伪抛物型方程确定参数的反问题

刘畅畅

（数学力学系）

提　要

本文在矩形区域$\Omega=(0,H)\times(0,T)$中考察非线性伪抛物型方程$u_{xxt}+d(x,t)u_t+\eta(x,t)u_{xx}+a(t)u_x+b(x,t)u=-[F(x,t,u)+C(x,t)P(t)]$确定参数的反问题。讨论了当参数$P(x,t)$已知时在一定附加条件下寻求函数偶$(u(x,t),a(t))$的可解性和补充条件确定未知参数．寻求函数组$(u(x,t),a(t),p(t))$的可解性。

关键词：抛物型方程，反问题

在研究与粘滞液体流动有关的某些物理问题中，经常出现形如：

$$L[u]=u_{xxt}+d(x,t)u_t+\eta(x,t)u_{xx}+a(x,t)u_x+b(x,t)u=-q(x,t) \tag{1}$$

的方程。R.E.Showalter，T.W.Ting称之为伪抛物的。

方程（1）的各种边值问题，已被许多作者用不同方法研究，获得了问题的正则解和广义解[1]-[4]。确定方程（1）低次项系数的反问题，也开始为人们所注意[5]。

本文考察非线性伪抛物型方程确定参数的反问题：

$$\begin{cases} L_1[u]=u_{xxt}+d(x,t)u_t+\eta(x,t)u_{xx}+a(t)u_x+b(x,t)u \\ \quad =-[F(x,t,u(x,t))+c(x,t)p(t)],\quad (x,t)\in\Omega=(0,H)\times(0,T) & (2)\\ u(x,0)=f(x), \quad x\in[0,H] & (3)\\ u(0,t)=g(t),\ u_x(0,t)=h(t), \quad t\in[0,T] & (4)\\ u(H,t)=\varphi_1(t), \quad t\in[0,T] & (5)\\ u(x_0,t)=\varphi_2(t), \quad x_0\in(0,H),\ t\in[0,T] & (6)\end{cases}$$

其中$u(x,t)$为未知函数，$p(t)$为参数。即在附加条件（5），（6）下寻求函数组$\{u(x,t),a(t),p(t)\}$。

为叙述方便，我们对方程（1）的系数及（3）、（4）中边界数据作如下假设：

(A_1) $h(t)$，$g(t)\in c^1[0,T]$；$f(x)\in c^2[0,H]$；

(A_2) $d_t((x,t)$，$\eta_x(x,t)$，$a_x(x,t)$，$b(x,t)\in c(\bar\Omega)$；$d(x,t)\leqslant 0$，$(x,t)\in\bar\Omega$；

(A_3) $q(x,t)\in c(\bar\Omega)$。

定义　$L[u]$的共轭算子$\mu[v]$

$$\mu[v]=-v_{xxt}-(dv)_t+(\eta v)_{xx}-(av)_x+bv$$

令$(\xi,\tau)\in\Omega$为任意固定点。引入函数$v(x,t;\xi,\tau)$适合条件

$$\begin{cases}\mu[v]=0\\ v(\xi,t;\xi,\tau)=0,\quad v_x(\xi,t;\xi,\tau)=\exp\{\int_\tau^t\eta(\xi,t_1)dt_1\}\\ v(x,\tau;\xi,\tau)=\omega(x,\tau)\end{cases} \tag{7}$$

其中$\omega(x,\tau)$是Cauchy问题

$$\begin{cases} v_{xx}(x,\tau;\xi,\tau)+d(x,\tau)v(x,\tau;\xi,\tau)=0 \\ v(\xi,\tau;\xi,\tau)=0,\quad v_x(\xi,\tau;\xi,\tau)=1 \end{cases} \tag{8}$$

的解。$v(x,t;\xi,\tau)$称为$L[u]$的Riemann函数[2]

引理1 [2]如果方程系数满足条件(A_2)，则由条件（7）、（8）所确定的Riemann函数$v(x,t;\xi,\tau)$是唯一存在的，且具有对称性

$$v(\xi,\tau;\alpha,\beta)=v(\alpha,\beta;\xi,\tau)$$

对（8）应用Sturm比较定理，容易得到：

引理2 如果方程系数满足条件（A_2），则对$\forall\xi\in(0,H)$，有

$$v(x,\tau;\xi,\tau)<0,\quad x\in[0,\xi);\ v(x,\tau;\xi,\tau)>0,\quad x\in(\xi,H]$$

一、非线性伪抛物型方程的特征问题

在矩形区域$\Omega=(0,H)\times(0,T)$上考虑如下初边值问题：

$$(E)\quad \begin{cases} L[u]=-Q(x,t,p(x,t),u(x,t)) \\ u(x,0)=f(x), & x\in[0,H] \\ u(0,t)=g(t),\quad u_x(0,t)=h(t), & t\in[0,T] \end{cases}$$

D.Colton[1]称问题（E）为特征问题。记$R=(0,\xi)\times(0,\tau)$，在$\overline{R}$上积分恒等式：

$$vL[u]-u\mu[v]=\frac{\partial}{\partial x}[vu_{xx}+uv_{xt}+\eta u_x v-(\eta v)_x u+auv]+\frac{\partial}{\partial t}[duv-u_x v_x]$$

不难直接计算，特征问题（E）等价于下述非线性Volterra积分方程

$$u(\xi,\tau)=\psi(\xi,\tau)+\int_0^\tau\int_0^\xi Q(x,t,p(x,t),u(x,t))v(x,t;\xi,\tau)dxdt \tag{9}$$

其中

$$\begin{aligned}\psi(\xi,\tau)=&\,g(\tau)v_x(0,\tau;\xi,\tau)-\int_0^\xi[d(x,0)f(x)v(x,0;\xi,\tau)-f'(x)v_x(x,0;\xi,\tau)]dx\\ &-\int_0^\tau[h'(t)v(0,t;\xi,\tau)+h(t)\eta(0,t)v(0,t;\xi,\tau)\\ &+g(t)(v_{xt}(0,t;\xi,\tau)-(\eta(0,t)v(0,t;\xi,\tau))_x+a(0,t)v(0,t;\xi,\tau))]dt\\ =&\,\psi_1(\xi,\tau)-\int_0^\tau a(t)g(t)v(0,t;\xi,\tau)dt\end{aligned}$$

定理1 设方程系数与边界数据满足条件（A_1）、（A_2），$p(x,t)\in c(\overline{\Omega})$，函数$Q(x,t,p(x,t),r)$在集合$S_{H,T,M}=\{(x,t,r)\,|\,x\in[0,H],t\in[0,T],|r|\leqslant M,\ M=\text{Const}\}$上连续，且满足Lipschitz条件$|Q(x,t,p,r_1)-Q(x,t,p,r_2)|\leqslant L_Q|r_1-r_2|$，则当$p(x,t)$为已知函数时，特征问题（E）有唯一的正则解$u(x,t)$。

证明 引入集合$H=\{u(x,t)\,|\,u(x,t)\in c(\overline{\Omega})\}$，其上装备范数

$$\|u\|_h=\max_{(x,t)\in\overline{\Omega}}\{|u(x,t)|\}e^{-\lambda(x+t)},\quad\forall u(x,t)\in H$$

显然H是Banach空间。在H上定义算子N：H→H

$$Nu(\xi,\tau)=\psi(\xi,\tau)+\int_0^\tau\int_0^\xi Q(x,t,p(x,t),u(x,t))v(x,t;\xi,\tau)dxdt$$

这样一来，积分方程（9）在H中有唯一解，等价于积分算子N在H中有唯一不动点。$\forall u_1$，$u_2\in H$，$\forall(\xi,\tau)\in\Omega$

$$|Nu_1(\xi,\tau)-Nu_2(\xi,\tau)|\leqslant\int_0^\tau\int_0^\xi|Q(x,t,p,u_1)-Q(x,t,p,u_2)||v(x,t;\xi,\tau)|dxdt$$

$$\leqslant L_1L_Q\|u_1-u_2\|_h\int_0^\tau\int_0^\xi e^{\lambda(x+t)}dxdt$$

$$\leqslant(L_1L_Q/\lambda^2)\|u_1-u_2\|_h e^{\lambda(\xi+\tau)}$$

其中$L_1=\max\limits_{(x,t)\in\overline{\Omega}}\{|v(x,t;\xi,\tau)|\}$，$L_Q$为Lipschtz常数，由此

$$\|Nu_1-Nu_2\|_h\leqslant d_h\|u_1-u_2\|_h \tag{10}$$

这里$d_h=L_1L_Q/\lambda^2$，现选适当大的λ使$d_h<1$，故算子N：H→H是压缩的。于是由 Banach 压缩映象原理知N在H中存在唯一不动点。证毕。

二、确定低次项系数a（t）的反问题

现在我们转向研究特征问题（E）的反问题，即在附加条件

$$u(H,t)=\varphi_1(t),\qquad t\in[0,T] \tag{5}$$

下，确定函数偶$\{u(x,t),a(t)\}$，这里仅对系数$a(x,t)$不依赖于空间变量予以讨论。

定理2 设定理1的条件满足，且$\varphi_1(t)\in c^1[0,T]$；$g(t)\neq0,t\in[0,T]$；则反问题(E)，（5）的解$\{u(x,t),a(t)\}$存在且唯一。

证明 由定理1，特征问题（E）的解满足关系式

$$u(\xi,\tau)=\psi_1(\xi,\tau)-\int_0^\tau a(t)g(t)v(0,t;\xi,\tau)dt+\int_0^\tau\int_0^\xi Q(x,t,p(x,t),u(x,t))v(x,t;\xi,\tau)dxdt \tag{11}$$

置$\xi=H$，利用条件（5），并且等式两边对τ求导

$$\varphi_1'(\tau)=\psi_1'(H,\tau)-a(\tau)g(\tau)v(0,\tau;H,\tau)-\int_0^\tau a(t)g(t)v_\tau(0,t;H,\tau)dt+\int_0^H Q(x,\tau,p(x,\tau),u(x,\tau))v(x,\tau;H,\tau)dx+\int_0^\tau\int_0^H Q(x,t,p(x,t),u(x,t))v_\tau(x,t;H,\tau)dxdt$$

由引理2，即得$a(\tau)$满足的非线性Voltarra型积分方程

$$a(\tau)=\psi_2(\tau)-\int_0^\tau a(t)g(t)G_\tau(0,t;H,\tau)dt+\int_0^H Q(x,\tau,p(x,\tau),u(x,\tau))G(x,\tau;H,\tau)\cdot dx+\int_0^\tau\int_0^H Q(x,t,p(x,t),u(x,t))v(x,t;H,\tau)dxdt \tag{12}$$

其中 $\psi_2(\tau)=(\psi_1'(H,\tau)-\varphi_1'(\tau))/g(\tau)v(0,\tau;H,\tau)$，

$$G_\tau(x,t;\xi,\tau)=v_\tau(x,t;\xi,\tau)/g(\tau)v(0,\tau;H,\tau)。$$

引入集合$B=\{m=(u,a)\mid u(x,t)\in c(\overline{\Omega}),a(t)\in C[O,T]\}$其上装备范数

$$\|m\|_b=\|(u,a)\|_b=\max_{(x,t)\in\overline{\Omega}}\{|u(x,t)|+|a(t)|\}e^{-vt},\forall m\in B。$$

显然B是Banach空间，在B上定义算子M：$(u,a)\mapsto(\bar{u},\bar{a})$，$\bar{u}$、$\bar{a}$分别为

$$\bar{u}(\xi,\tau)=\psi_1(\xi,\tau)-\int_0^\tau a(t)g(t)v(0,t;\xi,\tau)dt$$

$$+\int_0^\tau\int_0^\xi Q(x,t,p(x,t),u(x,t))v(x,t;\xi,\tau)dxdt$$

$$\bar{a}(\tau)=\psi_2(\tau)-\int_0^\tau a(t)g(t)G_\tau(0,t,H,\tau)dt+\int_0^H Q(x,\tau,p(x,\tau),u(x,\tau))$$

$$\cdot G(x,\tau;H,\tau)dx+\int_0^\tau\int_0^H Q(x,t,p(x,t),u(x,t))G_\tau(x,t;H,\tau)dxdt$$

对于$(x,t)\in\overline{\Omega}$，$\forall(\xi,\tau)\in\Omega$，记$Z_1=\max\{|g(t)v(0,t;\xi,\tau)\}$，$Z_2=\max\cdot\{|v(x,t;\xi,\tau)|\}$，$Z_3=\max\{|G(x,\tau;H,\tau\}$，$Z_4=\max\{|G_\tau(x,t;\xi,\tau)|\}$，$L_Q$为Lipschitz常数。$\forall m_1=(u_1,a_1)$，$m_2=(u_2,a_2)\in B$，有下列估计式：

$$|\tilde{u}_1-\tilde{u}_2|\leqslant Z_1\int_0^\tau|a_1-a_2|dt+Z_2L_Q\int_0^\tau\int_0^\xi|u_1-u_2|dxdt$$

$$\leqslant[Z_1\int_0^\tau e^{vt}dt+Z_2L_Q\int_0^\tau\int_0^H e^{vt}dxdt]\|m_1-m_2\|_b$$

$$\leqslant((Z_1+Z_2L_QH)/v)\|m_1-m_2\|_b e^{v\tau}$$

$$|\bar{a}_1-\bar{a}_2|\leqslant Z_1\int_0^\tau|a_1-a_2|dt+Z_3L_Q\int_0^H|u_1-u_2|dx$$

$$+Z_4L_Q\int_0^\tau\int_0^H|u_1-u_2|dxdt$$

$$\leqslant((Z_1+Z_4L_QH)/v)\|m_1-m_2\|_b e^{v\tau}+Z_3L_Q\int_0^H|u_1-u_2|dx$$

注意到

$$|u_1(H,\tau)-u_2(H,\tau)|\leqslant\int_0^\tau\int_0^H|(Q(x,t,p,u_1)-Q(x,t,p,u_2)|$$

$$|v(x,t;H,\tau)|dxdt$$

$$\leqslant(Z_2Z_3L_QH/v)\|m_1-m_2\|_b\cdot e^{vt}$$

即$|\bar{a}_1-\bar{a}_2|\leqslant((Z_1+Z_4L_QH+Z_2Z_3L_Q{}^2H^2)/v)\|m_1-m_2\|_b e^{v\tau}$，故

$$\|Mm_1-Mm_2\|_b\leqslant d_b\|m_1-m_2\|_b$$

其中$d_b=\max\{(Z_1+Z_2L_QH)/v,(Z_1+Z_4L_QH+Z_2Z_3L_Q{}^2H^2)/v\}$现选取充分大v使得$d_b<1$，故算子M：B→B是压缩的。由Banach定理知M在B中有唯一不动点，即方程组（11），（12）有唯一解$\{u(x,t),a(t)\}$。

三、确定参数p（t）的反问题

定理2证明了当$p(x,t)$为已知函数时，特征问题（E）有附加条件（5）的反问题有唯一解$\{u(x,t),a(t)\}$，如果$p(x,t)$为未知参数时，我们仅仅获得依赖参数$p(x,t)$的解族。为

了获得唯一解，我们必须补充条件，譬如$u(x_0,t)=\varphi_2(t),t\in[0,T]$。

现在，我们仅考虑当右端函数

$$Q(x,t,p(x,t),u(x,t))=F(x,t,u(x,t))+c(x,t)p(t)$$

时的反问题（2）—（6）。

定理3 设方程系数及边界数据满足条件（A_1），（A_2）；$\varphi_i(t)\in c^1[0,T],i=1,2$；$p(t)\in c[0,T]$，$c(x,t)\in c(\overline{\Omega})$；函数$F(x,t,r)$在集合$S_{H,T,M}=\{(x,t,r)|x\in[0,H],t\in[0,T],|r|\leqslant M,M=const\}$上连续，且满足Lipschitz条件$|F(x,t,r_1)-F(x,t,r_2)|<L_f|r_1-r_2|$；$g(t)\neq0,t\in[0,T]$；当$x\in[0,H]$时，对$\forall t\in[0,T]$，$c(x,t)$保持定号；则反问题（2）—（6）的解$\{u(x,t),a(t),p(t)\}$存在且唯一。

证明 由定理1，问题（2）—（4）的解$u(\xi,\tau)$满足方程（11），只需将Q写成方程(2)右端形式。在式（11）中分别置$\xi=H$、$\xi=x_0$，并将所得两等式两边分别对τ求导；又由引理2知行列式

$$\Delta(H,x_0,\tau)=\begin{vmatrix} v(0,\tau;H,\tau)g(\tau) & -\int_0^H c(x,\tau)v(x,\tau;H,\tau)dx \\ v(0,\tau;x_0,\tau)g(\tau) & -\int_0^{x_0} c(x,\tau)v(x,\tau;x_0,\tau)dx \end{vmatrix}\neq0,$$

由此二等式中可以解出$a(\tau)$，$p(\tau)$，即反问题（2）—（6）等价于下列非线性Volterra方程组：

$$\begin{cases} u(\xi,\tau)=\psi_1(\xi,\tau)-\int_0^\tau a(t)g(t)v(0,t;\xi,\tau)dt \\ \quad+\int_0^\tau\int_0^\xi[F(x,t,u(x,t))+c(x,t)p(t)]v(x,t;\xi,\tau)dxdt \\ a(\tau)=A(\tau)-\int_0^\tau a(t)g(t)[k_\tau(0,\tau;H/x_0,\tau)-k_\tau(0,\tau;x_0/H,\tau)]dt \\ \quad+\int_0^\tau\int_0^H c(x,t)p(t)k_\tau(x,t;H/x_0,\tau)dxdt-\int_0^\tau\int_0^{x_0} c(x,t)p(t) \\ \qquad k_\tau(x,t;x_0/H,\tau)dxdt \\ \quad+\int_0^H F(x,\tau,u(x,\tau))k(x,\tau;H/x_0,\tau)dx-\int_0^{x_0} F(x,\tau,u(x,\tau))k(x,\tau; \\ \qquad x_0/H,\tau)dxdt \\ \quad+\int_0^\tau\int_0^H F(x,t,u(x,t))k_\tau(x,\tau;H/x_0,\tau)dxdt-\int_0^\tau\int_0^{x_0} F(x,t,u(x,t)) \\ \qquad k_\tau(x,t;x_0/H,\tau)dxdt \qquad\qquad (13) \\ p(\tau)=B(\tau)-\int_0^\tau a(t)g(t)[k_{1\tau}(0,t;x_0/H,\tau)-k_{1\tau}(0,t;H/x_0,\tau)dt \\ \quad+\int_0^\tau\int_0^{x_0}[F(x,t,u(x,t))+c(x,t)p(t)]k_{1\tau}(x,t;x_0/H,\tau)dxdt \\ \quad-\int_0^\tau\int_0^x[F(x,t,u(x,t))+c(x,t)p(t)]k_{1\tau}(x,t;H/x_0,\tau)dxdt \\ \quad+\int_0^{x_0}F(x,\tau,u(x,\tau))k_1(x,\tau;x_0/H,\tau)dx-\int_0^H F(x,\tau,u(x,\tau))k_1(x, \\ \qquad \tau;H/x_0,\tau)dx \end{cases}$$

其中$p_0(I,\tau)=-\int_0^I c(x,\tau)v(x,\tau;I,\tau)d\tau$,

$k(x,t;\xi/I,\tau)=v(x,t;\xi,\tau)p_0(I,\tau)/\Delta(H,x_0,\tau)$,

$k_\tau(x,t;\xi/I,\tau)=v_\tau(x,t;\xi,\tau)p_0(I,\tau)/\Delta(H,x_0,\tau)$,

$k_1(x,t;\xi/1,\tau)=v(x,t;\xi,\tau)g(\tau)v(0,\tau;1,\tau)/\Delta(H,x_0,\tau)$,

$k_{1\tau}(x,t;\xi/1,\tau)=v_\tau(x,t;\xi,\tau)g(\tau)v(0,\tau;1,\tau)/\Delta(H,x_0,\tau)$,

$A(\tau)=[(\psi_1'(H,\tau)-\varphi_1'(\tau))p_0(x_0,\tau)-(\psi_1'(x_0,\tau)-\varphi_2'(\tau))p_0(H,\tau)]/\Delta$

$B(\tau)=[(\psi_1'(x_0,\tau)-\varphi_2'(\tau))v(0,\tau;H,\tau)-(\psi_1'(H,\tau)-\varphi_1'(\tau))$
$v(0,\tau;x_0,\tau)]g(\tau)/\Delta$

引入集合$D=\{s=(u,Q,p)\mid u\in c(\bar{\Omega}),\ a(t),p(t)\in c[0,T]\}$, 对其元素赋以范数。

$$\|S\|_d=\|(u,a,p)\|_d$$
$$=\max_{(x,t)\in\bar{\Omega}}\{|u(x,t)|+|a(t)|+|p(t)|\}e^{-\sigma t},\quad \forall S\in D$$

在Banach空间D上定义算子T: $(u,a,p)\mapsto(\bar{u},\bar{a},\bar{p})$, $\bar{u}$, $\bar{a}$, $\bar{p}$分别由(13)之右端给出。类似定理2的估计，不难证明算子T在D中有唯一不动点，即存在$S=(u,a,p)\in D$使得$TS=S$，定理3得证。

在此感谢袁忠信老师对本文的指导和修改。

参 考 文 献

〔1〕 Colton.D. Pseudoparabolic equation in one space Variable, J.Differen equat 12 (1972) pp559—565.

〔2〕 Шхануков.М.Х.О.некоторых краевых задача Для уравнения третьего порядка возникающих при моделировании Фильтрации Жидкости. В пористых средах Диффен урав.18 (1982), No.4

〔3〕 Шхануков М.Х О некоторых краевых Задача для уравнения Третьего порядка И экстремальных Свойствaего решений.Диффен Урав 19 (1983), No1, 145—152.

〔4〕 ВоДахова.В.А.Краевая Задача С нелокальных условием А.М.Нахушева для одного псевдапараболического Уравнения влагопереноса Диффен Урав.18 (1982), No2

〔5〕 吕胜关 伪抛物型方程的某些反问题 郑州大学学报（自然科学版） 1(1985) pp52—57.

AN INVERSE PROBLEM FOR DETERMINING UNKNOWN PARAMETER IN A PSEUDOPARABOLIC EQUATION

Liu Chang—Chang

(mathematics and mechanics department)

Abstract

This paper consider the inverse problem of determining the unknown parameter in the nonlinear pseudoparabolic equation $u_{xxt}+d(x,t)u_t+\eta(x,t)u_{xx}+$

$a(t)u_x + b(x,t)u = -[F(x,t,u) + c(x,t)p(t)]$, $(x,t) \in \Omega = (0,H)x(0,T)$,It is shown that, when the parameter $p(x,t)$ is known, from the additional data, to seek the pair of functions $\{u(x,t), a(t)\}$ is solvable and when more overspecified data is supplemented, to seek the class of functions $\{u(x,t), a(t), p(t)\}$ is solvablee too.

Key words: parabolic equation, counterquestion

（上接18页）

EIGEN EXPENTION ON BOUNDARY PROBLEM OF ONE-DIMENSIONAL DIRAC SYSTEMS

Shi qinchun (Zhongzhou Univ)

Hou Shuangyin (Zhengzhou Institute of Technology)

Abstract

Following eigenvalue problem of One-dimensional Dirac Systems is Studied

$$(E)\quad \begin{cases} z_1' - q(x)z_1 + [p(x) + \lambda]z_2 = 0, & z_1(o)\cos\alpha + z_2(o)\sin\alpha = 0, \\ z_2' + q(x)z_2 + [p(x) - \lambda]z_1 = 0; & z_1(\pi)\cos\beta + z_2(\pi)\sin\beta = 0. \end{cases}$$

The expantion theorem is proved by the method of integral oprator.

Theorem Let $f = (f_1(x), f_2(x))^T, f_1, f_2 \in L_2(0, \pi)$, $\{\varphi_n\}$ is Sequence of eigen vector-functions of (E), then by means of L_2 there is $f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \varphi_n \rangle \varphi_n$

where $\langle f, \varphi_n \rangle = \int_0^\pi (f_1\varphi_{n1} + f_2\varphi_{n2})\,dx$.

Keywords: Dirac systems, integral oprator, eigenexpantion expansion, boundary value problem