

正截面抗裂计算的分析研究

高丹盈 丁自强

(水利结构教研室)

提 要

本文以受拉边缘极限应变为控制参数,在平截面假定的基础上推出了正截面抗裂计算的一般公式,给出了混凝土、钢筋混凝土和预应力混凝土受弯构件塑性系数的具体公式,利用收集到的抗裂资料对钢筋混凝土矩形截面受弯构件的塑性系数计算公式进行验证,符合很好。

基于钢筋和混凝土材料性质的混凝土结构、钢筋混凝土结构和预应力混凝土结构是一些具有非线性特性、非均匀的各向异性体。自前还难以进行精确的理论计算以确定截面的应力分布和变形,其计算理论和方法主要是建立在大量的试验基础之上,通过试验进一步了解从开始受力到破坏整个过程中不同阶段的力学特性,假定受力模式建立各自的公式。正截面抗裂计算以裂缝即将出现瞬间的应力应变图形为依据,在等效变换的前提下,把抗裂研究归结为塑性系数的确定,因而塑性系数的大小关系到混凝土、少筋混凝土结构的强度计算和钢筋混凝土结构及预应力混凝土结构的抗裂验算。由于受拉混凝土的应力应变关系是由上升段和下降段组成的曲线关系,用受拉极限应力来进行抗裂研究不尽合理。本文在适当假定的基础上,提出了以受拉边缘极限应变为控制参数的抗裂计算新方法,供研究参考。

一、一 般 公 式

为了进行正截面抗裂分析,提出下列假定:

- 1、截面即将开裂的瞬间变形服从平截面假定,即纵向纤维的应变沿截面高度呈线性分布;
- 2、受压区混凝土的应力应变关系为 $\sigma_c = \sigma_c(\varepsilon)$; 受拉区混凝土的应力应变关系为 $\sigma_t = \sigma_t(\varepsilon)$ 。

对矩形截面构件,裂缝出现时受压区平均应力 \bar{f}_c 和受压混凝土应力应变曲线的形心系数 k_c 为:

$$\bar{f}_c = \frac{1}{\varepsilon_c'} \int_0^{\varepsilon_c'} \sigma_c d\varepsilon \quad k_c = 1 - \frac{\int_0^{\varepsilon_c'} \sigma_c \varepsilon d\varepsilon}{(\varepsilon_c')^2 \cdot \bar{f}_c}$$

受拉区平均应力 \bar{f}_t 和受拉混凝土应力应变曲线的形心系数 k_t 为:

$$\bar{f}_t = \frac{1}{\varepsilon_t^u} \int_0^{\varepsilon_t^u} \sigma_t d\varepsilon \quad k_t = 1 - \frac{\int_0^{\varepsilon_t^u} \sigma_t \varepsilon d\varepsilon}{(\varepsilon_t^u)^2 \cdot \bar{f}_t}$$

式中: ε_t^u —受拉边缘的极限拉应变;

ε_c' —裂缝即将出现时受压边缘混凝土的压应变。

\bar{f}_c 、 \bar{f}_t 、 k_t 、 k_t 的值和混凝土其它指标(如 f_t 、 f_c 、 E_c 等)一样受许多因素影响。对混凝土和钢筋混凝土,由试验确定的 ε_t^u 、 k_t 、 \bar{f}_c 、 \bar{f}_t 见表1^[3]。

	ε_t^u	k_t	\bar{f}_c/f_t	$x = \bar{f}_t / (\varepsilon_t^u \cdot E_c)$	$f_c = 40 \sim 60 \text{ Mpa}$ $f_t = 2.5 \sim 4 \text{ Mpa}$ $E_c = 33000 \sim 42000 \text{ Mpa}$
混 凝 土	$2 (\pm 0.5) \times 10^{-4}$	0.7~0.9	0.6~0.8	0.15~0.36	
钢 筋 砼	$5 (\pm 1) \times 10^{-4}$	0.8~0.9	0.5~0.8	0.06~0.12	

由表1可见,钢筋的存在增大了受拉边缘的极限应变 ε_t^u ,即有效地阻止裂缝过早出现。裂缝出现时钢筋应力较大,大约为100Mpa,因而在抗裂计算中正确地计入钢筋的作用 是必要的。

3、考虑到截面开裂时,钢筋的应力一般小于屈服极限,设钢筋的应力应变关系为线性,即 $\sigma_s = E_s \cdot \varepsilon_s$ 。

在以上假定的基础上,对图1所示任意形状截面建立一般公式。在 M_{cra} 、 N_{cra} 、 N_p (裂缝即将出现时预应力钢筋的预拉力)的联合作用下,即将开裂的正截面应力分布如图1·c所示,为进行数值分析把混凝土沿截面高度分成若干个小单元,并设每个小单元上的应力均匀分布。由图1c的平衡条件得到两个方程。

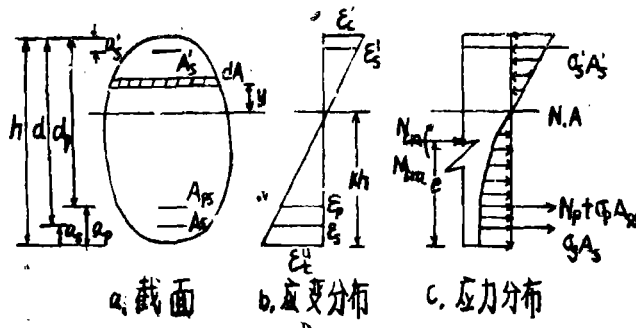


图 1

$$\int_0^{(1-k)h} \sigma_c(\varepsilon) dA - \int_0^{kh} \sigma_t(\varepsilon) dA + A_s' \sigma_s' - A_{ps} \sigma_p - A_s \sigma_s = N_{cra} + N_p \quad (1)$$

$$\int_0^{(1-k)h} \sigma_c(\varepsilon) y dA + \int_0^{kh} \sigma_t(\varepsilon) y dA + A_s' \sigma_s' (h - kh - a_s') + \sigma_s A_s (kh - a_s) + A_{ps} \sigma_p (kh - a_p) = M_{cra} - N_{cra} (kh - e) - N_p (kh - a_p) \quad (2)$$

对矩形截面用平均应力和形心系数表示,则平衡方程为:

$$(1-k)bh\bar{f}_c - kbh\bar{f}_t + A_s' \sigma_s' - A_{ps} \sigma_p - A_s \sigma_s = N_{cra} + N_p \quad (3)$$

$$(1-k)^2bh^2\bar{f}_c(1-k_c) + k^2bh^2(1-k_t) + \sigma_s' A_s' (h - kh - a_s') + \sigma_s A_s (kh - a_s) + \sigma_p A_{ps} (kh - a_p) = M_{cra} - N_{cra} (kh - e) - N_p (kh - a_p) \quad (4)$$

由变形相容得:

$$\frac{\varepsilon_c'}{(1-k)h} = \frac{\varepsilon_s'}{(1-k)h - a_s'} = \frac{\varepsilon_s}{kh - a_s} = \frac{\varepsilon_t^u}{kh} = \frac{\varepsilon_g}{kh - a_p} \quad (5)$$

由公式(1)或(3)可以确定中和轴位置;公式(2)或(4)是计算受弯构件($N_{cra}=0$)的抗裂弯矩 M_{cra} 或偏压构件($M_{cra}=0$)、偏拉构件($M_{cra}=0$ 、 N_{cra} 为负值)在裂缝出现时的抗裂能力 N_{cra} 的普遍性公式。在已知受拉边缘极限应变的情况下,可以用逐步迭代法求塑性系数或抗裂弯矩和轴力。先假定中和轴高度(即假设 k),由受拉边缘极限应变 ε_t^u 并利用方程(5)和钢筋以及混凝土的应力应变关系求钢筋和混凝土所受的力;验证方程(1)或(3)是否满足,调整 k 求出直到满足为止的 k ;由方程(2)或(4)求截面的抗裂能力 M_{cra} 或 N_{cra} 。

二、矩形截面受弯构件的抗裂计算公式

对矩形截面受弯构件,在等效变换的条件下,抗裂计算转化为塑性系数的确定。截面抵抗矩塑性系数的表达式为:

$$v = \frac{W_s}{W_0} \quad (6)$$

式中: v ——截面抵抗矩塑性系数;

W_0 ——构件截面对受拉边缘的弹性抵抗矩,对矩形截面 $W_0 = \frac{bh^2}{6}$

W_s ——考虑受拉区塑性影响后构件截面对受拉边缘的弹塑性抵抗矩。

W_0 按材料力学方法计算,以下分几种情况就 W_s 的计算方法进行叙述。

在基本公式(3)、(4)中取 $N_{cra}=0$ 得到受弯构件的一般方程:

$$(1-k)bh\bar{f}_t - kbh\bar{f}_c + A_s'\sigma_s' - A_{ps}\sigma_p - A_s\sigma_s = N_p \quad (7)$$

$$(1-k)^2bh\bar{f}_c(1-k_c) + k^2bh^2(1-k_t) + \sigma_s'A_s(h-kh-a_s') + \sigma_sA_s$$

$$(kh-a_s) + A_{ps}\sigma_p(kh-a_p) = M_{cra} - N_p(kh-a_p) \quad (8)$$

为方便计算不同情况下的 W_s ,同时考虑到受弯构件在裂缝出现时受压区基本为线性,在下面的分析中取受压区混凝土的应力应变关系为线性,即 $k_c=1/3$ 、 $\bar{f}_c=f_c'/2$,这里 f_c' 为受压边缘混凝土的应力,详见下述。

1、混凝土矩形截面梁的 W_s

如图2,由变形相容方程得受压边缘混凝土的应力为:

$$f_c' = \varepsilon_t^u E_c \frac{1-k}{k}$$

在(7)、(8)式中令 $A_s' = A_s = A_{ps} = 0$, $N_p = 0$ 得:

$$f_c' h \frac{1-k}{2} = \bar{f}_t kh$$

$$M_{cra} = \frac{1}{3} f_c' bh^2 (1-k)^2 + \bar{f}_t bk^2 h^2 (1-k_t)$$

$$\text{令 } x = \frac{\bar{f}_t}{\varepsilon_t^u E_c}, \text{ 由上式得: } k = \frac{1}{1 + \sqrt{2x}} \quad (9)$$

$$W_s = \frac{M_{cra}}{f_t} = \frac{\bar{f}_t}{f_t} \left[\frac{(1-k)^3}{3xk} + k^2(1-k_t) \right] bh^2 \quad (10)$$

把(10)式代入(6)式得到混凝土受弯构件的塑性系数表达式,利用表1所列的 k_c 、 \bar{f}_t/f_t 、 x 进行计算,结果表明混凝土受弯构件的塑性系数在1.2~1.7之间。

2、钢筋混凝土矩形截面梁的 W_s 。

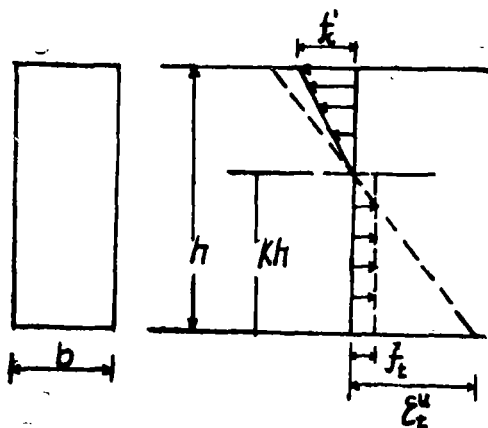


图 2

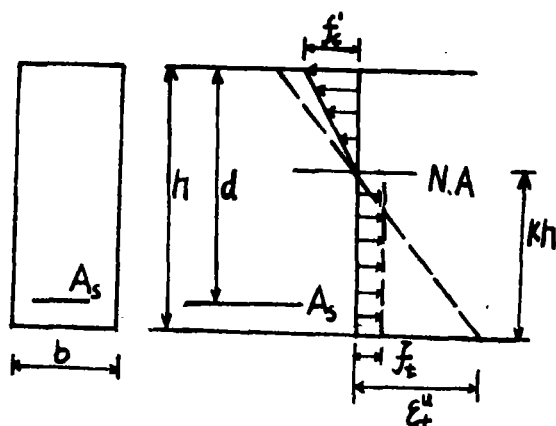


图 3

在式(7)、(8)中令 $N_p = 0$ 、 $A_{ps} = 0$ 得钢筋混凝土矩形截面梁的基本公式。对图3所示的单筋截面可以简化为:

$$f'_c h \frac{1-k}{2} = \bar{f}_t k h + n E_c \epsilon_t^u \frac{k - (1-d/h)}{k} \cdot \frac{A_s}{b}$$

$$M_{cra} = \frac{f'_c}{3} b h^2 (1-k)^2 + \bar{f}_t b k^2 h^2 (1-k_t) + n E_c \epsilon_t^u \left[k - (1-d/h) \right] \cdot \frac{A_s}{k} (kh - a_s)$$

式中 $n = \frac{E_s}{E_c}$

令: $x = \frac{\bar{f}_t}{\epsilon_t^u E_c}$, $p = \frac{A_s}{bd}$, 则有:

$$k = \frac{1 + np \frac{d}{h}}{1 - 2x} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{(1-2x)[1+2pn \frac{d}{h}](1-d/h)}{(1+np \frac{d}{h})^2}} \right] \quad (11)$$

$$W_s = \frac{M_{cra}}{f_t} = \frac{\bar{f}_t}{f_t} \left\{ \frac{(1-k)^3}{3kx} + k^2(1-k_t) + \frac{np}{kx} \left[k(1-d/h) \right]^2 \frac{d}{h} \right\} \cdot b h^2 \quad (12)$$

把(12)式代入(6)式得到钢筋混凝土受弯构件的塑性系数表达式。为验证公式的可靠性,采用文献[1]建议的 ϵ_t^u 和受拉混凝土的应力应变关系对收集到的 $L/h > 2$ 、 $\sigma < 1\%$ 的

117个试验资料所得 v 的试验值 v^s 的与按公式计算的 v 计算值之比,其 v^s/v^i 比值的平均值、均方差和变异系数分别为:1.036、0.150、0.146。由此可见在已知受拉边缘极限应变的基础上按本文推导的公式计算塑性系数与试验结果符合很好。

3、预应力钢筋混凝土梁的 W_s

对图示单筋截面梁,(7)、(8)式可简化为:

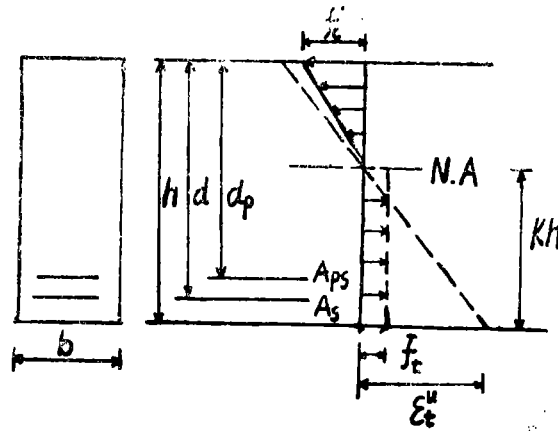


图 4

$$f'_c b h \frac{1-k}{2} = \bar{f}_t b k h + n E_c \epsilon_t' \left[\frac{k - (1-d/h)}{k} \cdot A_s + \frac{k - (1-d_p/h)}{k} A_{ps} \right] + N_p$$

$$M_{crs} = \frac{f'_c}{3} b h^2 (1-k)^2 + \bar{f}_t b k^2 h^2 (1-k_t) + n E_c \epsilon_t' \left[\frac{k - (1-d/h)}{k} \right.$$

$$\left. A_s (kh - a_s) + \frac{k - (1-d_p/h)}{k} A_{ps} (kh - a_p) \right] + N_p (kh - a_p)$$

$$\text{令: } \rho_p = \frac{A_{ps}}{b d_p}, \Delta = \frac{N_p}{b h \epsilon_t' E_c}, \text{ 则有:}$$

$$k = \frac{1 + \Delta + n \rho d/h + n \rho_p d_p/h}{1 - 2x} \left\{ 1 - \sqrt{1 - \frac{(1-2x)[1 + 2n(1-d/h)\rho d/h + 2n(1-d/h)\rho_p \cdot d_p/h]}{(1 + \Delta + n \rho d/h + n \rho_p d_p/h)^2}} \right\}$$

$$W_s = \frac{M_{crs}}{f_t} = \frac{\bar{f}_t}{f_t} \left\{ \frac{(1-k)^3}{3xk} + k^2(1-\beta) + \frac{n}{kx} (\rho d/h [k - (1-d/h)]^2 + \rho_p \frac{d_p}{h} [k - (1-d_p/h)]^2) + \frac{\Delta}{x} [k - (1-d_p/h)] \right\} b h^2 \quad (14)$$

把(14)式代入(6)式得到预应力钢筋混凝土矩形截面受弯构件塑性系数的表达式。

在已知受拉边缘极限应变的情况下,可由上述公式计算塑性系数 γ 。式(13)、(14)是单筋受弯构件的一般抗裂计算公式,在式(13)、(14)中令 $p_p=0$, $\Delta=0$ 得到(11)、(12)式;令 $p_p=0$, $\Delta=0$, $p=0$ 得(9)、(10)式。

三、偏压、偏拉和轴拉构件的抗裂计算公式

如前所述,一般情况下矩形截面偏压构件的抗裂计算可按(3)~(5)式进行。把 $M_{cra}=0$ 代入(4)式得:

$$(1-k)^2 b h^2 \bar{f}_c (1-k_c) + k^2 b h^2 (1-k_t) + \sigma_s' A_s' (h-kh-a_s') + \sigma_s A_s \cdot (kh-a_s) + A_{ps} \sigma_p (kh-a_p) = -N_{cra} (kh-e) - N_p (kh-a_p) \quad (15)$$

式(3)、(15)为偏压构件抗裂计算的基本公式,联立此二式可求得抗裂荷载 N_{cra} 。为方便计算,近似取受压区应力分布为线性,对图5所示单筋截面基本公式可简化为:

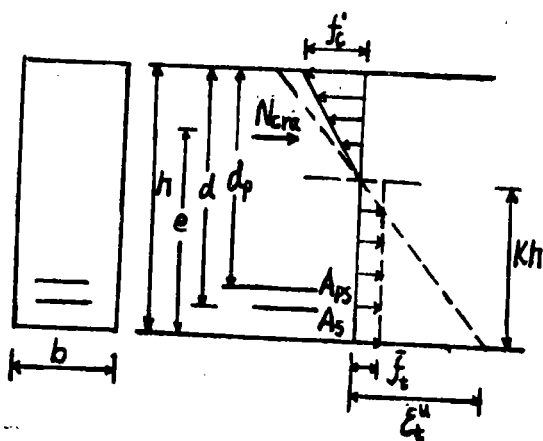


图 5

$$f_c' b h \frac{1-k}{2} = \bar{f}_c k b h + n E_c \varepsilon_t^u \left[\frac{k - (1-d/h')}{k} A_s + \frac{k - (1-d_p/h)}{k} \cdot A_{ps} \right] + N_p + N_{cra}$$

$$\frac{f_c'}{3} b h^2 (1-k)^2 + \bar{f}_c k^2 h^2 (1-\beta) + n E_c \varepsilon_t^u \left[\frac{k(1-d/h)}{k} \cdot A_s (kh-a_s) + \frac{k(1-d_p/h)}{k} \cdot A_{ps} (kh-a_p) \right] = -N_p (kh-a_p) - N_f (kh-e)$$

$$\text{令 } \Delta' = \frac{N_{cra}}{b h \varepsilon_t^u E_c}, \text{ 经变换得: } k = \frac{1 + \Delta + \Delta' + n \rho d/h + n \rho_p d_p/h}{1 - 2x}$$

$$\left(1 - \sqrt{\frac{(1-2x) [1 + 2n(1-d/h) \rho d/h + 2n(1-d_p/h) \rho_p d_p/h]}{(1 + \Delta' + \Delta + n \rho d/h + n \rho_p d_p/h)^2}} \right) \quad (16)$$

$$N_{cra} = \frac{b h^2 \bar{f}_c}{e - kh} \left\{ \frac{(1-k)^2}{3xk} + k^2 (1-\beta) + \frac{n}{kx} (\rho d/h [k - (1-d/h)]^2 + \rho_p d_p/h \right.$$

$$\cdot [k - (1 - d/h)^2] + \frac{\Delta}{x} [k - (1 - d_p/h)] \} \quad (17)$$

在基本公式(3)(15)或(16)、(17)中用 $-N_{cra}$ 代 N_{cra} 得到偏心受拉矩形截面的一般抗裂公式。

对轴拉构件,将 $k=1$, $N_p=0$, $A_{ps}=0$, $\sigma_s'=\sigma_s=E_s\cdot\varepsilon_t''$ 代入式(3),并以 $-N_{cra}$ 代 N_{cra} ,则得轴拉构件的抗裂计算公式为:

$$N_{cra}=bh\bar{f}_t+(A_s'+A_s)E_s\cdot\varepsilon_t'' \quad (18)$$

四、结 论

以受拉边缘极限应变为控制参数在平截面假定的基础上推导的混凝土、钢筋混凝土和预应力混凝土构件在受弯条件下的塑性系数计算公式以及偏压、偏拉和轴心受拉条件下的抗裂计算公式,有效地考虑了混凝土和钢筋的作用,意义明确;对由上升段和下降段组成的受拉混凝土应力应变关系,以应变作为开裂标志较应力更为合理。尽管公式比较繁琐,但结合小型电子计算机在已知受拉极限应变的情况下其实用性不受影响。

参 考 文 献

- [1] 高丹盈:“钢筋混凝土短梁正截面抗裂度及其特性的试验研究”,郑州工学院硕士毕业论文
- [2] 赵国藩:“水工钢筋混凝土结构抗裂性(裂缝出现及裂缝扩展)的计算方法”,水利学报,1960.6
- [3] P.Aagren and Harrison:“Strength of concrete Beams and piper at First Crack—A Strain Limit Design Method”,ACI Journal, 1986.

(上接28页)

Boundary Element Method for Free Vibration Analysis of Gravity Dam

Li Qing bin, Zhou Hong jun

(Department of Hydraulic Engineering)

Abstract

In this paper, we use boundary element method, making the domain integral of inertial force to be the integral at the boundary of the field, and have calculated the natural frequencies of gravity dam with an empty reservoir. The computational results are compared with the finite element solutions. The comparison indicates that the method presented in this paper is valid.

Key words: Boundary element, gravity dam, behaviour of free vibration.