介绍一种编写电路的状态方程的简易方法

盛冠华

（电机系）

提　要

对各种线性电路及某些非线性电路编写状态方程时，应用替代定理和叠加定理，则可免去消除非状态变量的复杂程序，达到快速而准确编写状态方程的目的。

关键词： 线性电路、状态方程、替代定理、叠加定理

一、概　述

状态方程是以贮能元件上的网络变量作为状态变量的一阶微分方程。方程中不能出现非状态变量，因此，消去非状态变量就成为编写状态方程的一个重要环节，而且往往比较麻烦，非线性电路尤其如此。

本文介绍应用替代定理和叠加定理，可使编写状态方程的过程中根本不涉及非状态变量。当然也可利用它们来消去非状态变量，这就可以达到简化手续的目的。这种方法不仅可适用于一般的线性电路（可包含有受控源、回转器、理想变压器或时变的电阻、电感、电容元件的线性电路），对某些非线性电路，此法仍然有效。

二、原　理

一个线性含源（含有电压源u_s、电流源i_s）的动态电路，线性电容的特性为$q=cu_c$，线性电感的特性为$\psi=Li_L$。当以u_c、i_L作为状态变量时，其状态方程的标准式为

$$\begin{bmatrix}\dfrac{du_c}{dt}\\ \dfrac{di_L}{dt}\end{bmatrix}=[A]\begin{bmatrix}u_c\\ i_L\end{bmatrix}+[B]\begin{bmatrix}u_S\\ i_S\end{bmatrix}\tag{1}$$

其中[A]、[B]为常系数矩阵。

为使讨论简单起见，先假定电路中只含有一个电容、一个电感、一个电压源、一个电流源和若干个电阻。电容电流和电感电压分别为

$$\begin{aligned}i_c&=\frac{dq}{dt}=C\frac{du_c}{dt}=a_1u_c+a_2i_L+b_1u_S+b_2i_S\\ u_L&=\frac{d\psi}{dt}=L\frac{di_L}{dt}=a_3u_c+a_4i_L+b_3u_S+b_4i_S\end{aligned}\tag{2}$$

本文1986年8月23日收到。

式中各系数$a_1 \cdots\cdots a_4$，$b_1 \cdots\cdots b_4$均为常数，这就说明了i_c及u_L分别与u_c、i_L、u_S、i_S成线性关系，则可用叠加定理求解i_c及u_L，然后再整理成标准形式（1）。

若u_c及i_L都是唯一解，则可用替代定理去替代它们。即用电压源替代u_c；用电流源替代i_L，替代之后就可把电路看作为四个电源（u_c、i_L、u_S、i_S）共同作用了。

三、应用替代定理和叠加定理编写电路的状态方程的步骤

1、 确定状态变量u_c、i_L

2、 以电压源替代u_c、电流源替代i_L，作出等效电路图

3、 全部电压源作用（此时全部电流源开路）时，求出各电容电流i_c'及电感电压u_L'

4、 全部电流源作用（此时全部电压源短路）时，求出各电容电流i_c''及电感电压u_L''

5、 叠加：$i_c = i_c' + i_c''$，$u_L = u_L' + u_L''$

6、 最后整理成状态方程的标准形式

（注①步骤3、4、可视电路的具体情况而将各电源分成不同的组合，甚至各个电源单独作用。②步骤3、4、5也可作为求其它非状态变量的方法。）

四、举 例

例1

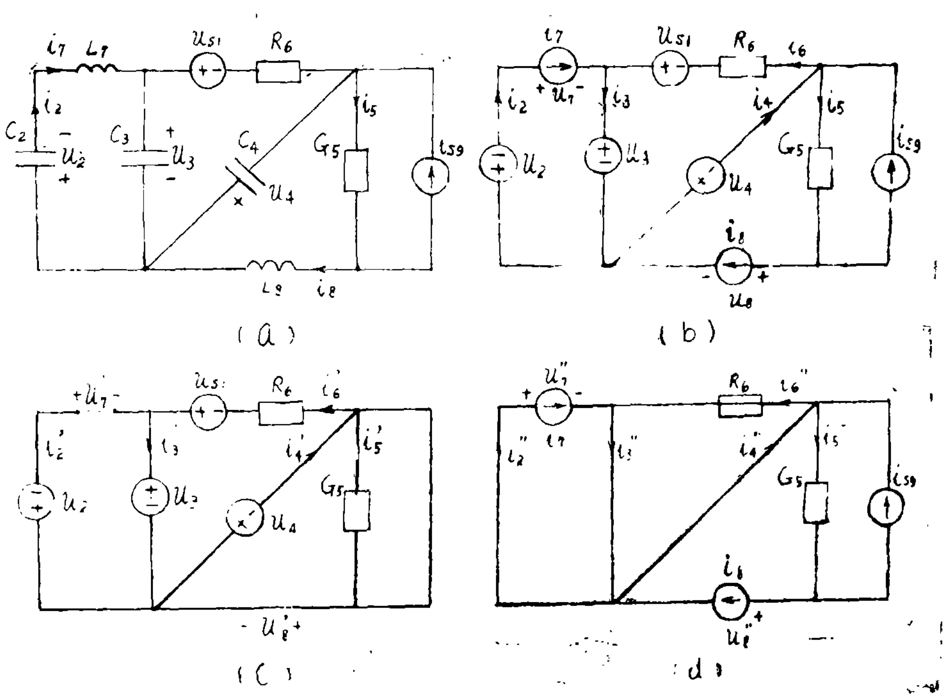


图 1

解法一：直接用叠加定理编写状态方程

①选u_2、u_3、u_4、i_7、i_8为状态变量

②应用替代定理并画出其等效电路图

并令$i_2=c_2\dfrac{du_2}{dt}$，$i_3=c_3\dfrac{du_3}{dt}$，$i_4=c_4\dfrac{du_4}{dt}$，$u_7=L_7\dfrac{di_7}{dt}$，$u_8=L_8\dfrac{di_8}{dt}$

③全部电压源作用（全部电流源开路）

容易算出$i'_2=0$，$i'_3=i'_4=\dfrac{u_{S1}-u_3-u_4}{R_6}$

$$u'_7=-u_2-u_3,\quad u'_8=-u_4$$

④全部电流源作用（全部电压源短路）

求得$i_2''=i_3''=i_7$，$i_4''=i_8$

$$u_7''=0,\quad u_8''=\frac{1}{G_5}(i_8+i_{S9})$$

⑤叠加：$i_2=i_2'+i_2''$，$i_3=i_3'+i_3''$，$i_4=i_4'+i_4''$，$u_7=u_7'+u_7''$，$u_8=u_8'+u_8''$

⑥整理成标准形式

$$\begin{pmatrix}\dfrac{du_2}{dt}\\[2ex]\dfrac{du_3}{dt}\\[2ex]\dfrac{du_4}{dt}\\[2ex]\dfrac{di_7}{dt}\\[2ex]\dfrac{di_8}{dt}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&\dfrac{1}{c_2}&0\\[2ex]0&-\dfrac{1}{c_3R_6}&-\dfrac{1}{c_3R_6}&\dfrac{1}{c_3}&0\\[2ex]0&-\dfrac{1}{c_4R_6}&-\dfrac{1}{c_4R_6}&0&\dfrac{1}{c_4}\\[2ex]-\dfrac{1}{L_7}&-\dfrac{1}{L_7}&0&0&0\\[2ex]0&0&-\dfrac{1}{L_8}&0&\dfrac{1}{G_6L_8}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_2\\[2ex]u_3\\[2ex]u_4\\[2ex]i_7\\[2ex]i_8\end{pmatrix}+$$

$$\begin{pmatrix}0&0\\[2ex]\dfrac{1}{C_3R_6}&0\\[2ex]\dfrac{1}{C_3R_6}&0\\[2ex]0&0\\[2ex]0&-\dfrac{1}{G_6L_8}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_{S1}\\[2ex]i_{S9}\end{pmatrix}$$

解法二、利用叠加定理消去非状态变量

①确定状态变量为u_2、u_3、u_4、i_7、i_8

②对单电容割集用KCL列方程

对单电感回路用KVL列方程

$$C_2\frac{du_2}{dt}=i_7 \qquad C_3\frac{du_3}{dt}=i_7+i_6 \qquad C_4\frac{du_4}{dt}=i_8+i_6$$

$$L_7\frac{di_7}{dt}=-u_2-u_3 \qquad L_8\frac{di_8}{dt}=-u_4-\frac{i_5}{G_5}$$

其中i_5、i_6为非状态变量，应用替代定理及叠加定理消去之。

③全部电压源作用

求得$i'_5=0$，$\quad i_6'=\dfrac{u_{S1}-u_3-u_4}{R_6}$

④全部电流源作用 求得$i''_5=i_8+i_{S9}$，$i_6''=0$

⑤叠加

$$i_5=i_5'+i_5''=i_8+i_{S9} \qquad i_6=i_6'+i_6''=\frac{u_{S1}-u_3-u_4}{R_6}$$

⑨消去非状态变量后整理成标准形式与解法一结果一致。

例2、对含有受控源的电路编写状态方程

解：选u_c、i_L为状态变量，并用电压源和电流源分别替代之，其等效电路见图2b

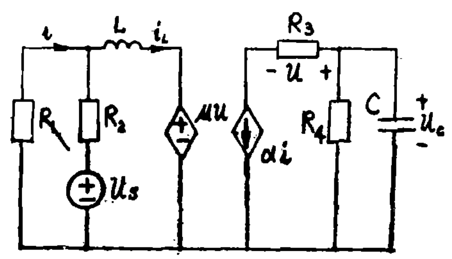
电压源、电流源分别作用的等效电路分别如图2（c）和（d）所示：

从图2（c）求得 $i'_c=-\alpha i'-\dfrac{1}{R_4}u_C=\dfrac{\alpha}{R_1+R_2}u_S-\dfrac{1}{R_4}u_C$

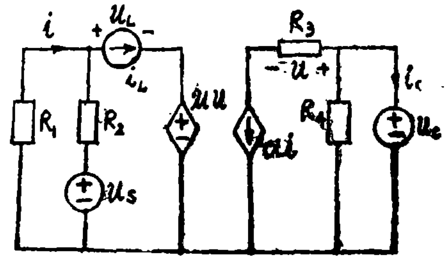
$$u_L'=-R_1i'-\mu u'=\frac{R_1+\mu\alpha R_3}{R_1+R_2}u_S$$

从图2（d）求得

$$i''_c=-\alpha i''=-\frac{\alpha R_2}{R_1+R_2}i_L \qquad u_L''=-R_1i''-\mu u''=-\frac{R_2(R_1+\mu\alpha R_3)}{R_1+R_2}i_L$$



(a)



(b)

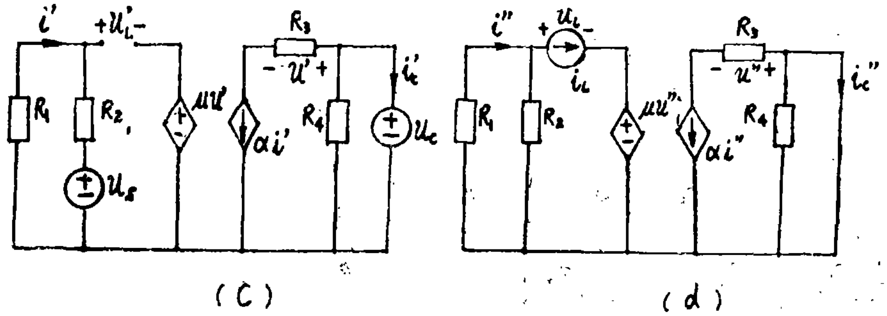


图　2

叠加得

$$i_c = i_c' + i_c'' = -\frac{1}{R_4}u_c - \frac{\alpha R_2}{R_1+R_2}i_L + \frac{\alpha}{R_1+R_2}u_S$$

$$u_L = u_L'' + u_L'' = -\frac{R_2(R_1+\mu\alpha R_3)}{R_1+R_2}i_L + \frac{R_1+\mu\alpha R_3}{R_1+R_2}u_S$$

最后可整理成标准形式。

例3、对具有回转器电路编写状态方程。

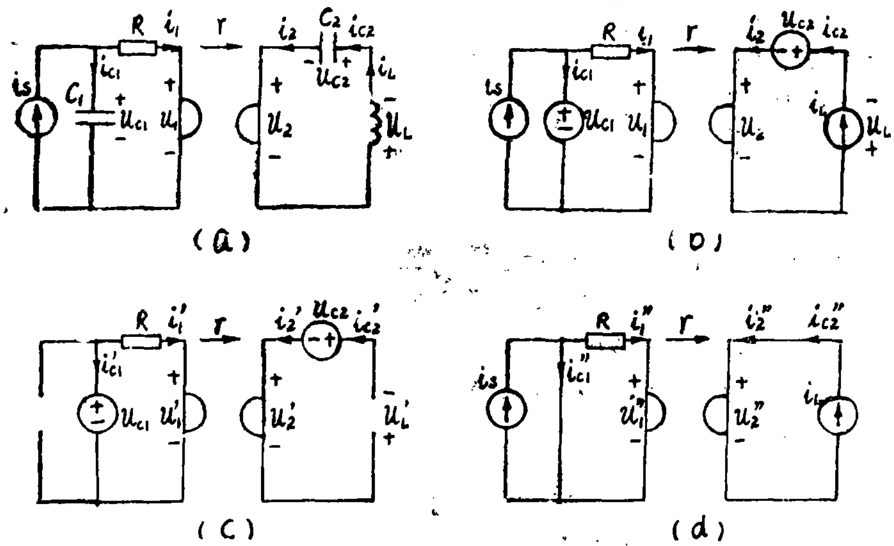


图　3

解：以u_{c1}、u_{c2}、i_L为状态变量，并用替代定理画出其等效电路如图3(b)所示。电压源作用及电流源作用的电路分别如图3(c)和(d)所示。

直接从图3列方程得：

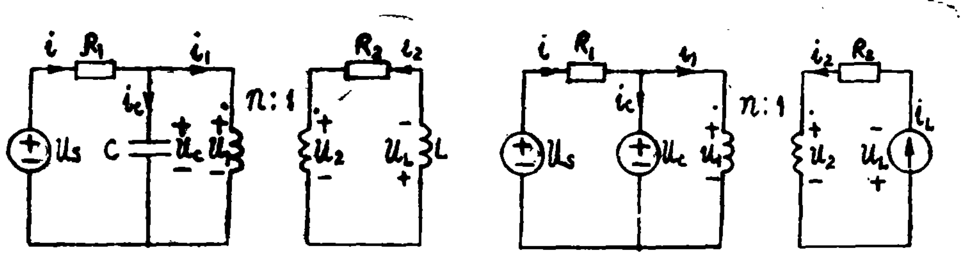
$$i_{c1} = i_S - i_1 = i_S - \frac{1}{R}(u_{c1} - u_1) = i_S - \frac{1}{R}u_{c1} - \frac{ri_2}{R} = -\frac{1}{R}u_{c1} - \frac{r}{R}i_L + i_S$$

$$i_{c2} = i_L$$

$$u_L = -u_{c2} - u_2 = -u_{c2} - r i_1 = -u_{c2} - r\left(\frac{1}{R}u_{c1} + \frac{r}{R}i_L\right) = -\frac{r}{R}u_{c1} - u_{c2} - \frac{r^2}{R}i_L$$

若从图3（c）和（d）分别求i_{c1}'、i_{c2}'、u_L'和i_{c1}''、i_{c2}''和u_L''再叠加求i_{c1}、i_{c2}、u_L，结果相同，但手续反而麻烦了。

例4、对具有理想变压器电路编写状态方程。



（a）　　　　（b）

图　4

解：以u_c、i_L为状态变量，并用替代定理画出等效电路如图4（b）所示

无论从图4（a）和（b）列方程，所得结果完全一致。

例5、对具有时变元件的线性电路编写状态方程。

时变元件的参数虽随时间而变，但对某一时刻而言，它的参数是确定的。因它们都是线性元件，故仍可用替代定理及迭加定理求解电路，只不过用R（t）、L（t）、C（t）表明它们是时变元件加以区别即可。对上述几个例子中的非时变（定常）元件改为时变元件时，编写出状态方程与原来结果一致，故不赘述。

五、结　论

编写线性电路的状态方程时，不论电路元件是定常的或时变时，电路中是否具有受控源、回转器、理想变压器和互感，都可以把电容电压，电感电流分别用电压源和电流源替代，然后用叠加定理求解之。这样在很多情况下可省去消去非状态变量的麻烦手续，或用此法可较容易消去非状态变量，因而能较快地编写出电路的状态方程。另外由于它的物理意义明确，故也就便于对结果的检查。

六、推　论

若电路中具有非线性电容和非线性电感，但不具有非线性电阻时，也可用替代定理和叠加定理直接编写电路的状态方程。因为用电源替代u_c和i_L后，电路的其余部分是线性的，故可用叠加定理求解。

对具有荷控电容$u_c = f_1(q)$及磁控电感$i_L = f_2(\psi)$，非线性电路的状态方程为：

$$\begin{pmatrix} \frac{dq}{dt} \\ \frac{d\psi}{dt} \end{pmatrix} = [A]\begin{pmatrix} f_1(q) \\ f_2(\psi) \end{pmatrix} + [B]\begin{pmatrix} u_S \\ i_S \end{pmatrix} = [A]\begin{pmatrix} u_c \\ i_L \end{pmatrix} + [B]\begin{pmatrix} u_S \\ i_S \end{pmatrix} \qquad (3)$$

对具有压控电容$q=f_1(u_c)$和流控电感$\psi=f_2(i_L)$，非线性电路的状态方程仍有式(3)的形式。

所以只要电路不具有非线性电阻，不论具有何种非线性电容和电感元件，则系数矩阵〔A和〔B〕中各元素都是常数，即说明dq/dt及$d\psi/dt$分别与u_c、i_L、u_s、i_S成线性关系，因而适用叠加定理。当然只有在唯一解的条件下，用电压源和电流源分别替代非线性电容和非线性电感才是合理的。

例6、已知非线性电容特性为$u_1=f(q_1)$，非线性电感特性为$i_5=f(\psi_5)$，线性电容$u_2=q/c$，线性电阻R_3、R_4，独立电流源i_S。试对图5(a)电路编写状态方程。

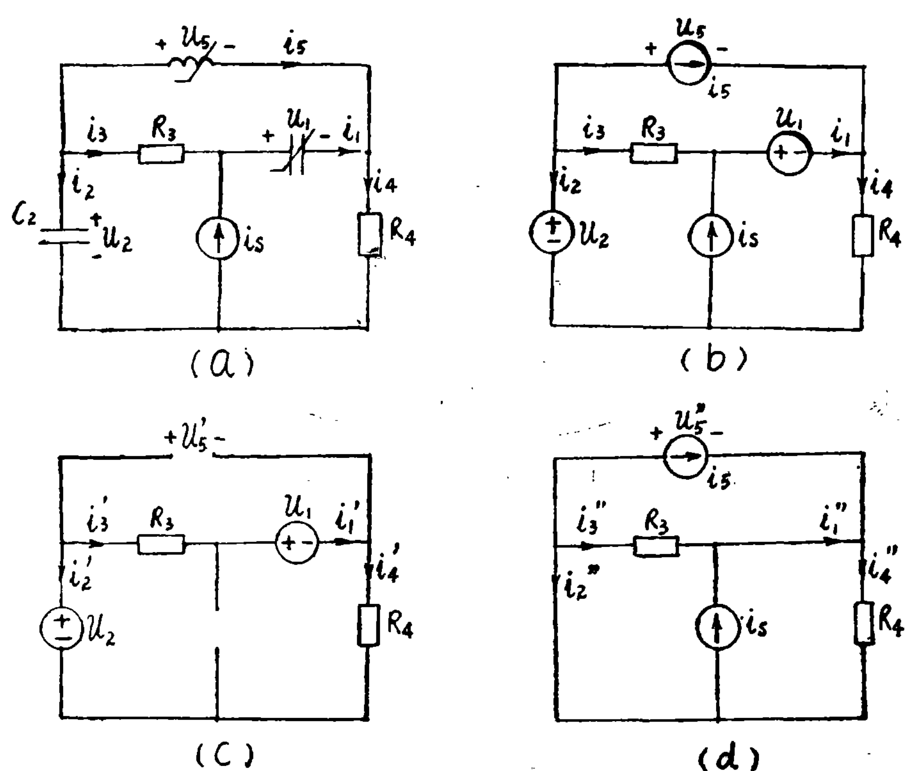


图　5

解法一：

以q_1、q_2、ψ_5为状态变量，分别用电压源和电流源替代u_1、u_2、i_5并作出等值电路如图5(b)所示。应用叠加定理的等值电路如图5(c)和(d)所示。

由图5(c)求得

$$i_1'=-i_2'=\frac{-u_1+u_2}{R_3+R_4}$$

$$u_5'=R_3i_1'+u_1=\frac{R_4}{R_3+R_4}u_1+\frac{R_3}{R_3+R_4}u_2$$

由图5(d)求得

$$i_1'' = i_4'' - i_5 = -\frac{R_4}{R_3+R_4}i_5 + \frac{R_3}{R_3+R_4}i_S$$

$$i_2'' = i_S - i_4'' = -\frac{R_3}{R_3+R_4}i_5 + \frac{R_4}{R_3+R_4}i_S$$

$$u_5'' = -R_4 i_4'' = -\frac{R_3R_4}{R_3+R_4}(i_5 + i_S)$$

叠加得

$$\frac{dq_1}{dt} = i_1 = i_1' + i_1'' \qquad \frac{dq_2}{dt} = i_2 = i_2' + i_2'' \qquad \frac{d\psi_5}{dt} = u_5 = u_5' + u_5''$$

$$即\begin{pmatrix} \frac{dq_1}{dt} \\ \frac{dq_2}{dt} \\ \frac{d\psi_5}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -R_4 \\ 1 & -1 & -R_3 \\ R_4 & R_3 & -R_3R_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(q_1) \\ f(q_2) \\ f(\psi_5) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_3 \\ R_4 \\ -R_3R_4 \end{pmatrix} \frac{i_S}{R_3+R_4}$$

解法二：

由图5(a)电路，对单电容割集用KCL列方程，对单电感回路用KVL列方程，即

$$\frac{dq_1}{dt} = i_1 = i_3 + i_S \qquad \frac{dq_2}{dt} = i_2 = -i_3 - i_5 \qquad \frac{d\psi_5}{dt} = u_5 = R_3 i_3 + u_1$$

由图5(c)求得　　$i_3' = i_4' = \dfrac{-u_1 + u_2}{R_3 + R_4}$

由图5(d)求得　　$i_3'' = -\dfrac{R_4}{R_3+R_4}(i_5 + i_S)$

叠加得$i_3 = i_3' + i_3'' = \dfrac{1}{R_3+R_4}(-u_1 + u_2 - R_4 i_5 - R_4 i_S)$

代入原状态方程消去i_3后，结果与上法一致。若用其它方法消去非状态变量，则较麻烦。

当R_3、R_4改为非线性电阻时，虽然替代定理仍可用，但不能再用叠加定理往下求解了。这将是很麻烦的。当然也有一些含有非线性电阻的动态电路也能较容易消去非状态变量的。

七、结　语

当电路不具有非线性电阻时，无论对含有线性或非线性的电容电感的电路，只要电路有唯一解，则均可用电压源替代电容电压u_c，用电流源替代电感电流i_L，从而可用叠加定理编写电路的状态方程，以达到简化手续的目的。　　（下转66页）

Some Analyses on the Circular Motion in the Chemical Engineering Equipments

Lu MeiJuam

(Department of Chemical Engineering)

Abstract

By using uniquely the Newton's Second Law relaive to the noninertial frame, the circular motion of fluid and the movement of the Particals in the flow field in the chemical engineering equipments Such as centrifugal Pumps, cyclones and centrifuges are discussed and analyzed. A Clear explanation on the technical term "Centrifugal Inertia Force "are also given。

Key wroJs: Equipments; Fluid flow; Inertia cenfrifugal force

（上接88页）

致于采用什么方法来编写电路的状态方程，则视具体电路而定。一般在编写方程的过程中出现的非状态变量不多时，则可采取消去非状态变量的方法。

参 考 文 献

〔1〕 E、S、Kuh.C.A.Desoer L.O.Chua Linear and Nonlinear Circuit

〔2〕 C.A.狄苏尔 葛守仁著 林争辉主译 《基本电路理论》

〔3〕 邱关源 《电路》 修订本

〔4〕 李国吉 《等值电路法列写线性网络的状态方程》

〔5〕 温郑铨 《列写线性定常网络状态方程消去非状态变量的辅助电路》

A Simple Method for Writing the State Equations of Circuits

Sheng Guan hua

(Deparitment of Electrical Engineering)

Abstract

Superposition theorem and Substitution theorem are used to Write the state equations for linear and non—linear circuits, then complex programs for elimination of non—state variables can be avoided and the state equations are written quickly and accurately.

Key words: linear circuit, equation of states, Substitution theorem Superposition theorem