再论计量二次抽样方案的ASN的极值

韩芝隆

（数学教研室）

提　　要

二次抽样方案的平均抽检个数（简记为ASN），是选取二次抽样方案的一个极为重要的依据。本文就总体服从Γ—分布的情形，就一类计量二次抽样方案给出ASN的极值。Γ—分布在水文统计、最大风速、最大风压等问题中常用到。本文对了解Γ—分布的二次抽样方案的ASN特性有助益。

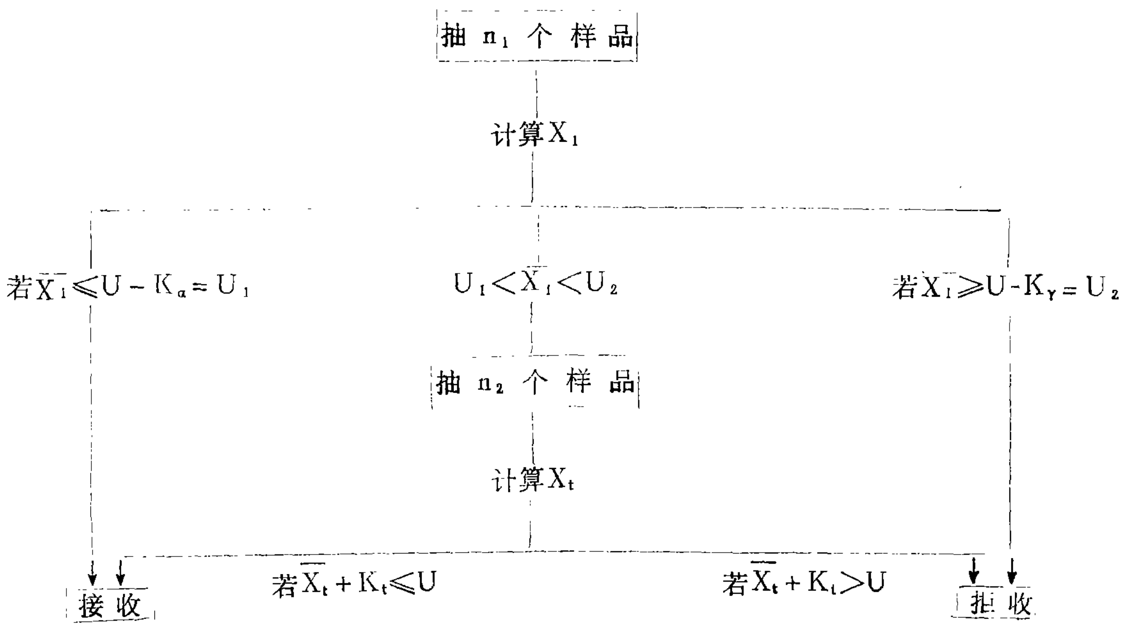
在二次抽样方案中，平均抽检个数（简记为ASN）是选取二次抽样方案的一个极为重要的依据，ASN（P）曲线一般为一单峰铃形曲线，它有一极大值，一般人们总希望ASN的极大值越小越好。本文就总体服从Γ—分布的情形，就一类计量二次抽样方案给出ASN的极值。Γ—分布有时也称为皮尔逊Ⅲ型分布，它在水文统计、最大风速、最大风压等问题中常用到。因此，研究Γ—分布的ASN的极值有一定的实际意义。

设某个产品特征X服从Γ—分布，其密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\beta^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)}x^{\alpha}e^{-\frac{x}{\beta}} & x\geqslant 0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

其中$\alpha>-1$已知，$\beta>0$未知。

我们考虑规定上限的情形，记上限为U，不合格品率$P=P(X>U)$，我们考虑由如下框图所规定的计量二次抽样方案。



其中K_α、K_γ及K_t为判定数组（且$K_\alpha>K_\gamma$），$n_1 n_2$分别为第一样本和第二样本的大小，$\overline{X}_1$为第一样本的均值，$\overline{X}_t$为联合样本的均值。

为求出ASN的极值，先看下面的引理：

引理：设X服从$\Gamma(\alpha,\beta)$分布，$X_1X_2\cdots X_n$为其子样，$\overline{X}=\frac{1}{n}(X_1+X_2+,\cdots+X_n)$则$\overline{X}$服从 $\Gamma\left(n(\alpha+1)-1,\frac{\beta}{n}\right)$分布，即其密度函数为

$$f_{\overline{x}}(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\left(\frac{\beta}{n}\right)^{n(\alpha+1)}\Gamma(n(\alpha+1))}y^{n(\alpha+1)-1}e^{-ny/\beta} & y\geqslant 0\\ 0 & y<0\end{cases}$$

证明：由特征函数定义，X的特征函数

$$\varphi_0(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{itx}dx=\int_0^{+\infty}e^{itx}\cdot\frac{1}{\beta^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)}x^\alpha e^{-\frac{x}{\beta}}dx$$

$$=\frac{1}{\beta^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)}\int_0^{+\infty}x^\alpha\cdot e^{-\frac{1-i\beta t}{\beta}x}dx$$

令$\frac{1-i\beta t}{\beta}x=y$ $\frac{1}{\beta^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)}\int_0^{+\infty}\frac{\beta^{\alpha+1}}{(1-i\beta t)^{\alpha+1}}y^\alpha e^{-y}dy$

$$=\frac{1}{(1-i\beta t)^{\alpha+1}}$$

$\therefore\overline{X}$的特征函数

$$\varphi(t)=\left[\varphi_0\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n=\left(\frac{1}{\left(1-i\beta\frac{t}{n}\right)^{\alpha+1}}\right)^n=\frac{1}{\left(1-i\frac{\beta}{n}t\right)^{n\alpha+n}}$$

$$=\frac{1}{\left(1-i\frac{\beta}{n}t\right)^{(n\alpha+n-1)+1}}$$

由唯一性定理知$\overline{X}\sim\Gamma\left(n(\alpha+1)-1,\frac{\beta}{n}\right)$分布，引理得证。

由上面框图可知

$$ASN(P)=n_1+n_2[1-P(\overline{X}_1\leqslant U_1)-P(\overline{X}_1\geqslant U_2)]$$

$$=n_1+n_2[P(\overline{X}_1\leqslant U_2)-P(\overline{X}_1\leqslant U_1)]$$

$$\therefore \frac{dASN(P)}{dP}=n_2\left(\frac{dP(\overline{X}_1\leqslant U_2)}{dP}-\frac{dP(\overline{X}_1\leqslant U_1)}{dP}\right)$$

而 $$\frac{dP(\overline{X}_1\leqslant U_2)}{dP}=\frac{d}{dP}\int_0^{U_2}\frac{1}{(\frac{\beta}{n_1})^{n_1(\alpha+1)}\Gamma(n_1(\alpha+1))}y^{n_1(\alpha+1)-1}e^{-\frac{n_1y}{\beta}}dy$$

$$\underline{\underline{令\frac{n_1y}{\beta}=t}}\ \frac{d}{dP}\int_0^{\frac{n_1U_2}{\beta}}\frac{1}{(\frac{\beta}{n_1})^{n_1(\alpha+1)}\Gamma(n_1(\alpha+1))}(\frac{\beta}{n_1})^{n_1(\alpha+1)-1}t^{n_1(\alpha+1)-1}e^{-t}\cdot\frac{\beta}{n_1}dt$$

$$=\frac{d}{dP}\int_0^{\frac{n_1U_2}{\beta}}\frac{1}{\Gamma(n_1(\alpha+1))}t^{n_1(\alpha+1)-1}e^{-t}dt$$

$$=\frac{1}{\Gamma(n_1(\alpha+1))}(\frac{n_1U_2}{\beta})^{n_1(\alpha+1)-1}e^{-\frac{n_1U_2}{\beta}}(-\frac{n_1U_2}{\beta^2})\frac{d\beta}{dP}$$

$$=\frac{-1}{\Gamma(n_1(\alpha+1))}\cdot\frac{(n_1U_2)^{n_1(\alpha+1)}}{\beta^{n_1(\alpha+1)+1}}e^{-\frac{n_1U_2}{\beta}}\frac{d\beta}{dP}$$

同样 $$\frac{d}{dP}P(\overline{X}_1\leqslant U_1)=-\frac{1}{\Gamma(n_1(\alpha+1))}\cdot\frac{(n_1U_1)^{n_1(\alpha+1)}}{\beta^{n_1(\alpha+1)+1}}e^{-\frac{n_1U_1}{\beta}}\frac{d\beta}{dP}$$

而 $$P=P(X>U)=1-P(X\leqslant U)=1-\int_0^U\frac{1}{\beta^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)}x^{\alpha}e^{-\frac{x}{\beta}}dx$$

$$\underline{\underline{令\frac{x}{\beta}=y}}\ 1-\int_0^{\frac{U}{\beta}}\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}y^{\alpha}e^{-y}dy\ \underline{\underline{记为}}\ \varphi(\beta)$$

$$\therefore\quad \frac{dP}{d\beta}=-\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}(\frac{U}{\beta})^{\alpha}e^{-\frac{U}{\beta}}(-\frac{U}{\beta^2})=\frac{U^{\alpha+1}e^{-\frac{U}{\beta}}}{\Gamma(\alpha+1)\beta^{\alpha+2}}=\varphi'(\beta)$$

则 $$\frac{d\beta}{dP}=\frac{1}{\varphi'(\beta)}=\frac{\beta^{\alpha+2}\gamma\Gamma(\alpha+1)}{U^{\alpha+1}}e^{\frac{U}{\beta}}$$

$$\therefore\quad \frac{dASN(P)}{dP}=n_2\left(\frac{-1}{\Gamma(n_1(\alpha+1))}\cdot\frac{(n_1U_2)^{n_1(\alpha+1)}}{\beta^{n_1(\alpha+1)+1}}e^{-\frac{n_1U_2}{\beta}}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\Gamma(n_1(\alpha+1))}\frac{(n_1U_1)^{n_1(\alpha+1)}}{\beta^{n_1(\alpha+1)+1}}e^{-\frac{n_1U_1}{\beta}}\right)\frac{d\beta}{dP}$$

$\because\quad \frac{d\beta}{dP}>0\qquad(\beta>0)\qquad$ 令 $\frac{dASN(P)}{dP}=0\qquad$ 得

$$(n_1U_2)^{n_1(\alpha+1)}e^{-\frac{n_1U_2}{\beta}}=(n_1U_1)^{n_1(\alpha+1)}e^{-\frac{n_1U_1}{\beta}}$$

$$\left(\frac{U_2}{U_1}\right)^{n_1(\alpha+1)}=e^{\frac{n_1}{\beta}(U_2-U_1)}$$

$$\frac{n_1}{\beta}(U_2-U_1)=n_1(\alpha+1)\ln\frac{U_2}{U_1}$$

$$\therefore\quad \beta_0=\frac{U_2-U_1}{\alpha+1}\cdot\frac{1}{\ln\frac{U_2}{U_1}}=\frac{K_\alpha-K_\gamma}{\alpha+1}\cdot\frac{1}{\ln\frac{U-K_1}{U-K_\alpha}}$$

当$\beta<\beta_0$时，$\frac{n_1}{\beta}(U_2-U_1)>n_1(\alpha+1)\ln\frac{U_2}{U_1}$

$$e^{\frac{n_1}{\beta}(U_2-U_1)}>\left(\frac{U_2}{U_1}\right)^{n_1(\alpha+1)}$$

$$(n_1U_1)^{n_1(\alpha+1)}e^{-\frac{n_1U_1}{\beta}}>(n_1U_2)^{n_1(\alpha+1)}e^{-\frac{n_1U_2}{\beta}}$$

$$\therefore\quad \frac{dASN(P)}{dP}>0$$

同样，当$\beta>\beta_0$时，$\frac{dASN(P)}{dP}<0$

而 $P=1-\int_0^{\frac{U}{\beta}}\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}y^\alpha e^{-y}dy=\varphi(\beta)$为$\beta$的增函数

故当 $P<P_0=\varphi(\beta_0)$时 $\frac{dASN(P)}{dP}>0$

当 $P>P_0=\varphi(\beta_0)$时 $\frac{dASN(P)}{dP}<0$

$$\therefore\quad P_0=\varphi(\beta_0)=1-\int_0^{\frac{U}{\beta_0}}\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}y^\alpha e^{-y}dy$$

$$=1-\int_0^{\frac{U}{\beta_0}}\frac{y^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\left(1-y+\frac{y^2}{2!}-\frac{y^3}{3!}+\cdots\right)dy$$

$$=1-\frac{\left(\frac{U}{\beta_0}\right)^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)}\left(\frac{1}{\alpha+1}-\frac{\frac{U}{\beta_0}}{\alpha+2}+\frac{\left(\frac{U}{\beta_0}\right)^2}{(\alpha+3)2!}-\frac{\left(\frac{U}{\beta_0}\right)^3}{(\alpha+4)3!}+\cdots\right)$$

为ASN（P）的极大值点。

$\because \quad ASN(P)=n_1+n_2[P(\overline{X}_1\leqslant U_2)-P(\overline{X}_1\leqslant U_1)]$

$$\therefore \quad ASN_{极大}=n_1+n_2\left(\int_0^{U_2}\frac{1}{(\frac{\beta_0}{n_1})^{n_1(\alpha+1)}\Gamma(n_1(\alpha+1))}y^{n_1(\alpha+1)-1}e^{-\frac{n_1y}{\beta_0}}dy-\int_0^{U_1}\frac{1}{(\frac{\beta_0}{n_1})^{n_1(\alpha+1)}\Gamma(n_1(\alpha+1))}y^{n_1(\alpha+1)-1}e^{-\frac{n_1y}{\beta_0}}dy\right)$$

令$\frac{n_1y}{\beta_0}=t$

$$n_1+n_2\frac{1}{\Gamma(n_1(\alpha+1))}\left(\int_0^{\frac{n_1U_2}{\beta_0}}t^{n_1(\alpha+1)-1}e^{-t}dt-\int_0^{\frac{n_1U_1}{\beta_0}}t^{n_1(\alpha+1)-1}e^{-t}dt\right)$$

而

$$\int_0^{\frac{n_1U_2}{\beta_0}}t^{n_1(\alpha+1)-1}e^{-t}dt=\int_0^{\frac{n_1U_2}{\beta_0}}t^{n_1(\alpha+1)-1}[1-\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}-\frac{t^3}{3!}+\cdots]dt$$

$$=(\frac{n_1U_2}{\beta_0})^{n_1(\alpha+1)}\left(\frac{1}{n_1(\alpha+1)}-\frac{\frac{n_1U_2}{\beta_0}}{n_1(\alpha+1)+1}+\frac{(\frac{n_1U_2}{\beta_0})^2}{[n_1(\alpha+1)+2]2!}-\frac{(\frac{n_1U_2}{\beta_0})^3}{[n_1(\alpha+1)+3]3!}+\cdots\right.$$

同理可得

$$\int_0^{\frac{n_1U_1}{\beta_0}}t^{n_1(\alpha+1)-1}e^{-t}dt=(\frac{n_1U_1}{\beta_0})^{n_1(\alpha+1)}\left(\frac{1}{n_1(\alpha+1)}-\frac{\frac{n_1U_1}{\beta_0}}{n_1(\alpha+1)+1}+\frac{(\frac{n_1U_1}{\beta_0})^2}{[n_1(\alpha+1)+2]2!}\right.$$

$$\left.-\frac{(\frac{n_1U_1}{\beta_0})^3}{[n_1(\alpha+1)+3]3!}+\cdots\right)$$

$$\therefore \quad ASN_{极大}=n_1+n_2\frac{(\frac{n_1U_2}{\beta_0})^{n_1(\alpha+1)}}{\Gamma(n_1(\alpha+1))}\left(\frac{1}{n_1(\alpha+1)}-\frac{\frac{n_1U_2}{\beta_0}}{n_1(\alpha+1)+1}+\right.$$

$$\left.+\frac{(\frac{n_1U_2}{\beta_0})^2}{[n_1(\alpha+1)+2]2!}-\frac{(\frac{n_1U_2}{\beta_0})^3}{[n_1(\alpha+1)+3]3!}+\cdots\right)-$$

$$-\frac{(\frac{n_1U_1}{\beta_0})^{n_1(\alpha+1)}}{\Gamma(n_1(\alpha+1))}\left(\frac{1}{n_1(\alpha+1)}-\frac{\frac{n_1U_1}{\beta_0}}{n_1(\alpha+1)+1}+\frac{(\frac{n_1U_1}{\beta_0})^2}{[n_1(\alpha+1)+2]2!}\right.$$

$$\left.-\frac{(\frac{n_1U_1}{\beta_0})^3}{[n_1(\alpha+1)+3]3!}+\cdots\right)$$

郭同德、韩芝隆的结果[4]是上式的一个特例：令$\alpha=0$，$\beta_0=\frac{1}{\lambda_0}$再利用逐项微分逐项积分法

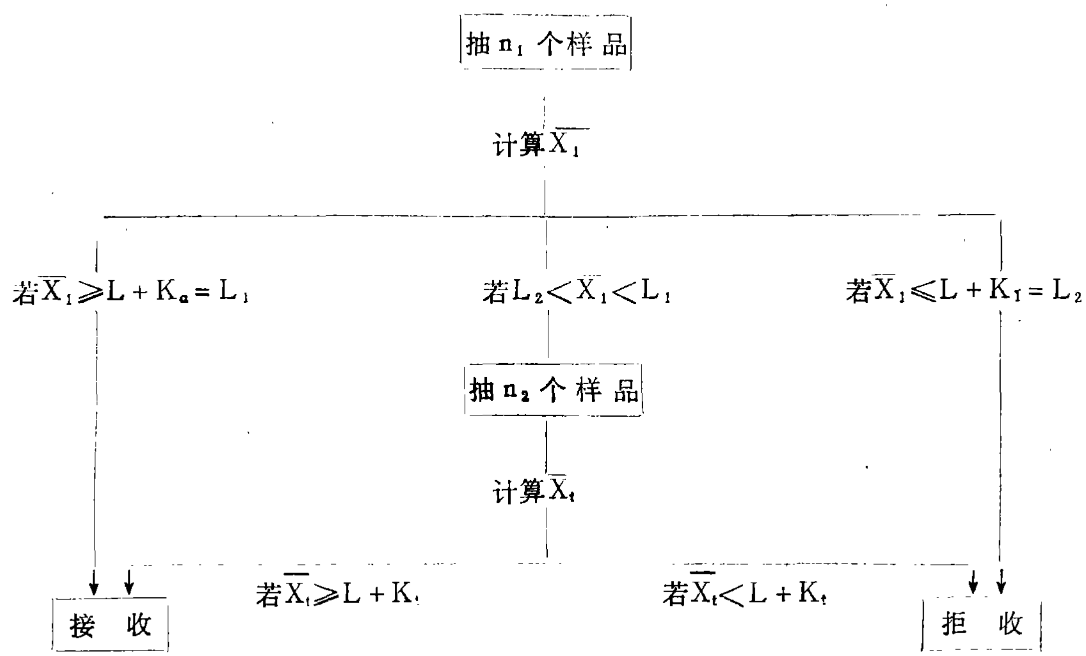
求级数的和，上式就变成

$$ASN_{极大}=n_1+n_2\left(\left(1+n_1\lambda_0U_1+\cdots+\frac{(n_1\lambda_0U_1)^{n_1-1}}{(n_1-1)!}\right)e^{-n_1\lambda_0U_1}\right.$$

$$\left.-\left(1+n_1\lambda_0U_2+\cdots+\frac{(n_1\lambda_0U_2)^{n_1-1}}{(n_1-1)!}\right)e^{-n_1\lambda_0U_2}\right)$$

这正是〔4〕中的结果。

同样，对于规定下限的情形，设下限为L不合格品率$P=P(X<L)$，我们考虑由如下框图所规定的计量二次抽样方案。



其中K_α，K_r及K_t为判定数组，n_1与n_2分别为第一样本与第二样本的大小，$\overline{X}_1$为第一样本的均值，$\overline{X}_t$为联合样本的均值，则

$$P_0=\int_0^{\frac{L}{\beta_0}}\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}y^\alpha e^{-y}dy=\frac{\left(\frac{L}{\beta_0}\right)^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)}\left(\frac{1}{\alpha+1}-\frac{\frac{L}{\beta_0}}{\alpha+2}+\frac{\left(\frac{L}{\beta_0}\right)^2}{(\alpha+3)2!}\right.$$

$$\left.-\frac{\left(\frac{L}{\beta_0}\right)^3}{(\alpha+4)3!}+\cdots\right)$$ 为ASN(P)的极大值点。

$$\beta_0=\frac{K_r-K_\alpha}{\alpha+1}\frac{1}{\ln(L+K_r)-\ln(L+K_\alpha)}$$

（下转122页）

参 考 文 献

[1] 武振国，郑州工学院学报，第二期，128（1982）。

[2] Irving M. Klotz, Robert M. Rosenberg, Chemical Thermodynamics.，321—331(1972)。

[3] [美]V·尔德弗H·F·哈梅卡U. 布卢克斯著， 薛宽宏等译，物理化学，高等教育出版社，145—146(1984)。

[4] Gilbert W. Castellan, Phsical Chemistry.，Addison—wesley Publishing Company, INC. 320—322（1964）。

（上接114页）

$$ASN_{极大}=n_1+n_2\cdot\frac{1}{\Gamma(n_1(\alpha+1))}\left((\frac{n_1L_1}{\beta_0})^{n_1(\alpha+1)}\left(\frac{1}{n_1(\alpha+1)}-\frac{\frac{n_1L_1}{\beta_0}}{n_1(\alpha+1)+1}+\frac{(\frac{n_1L_1}{\beta_0})^2}{[n_1(\alpha+1)+2]2!}-\frac{(\frac{n_1L_1}{\beta_0})^3}{[n_1(\alpha+1)+3]3!}+\cdots\right)\right.$$

$$\left.-(\frac{n_1L_2}{\beta_0})^{n_1(\alpha+1)}\left(\frac{1}{n_1(\alpha+1)}-\frac{\frac{n_1L_2}{\beta_0}}{n_1(\alpha+1)+1}+\frac{(\frac{n_1L_2}{\beta_0})^2}{[n_1(\alpha+1)+2]2!}-\frac{(\frac{n_1L_2}{\beta_0})^3}{[n_1(\alpha+1)+3]3!}+\cdots\right)\right)$$

其证明与规定上限时的情形相同。

参 考 文 献

[1] 《工业应用统计》 马毅林编

[2] 《应用数学学报》第六卷第一期 1983.1

[3] 《概率论及数理统计》 中山大学数学系编

[4] 《一类计量二次抽样方案的ASN的极值》 郑州工学院学报 1986年第一期