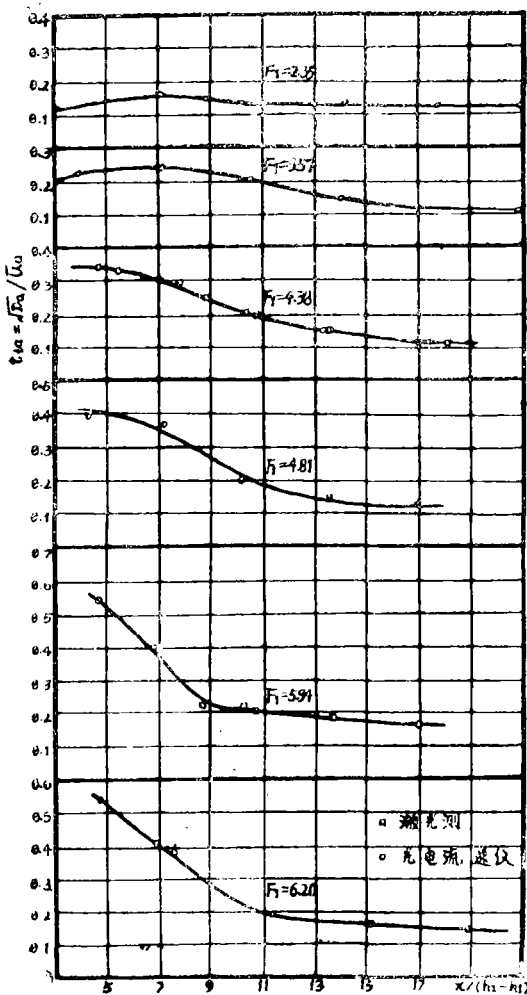


图8 断面平均紊动强度的沿程衰减

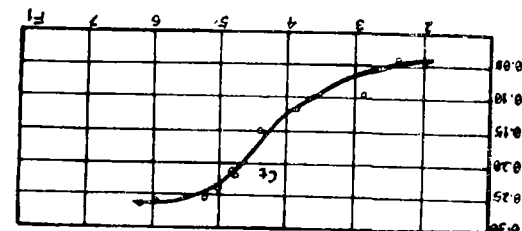
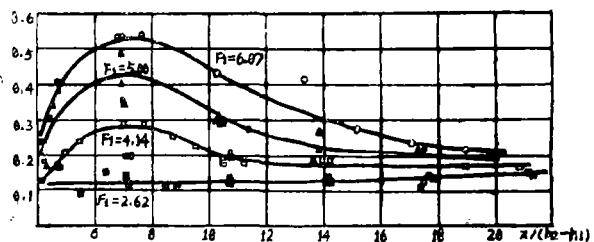
图9  $C_t$ 与 $F_1$ 的关系

图10 近底紊动强度

时,  $t_{1a}$  在所测范围内已不存在极大值, 但可以推测其极值点将在水跃旋滚区内; (3)  $F_1$  越大,  $t_{1a}$  越大, 相对紊动强度的垂线分布也越不利(底部大), 但紊动的衰减明显加快, 大约在2倍跃长之后,  $t_1$  和  $t_{1a}$  基本不再变化, 已接近于均匀流的水平。

从以上分析可知, 无论从相对紊动强度  $t_1$  的分布看还是从其断面平均值来看, 都是  $F_1$  越大越不利。当  $F_1 > 4.0$  时, 跃后底部紊动强度呈现大乘大的局势, 是引起河床冲刷的一个突出矛盾。

## 2. 跃后紊动能量的估算

考虑到紊动的三维特性, 根据激光测速资料分析计算和对流场的实际观察, 本文提出用下式估算一点的紊动能量

$$\overline{V'^2} \approx \overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2} \approx 1.6 \overline{u'^2} \quad (20)$$

于是跃后任一断面的紊动能头可以写为

$$h_t = C_t \frac{\overline{u'^2}}{2g} \quad (21)$$

其中  $C_t = 1.6 t_1^2$ 。在跃尾处,  $C_t$  的变化如图9所示, 可见  $F_1$  越大,  $C_t$  越大。当  $F_1 = 6.2$  时,  $C_t = 0.27$ , 即跃尾的紊动能量可占时均流动能的27%。

需要指出的是, 紊动能量在整个断面比能中所占比例很小, 在水跃的消能率的计算中完全可以忽略不计。

## 3. 跃后紊动与河床冲刷

紊动能量虽然对消能率的计算影响很小, 但对冲刷的作用却是非常显著的。为说明这一点, 本文引出一点的瞬时最大可能流速和最大可能紊动能量如下



$$V_p = \bar{V} + C_{vmax} \sqrt{\bar{V}^2} \quad (22)$$

$$E_{tp} = \frac{1}{2g} (V_p^2 - \bar{V}^2) \quad (23)$$

$E_{tp}$ 显然不同于时均紊动能  $\bar{V}^2/2$ 。为简化分析, 仅考虑纵向紊动, 并取实测值  $C_{vmax} = 3.2$  可得

$$E_{tp} = (6.4 + 10.2t_i) t_i \frac{\bar{u}^2}{2g} \quad (24)$$

假如某点  $t_i = 0.1$ , 则有  $E_{tp} = 0.76\bar{u}^2/2g$  (紊动能量为  $0.016\bar{u}^2/2g$ ), 可见即使紊动能量很小, 但由瞬时高流速的出现, 瞬时动能却可增加许多, 这就间接的说明了紊动对冲刷的巨大作用。应当强调指出,  $E_{tp}$  只有瞬时意义, 决不能用于能量方程进行消能率的计算。

为了进一步说明跃后的水流紊动与河床冲刷的关系, 我们把  $y/h_2 = 0.05$  处的时均流速称为底流速, 记为  $\bar{u}_b$ , 而把该点的紊动称为近底紊动, 其相对紊动强度记为  $t_{ib}$ 。实测的  $t_{ib}$  如图10所示, 其中每一条线都是相邻2—4个水跃取平均的结果。可以看到, 除  $F_1 = 2.62$  时,  $t_{ib}$  沿程呈直线变化外, 其余都是先增后减, 约在跃尾 ( $x/(h_2 - h_1) \approx 7.0$ ) 达到极值, 而在相对应的断面上均随  $F_1$  的增大而增大, 当  $F_1 = 6.07$  时, 跃尾处的  $t_{ib}$  可达0.54。

用  $t_{ib}$  和  $\bar{u}_b$  代替 (24) 式中的  $t_i$  和  $\bar{u}$ , 并令  $\bar{u}_b = b\bar{u}_{*2}$  可得近底最大可能紊动能量

$$E_{tb} = C_{tb} \frac{\bar{u}_{*2}^2}{2g} \quad (25)$$

其中  $C_{tb} = b^2 t_{ib} (6.4 + 10.2 t_{ib})$ 。而近底的瞬时最大可能动能可以写为

$$E_{bp} = (C_{tb} + b^2) \frac{\bar{u}_{*2}^2}{2g} \quad (26)$$

$E_{bp}$  也可称为最大冲刷能量, 它显然由两部分组成, 一部分是时均流动能  $b^2 \bar{u}_{*2}^2/2g$ , 一部分是最大可能动能  $E_{tb}$ 。如图11所示,  $F_1 = 2.35 - 6.20$ , 系数  $C_{tb} + b^2$  在跃尾处为 3.0—5.0, 在 1.5 倍跃长处为 2.4 左右, 这就是说最大冲刷能量可达动能  $\bar{u}_{*2}^2/2g$  的若干倍, 最大可达 5 倍左右, 这势必引起起动力和推移力的成倍增加而大大增大其冲刷能力。另外从图11还可以看出,  $F_1$  较小时的突出矛盾是流速分布,  $F_1$  较大时的突出问题是紊动。为了同文献[4]的实验结果进行比较, 可定义附加冲刷能量如下

$$F_{bf} = (C_{tb} + b^2 - 1) \frac{\bar{u}_{*2}^2}{2g} \quad (27)$$

显然  $E_{bf}$  并不是紊动能量, 而是综合紊动与流速分布的影响后, 底部的最大可能动能与均匀流时的动能  $\bar{u}_{*2}^2/2g$  之差, 只具有瞬时的意义 (可见文献[4]把  $E_t$  称为大尺度紊动能量是不合适的)。由本实验资料计算的  $E_{bf}/E_1$  与[4]中的  $E_t/E_1$  在数量级上是相近的, 沿程变化趋

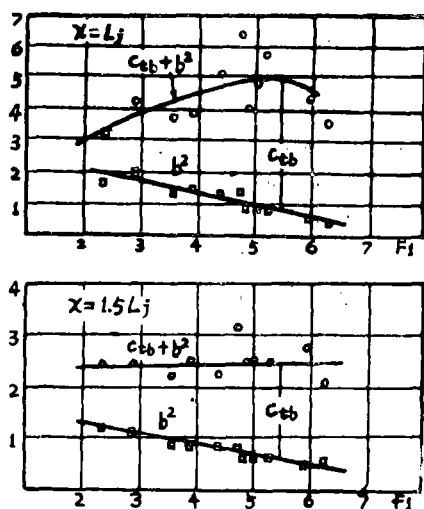


图11

势基本一致。

## 结 论

1. 边界剪力采用表达式(4)比较合理, 它使边界剪力与水跃本身的特性联系起来, 同时使修正的水跃动量方程得以简化。

2. 跃后紊流大旋涡的尺度与水深同量级, 紊动流速化频率很低, 其概率密度近似呈正态分布。

3. 本文引出的流速矩和流速分布系数可以对跃后时均流速分布进行有效的定量分析。

4. 随着 $F_1$ 的增大, 跃后底部流速变小但紊动强度变大; 紊动能量虽然不大, 但由于瞬时高流速(或最大能量)的出现, 紊动对冲刷的作用却极为显著。分析表明, 当 $F_1 < 4.0$ 时, 跃后河床冲刷的主要原因是底部时均流速过大, 当 $F_1 > 4.0$ 时, 其主要原因是紊动强度过大。因此建议在消力池的设计中, 不仅要考虑使下游流速分布尽量均匀, 而且还要使紊动强度尽量小, 应当把下游水流紊动的强弱做为判别消能效果的一个重要标准。

致谢: 实验得到刘国昌同志的大力协助, 深表谢意。

## 参 考 文 献

- (1) N. Rajaratnam, Hydraulic Jumps, Advances in Hydrosience, vol. 4
- (2) A. J. Peterka, Hydraulic Design of stilling Basins and Energy Dissipators. Bureau of Reclamation, 1963
- (3) 陈椿庭, 平底二元水跃长度公式的比较, 水利水电技术, 1964. 4
- (4) F. 哈同, K. 查尔温水跃下游大尺度紊动水流的冲刷能量, 长科院水工译丛(第一集)。
- (5) Tien To Siao, Hunter Rouse, S. NaSaratnam, Turbulence Characteristics of the Hydraulic Jump, Transaction of ASCE, Vol. 124, 1959

# EXPERIMENTAL STUDY ON THE CHARACTERISTICS OF HYDRAULIC JUMPS WITH LOW FROUDE NUMBERS

Xin Yuchuan

Liu Zirong

(Hydraulic Engineering Department ZhengZhou Institute of Technology)

## Abstract

An extensive experimental study is carried out on the classical hydraulic jumps with Froude numbers of 2.35—6.20. Through the analysis of turbulence measurements by LDA and the whirl—light—electricity velocimeter, in time field and amplitude field, the turbulence Characteristics downstream of the hydraulic jump are studied, and the serious bed scour is expained with instantaneous maximum energy at the bottom. At the same time, the corrected momentum equation is also simplified.

**Key words:** Hydraulic Jump, Energy dissipation, turbulence