用Riemann—Hilbert问题解裂纹体的复应力函数

方树德　　韩连元

（郑州纺织机电专科学校力学教研室）　　（郑州工学院力学教研室）

提　要

在求解二维断裂力学问题，尤其在设计构件需要计算裂纹体上的应力场和位移场时，确定满足给定边界条件的两个解析应力函数φ（Z）、Ψ（Z）及其结构形式是极为重要的。

本文把Riemann—Hilbert问题用于解裂纹体应力函数上，给出应力函数结构的表达式。用该式可以求解无限大体穿透裂纹在任意受力状态下的应力函数和应力强度因子值，同时对有限体非穿透裂纹亦可采用裂纹结构的形状因子加以修正。因此，R—H问题给出的应力函数结构式具有普遍的适应性。

一、二维断裂力学的基本公式与R—H问题的提法

基本公式：

$$\sigma_x+\sigma_y=2[\varphi'(z)+\overline{\varphi'(z)}]=4R_e\varphi'(z)$$

$$\sigma_y-\sigma_x+2i\tau_{xy}=2[\bar{z}\varphi''(\bar{z})+\psi'(z)]$$

$$2\mu(u+iv)=\chi\varphi(z)-z\overline{\varphi'(z)}-\overline{\psi(z)}$$

$$K=2\sqrt{2}\lim_{z\leftarrow z_1}\left\{(z-z_1)^{\frac{1}{2}}\varphi'(z)\right\}$$

式中，φ(z)、ψ(z)是两个满足给定边界条件的解析应力函数。

R—H问题的提法：

R—H问题也称联结问题，它是用复变函数法求解裂纹体应力函数的一个扩展。提法：设L为复平面z上的一条光滑曲线(开口或闭口)见图1。

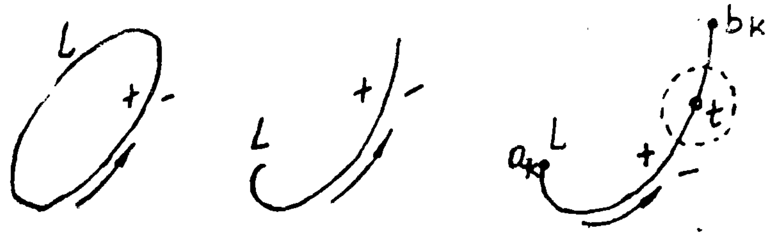


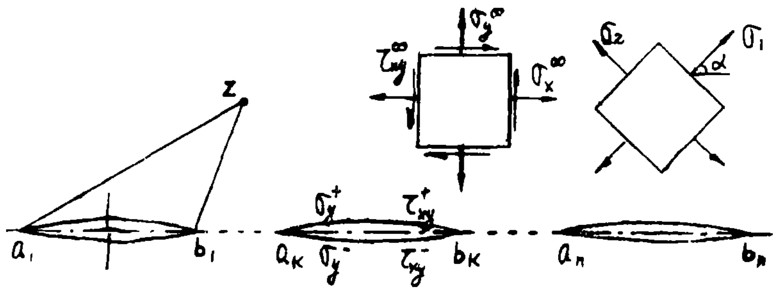
图1

若$g(t)$、$f(t)$为L上定义的已知函数，且在L上满足Hölder条件[1]，除在L线端点(a_k、b_k)外，$g(t)\neq 0$。如果未知函数$F(z)$在曲线L的左、右边值记为$F^+(t)$、$F^-(t)$，满足给定条件：

$F^+(t)-g(t)\cdot F^-(t)=f(t)$时，则欲求域内未知函数$F(z)$（分区解析函数）的问题就是联结问题。〔[1]设$f(t)=f_1(t)+if_2(t)$为曲线L上点t的某函数，若对曲线L上的每两点$t_1$,$t_2$皆存在不等式$|f(t_1)-f(t_2)|\leqslant A|t_1-t_2|^{\mu}$，A、μ为正的常量，且$0\leqslant\mu<1$时，则称$f(t)$在L上满足Hölder条件。〕

二、用R—H问题求裂纹体复应力函数的解析

设有一n个共线裂纹群，见图2。远方应力为σ_y^{∞}，σ_x^{∞}，τ_{xy}^{∞}，对应的远方主应力和主



方向为σ_1，σ_2，α。由坐标转换式，则有：

$$\left.\begin{aligned}\Gamma&=\frac{1}{4}(\sigma_y^{\infty}+\sigma_x^{\infty})=\frac{1}{4}(\sigma_1+\sigma_2)\\ \Gamma_1&=\frac{1}{2}(\sigma_y^{\infty}-\sigma_x^{\infty}+2i\tau_{xy}^{\infty})=-\frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_2)e^{-i2\alpha}\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(1)$$

由此，已知σ_1，σ_2，α，则Γ，Γ_1可求。

令，
$$\left.\begin{aligned}&\phi(z)=\varphi'(z)，\Psi(z)=\psi'(z)\\ &\Omega(z)=\bar{\phi}(z)+Z\bar{\phi}'(z)+\bar{\Psi}(z)\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(2a)$$

则有：
$$\left.\begin{aligned}&\Omega(\bar{z})=\overline{\phi(z)}+\overline{Z'\phi'(z)}+\overline{\phi(z)}\\ &\bar{\Omega}(z)=\phi(z)+Z\phi'(z)+\Psi(z)\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(2b)$$

代入基本公式得：

$$\left.\begin{aligned}&\sigma_y+\sigma_x=4\mathrm{Re}\varphi'(z)=4\mathrm{Re}\phi(z)\\ &\sigma_y-\sigma_x+2i\tau_{xy}=2[(\bar{z}-z)\phi'(z)+\Omega(z)-\phi(z)]\\ &\sigma_y-i\tau_{xy}=(z-\bar{z})\phi'(z)+\phi(z)+\Omega(\bar{z})\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(3)$$

由式(2a)、式(2b)积分得：

$$W(z)=\int\Omega(z)dz=z\bar{\phi}(z)+\bar{\psi}(z)+\mathrm{const}$$

$$W(\bar{z}) = \int \Omega(\bar{z})\,dz = z\overline{\phi(z)} + \overline{\psi(z)} + \text{const}$$

将其代入位移边界条件式，有：

$$2\mu(u+iv) = \chi \int \phi(z)dz - \int \Omega(\bar{z})\,d\bar{z} - (z-\bar{z})\overline{\phi(z)} + \text{const} \quad \cdots\cdots(4)$$

当考虑复数z从裂纹的上（下）侧趋向裂纹表面某点t时，即$z \to \bar{z}$，则由式（3）可知裂纹面上的应力边界条件应满足：

$$\left.\begin{aligned} &\phi^+(t) + \Omega^-(t) = \sigma_y^+ - i\tau_{xy}^+ \\ &\phi^-(t) + \Omega^+(t) = \sigma_y^- - i\tau_{xy}^- \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(5a)$$

将式（5a）相加减，有：

$$\left.\begin{aligned} &[\phi(t) + \Omega(t)]^+ + [\phi(t) + \Omega(t)]^- = 2p(t) \\ &[\phi(t) - \Omega(t)]^+ - [\phi(t) - \Omega(t)]^- = 2q(t) \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(5b)$$

$$p(t) = \frac{1}{2}(\sigma_y^+ + \sigma_y^-) - \frac{1}{2}i(\tau_{xy}^+ + \tau_{xy}^-)$$

$$q(t) = \frac{1}{2}(\sigma_y^+ - \sigma_y^-) - \frac{1}{2}i(\tau_{xy}^+ - \tau_{xy}^-)$$

又由复应力的单值函数表达式知：

$$\varphi(z) = -\frac{X+iY}{2\pi(1+\chi)}\ln z + \Gamma z + \varphi^0(z)$$

$$\psi(z) = \frac{\chi(X-iY)}{2\pi(1+\chi)}\ln z + \Gamma_1 z + \psi^0(z)$$

Γ、Γ_1——远方应力参量。

X、Y——裂纹面上外应力的主矢量。

$$\varphi^0(z) = a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \cdots\cdots$$

$$\psi^0(z) = b_0 + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \cdots\cdots$$

考虑当$|z|$足够大时，上式求导后变成：

$$\left.\begin{aligned} &\varphi'(z) = \phi(z) = -\frac{X+iY}{2\pi(1+\chi)}\frac{1}{z} + \Gamma + 0\left(\frac{1}{z^2}\right) \\ &\psi'(z) = \Psi(z) = \frac{\chi(X-iY)}{2\pi(1+\chi)}\frac{1}{z} + \Gamma_1 + 0\left(\frac{1}{z^2}\right) \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(6a)$$

将式（6a）代入式（2α），得：

$$\Omega(z) = \Gamma + \overline{\Gamma}_1 + \frac{\chi(X+iY)}{2\pi(1+\chi)}\cdot\frac{1}{z} \quad \cdots\cdots(6b)$$

将式（6a）与式（6b）相加减，当$Z \to \infty$时，在无限远处的边界应力条件为：

$$\left.\begin{aligned}&\phi(\infty)+\Omega(\infty)=2\Gamma+\Gamma_1\\&\phi(\infty)-\Omega(\infty)=-\overline{\Gamma}_1\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(7)$$

可以推证，满足内应力边界条件式（5a）和外应力边界条件式（7）的函数解答（推证见文献〔1〕）为：

$$\left.\begin{aligned}&\phi(z)+\Omega(z)=\frac{1}{\pi iX(z)}\int_L\frac{X(t)p(t)}{t-z}dt+\frac{2p_n(z)}{X(z)}\\&\phi(z)-\Omega(z)=\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{q(t)}{t-z}dt-\overline{\Gamma}_1\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(8)$$

$P_n(z)=C_nZ^n+C_{n-1}Z^{n-1}+\cdots\cdots+C_0$（多项式）

$X(z)=[(z-a_n)(z-b_n)\cdots(z-a_k)(z-b_k)\cdots(z-a_1)(z-b_1)]^{\frac{1}{2}}$

t—裂纹表面上某点的坐标。

α_k、b_k—裂纹尖端坐标。

C_n，C_{n-1}，……C_0　　由内、外边界条件确定的待定系数。

将式（8）相加减，有：

$$\left.\begin{aligned}&\phi(z)=\phi_0(z)+\frac{P_n(z)}{X(z)}-\frac{1}{2}\Gamma_1\\&\Omega(z)=\Omega_0(z)+\frac{P_n(z)}{X(z)}+\frac{1}{2}\overline{\Gamma}_1\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(9\alpha)$$

$$\phi_0(z)=\frac{1}{2\pi iX(z)}\int_L\frac{X(t)p(t)}{t-z}dt+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{q(t)}{t-z}dt$$

$$\Omega_0(z)=\frac{1}{2\pi iX(z)}\int_L\frac{X(t)p(t)}{t-z}dt-\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{q(t)}{t-z}dt$$

由无限远边界条件式（7）知：

$$\phi(\infty)=\Gamma=\frac{1}{4}(\sigma_1+\sigma_2),\ \phi_0(\infty)=0,\ \lim_{z\to\infty}\frac{X(z)}{z^n}=1$$

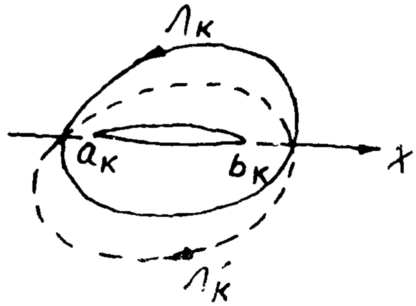
代入式（9a），定出首项系数c_n值：

$$C_n=\Gamma+\frac{1}{2}\overline{\Gamma}_1=\frac{1}{4}(\sigma_1+\sigma_2)-\frac{1}{4}(\sigma_1-\sigma_2)e^{i2\alpha}\quad\cdots\cdots(9b)$$

其余系数C_{n-1}，C_{n-2}……C_0 则由裂纹表面位移单值条件来确定。位移单值条件式为：由式(4)，当z趋于裂纹面上某一点t，则$z\to z_1$，z绕包围线段$L_k=\alpha_kb_k$的封闭回路Π_k一周，并收缩于线段L_k时（见图3），则回路积分总值为零。即有：

$$\chi\oint_{\Pi_k}\phi(z)dz-\oint_{\Pi'_k}\Omega(\overline{z})\overline{dz}=0\cdots\cdots(10a)$$

由式（9a），并注意$X^+(t)=-X^-(t)=X(t)$，当Π_k、Π'_k分别收缩于裂纹表面附近时，则有：



$$\oint_{\Pi_k}\phi(z)\,dz=-\int_{a_k}^{b_k}[\phi_0^+(t)-\phi_0^-(t)]dt-2\int_{a_k}^{b_k}\frac{P_n(t)}{X^+(t)}dt$$

$$-\oint_{\Pi_k'}\Omega(\bar z)\,d\bar z=-\int_{a_k}^{b_k}[\Omega_0^+(t)-\Omega_0^-(t)]dt-2\int_{a_k}^{b_k}\frac{P_n(t)}{X^+(t)}dt$$

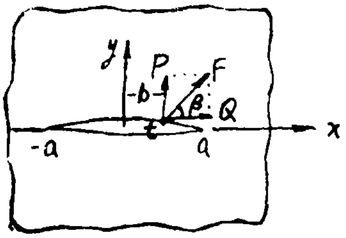
故式（10_a）可表达为：

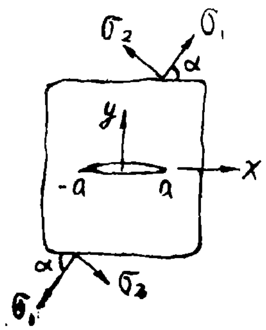
$$2(\chi+1)\int_{a_k}^{b_k}\frac{P_n(t)}{X(t)}dt+\chi\int_{a_k}^{b_k}[\phi^+{}_0(t)-\phi^-{}_0(t)]dt+\int_{a_k}^{b_k}[\Omega^+{}_0(t)-\Omega_0^-(t)]dt=0\qquad(k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(10b)$$

由式（10b）把系数C_{n-1}，C_{n-2}，………，C_0确定之后，连同式（9b)代入式(9a）即可定出$\Phi(z)$和$\Omega(z)$的结构式，从而也就确定了$\varphi(z)$和$\psi(z)$的结构。

三、两类不同受力状态的应力函数结构式

两类不同受力状态如图4、图5所示。





1．图4为远方应力自由、裂纹表面上作用有任意力。

远方应力，$\sigma_1=\sigma_2=0$　　∴　$\Gamma=\Gamma_1=0$

裂表受力，$P=F\cdot\sin\beta$，　　$Q=F\cdot\cos\beta$

用δ函数表示裂纹表面上的应力：

$$\left.\begin{aligned}\sigma_y^+ &= -p\delta(t-b),\ \sigma_y^- = 0\\ \tau_{xy}^+ &= -Q\delta(t-b),\ \tau_{xy}^- = 0\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(11)$$

则，$p(t)=q(t)=-\frac{p-iQ}{2}\delta(t-b)$

按式(9a)则：

$$\left.\begin{aligned}\phi(z) &= \phi_0(z)+\frac{P_1(z)}{X(z)}\\ \Omega(z) &= \Omega_0(z)+\frac{P_1(z)}{X(z)}\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(12)$$

由式(9b)：$c_1=\Gamma+\frac{1}{2}\Gamma_1=0$，故$P_1(z)=c_1z+c_0=c_0$，而$X(z)=[(z-a)^{\frac{1}{2}}\cdot(z+a)]^{\frac{1}{2}}=(z^2-a^2)^{\frac{1}{2}}$

令$H_1(z)=-\frac{P-iQ}{4\pi iX(z)}\int_L\frac{X^+(t)\delta(t-b)}{t-z}dt=\frac{P-iQ}{4\pi iX(z)}$

$$\cdot\int_L\frac{X^+(t)\delta(t-b)}{z-t}dt$$

$$H_2(z)=-\frac{P-iQ}{4\pi i}\int_L\frac{\delta(t-b)}{t-b}dt=\frac{P-iQ}{4\pi i}\int_L\frac{\delta(t-b)}{b-t}dt$$

故　$\phi_0(z)=H_1(z)+H_2(z)$，$\Omega_0(z)=H_1(z)-H_2(z)$

由此可写成：

$$\phi_0^+(t)-\phi_0^-(t)=[H_1^+(t)-H_1^-(t)]+[H_2^+(t)-H_2^-(t)]$$

$$\Omega_0^+(t)-\Omega_0^-(t)=[H_1^+(t)-H_1^-(t)]-[H_2^+(t)-H_2^-(t)]$$

运用plemelj公式及δ函数积分，注意$X^+(t)=-X^-(t)=X(t)$，并代入式(10b)得，

$$2(\chi+1)\int_{-a}^{a}\frac{c_0}{\sqrt{t^2-a^2}}+(\chi+1)\int_{-a}^{a}\frac{(P-iQ)X^+(b)}{2\pi iX^+(t)}\cdot\frac{1}{b-t}dt-(\chi-1)$$

$$\cdot\int_{-a}^{a}\frac{(P-iQ)}{2}\delta(t-b)dt=0$$

运用柯西积分、δ函数积分及留数定理分解上式，将所得结果代入式(10b)、式(12)得出应力函数结构式为：

$$\left.\begin{aligned}\phi(z) &= \frac{P-iQ}{4\pi i}\left[\left(\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{\sqrt{z^2-a^2}}+1\right)(z-b)^{-1}-\left(\frac{\chi-1}{\chi+1}\right)\frac{1}{\sqrt{z^2-a^2}}\right]\\ \Omega(z) &= \frac{P-iQ}{4\pi i}\left[\left(\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{\sqrt{z^2-a^2}}-1\right)(z-b)^{-1}-\left(\frac{\chi-1}{\chi+1}\right)\frac{1}{\sqrt{z^2-a^2}}\right]\end{aligned}\right\}\cdots(13)$$

应力强度因子表达式为：

$$K_{*}=2\sqrt{2}\lim_{z\to z_1}\{(z-z_1)^{\frac{1}{2}}\phi(z)\}$$，注意到$z_1\to\alpha$，

则，$K_{*}=\left[\frac{Q}{2\pi\sqrt{a}}\left(\frac{\chi-1}{\chi+1}\right)+\frac{P}{2\pi\sqrt{a}}\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\right]-i\left[\frac{Q}{2\pi\sqrt{a}}\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}-\frac{P}{2\pi\sqrt{a}}\left(\frac{\chi-1}{\chi+1}\right)\right]$

2.图5为裂表应力自由，远方作用有任意力。

由于裂表应力自由，使问题简单化。

$\sigma_y^+=\sigma_y^-=0$，　$\tau_{xy}^+=\tau_{xy}^-=0$，所以，

$\phi_0(z)=\Omega_0(z)=0$　由式（9a）知：

$$\phi(z)=\frac{P_1(z)}{X(z)}-\frac{1}{2}\bar{\Gamma}_1$$

$$\Omega(z)=\frac{P_1(z)}{X(z)}+\frac{1}{2}\bar{\Gamma}_1$$

将式（1）、式（8）、式（9b）的有关参量代入上式得：

$$\left.\begin{aligned}\phi(z)&=\left[\frac{\sigma_1(1-e^{i2\alpha})+\sigma_2(1+e^{i2\alpha})}{4}\right]\frac{z}{\sqrt{z^2-a^2}}+\frac{(\sigma_1-\sigma_2)e^{i2\alpha}}{4}\\ \Omega(z)&=\left[\frac{\sigma_1(1-e^{i2\alpha})+\sigma_2(1+e^{i2\alpha})}{4}\right]\frac{z}{\sqrt{z^2-a^2}}-\frac{(\sigma_1-\sigma_2)e^{i2\alpha}}{4}\end{aligned}\right\}\cdots(14)$$

应力强度因子表达式为：

$$K_{*}=2\sqrt{2}\lim_{z\to z_1}\{(z-z_1)^{\frac{1}{2}}\phi(z)\}$$，注意到$z_1\to a$，

$$K_{*}=\frac{1}{2}\sqrt{a}\{[\sigma_1(1-\cos2\alpha)+\sigma_2(1+\cos2\alpha)]-i(\sigma_1-\sigma_2)\sin2\alpha\}$$

以上所得式（13）、式（14）是两类不同受力状态的应力函数结构的通解式。有了这个通解式再由积分并附以边界条件即定出$\varphi(z)$、$\psi(z)$值。

四、验　证

选取两个常见的受力状态（见图6、图7）予以简证。

1.求图6受力状态的应力函数结构式及强度因子。分析图6则有：$Q=0$，p对称。

由式（13）知：$\phi(z)=\frac{P}{4\pi i}\left[\left(\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{\sqrt{z^2-a^2}}+1\right)(z-b)^{-1}-\right.$

$\left.-\left(\frac{\chi-1}{\chi+1}\right)\frac{1}{\sqrt{z^2-a^2}}\right]+\frac{P}{4\pi i}\left[\left(\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{\sqrt{z^2-a^2}}-1\right)(z-b)^{-1}+\left(\frac{\chi-1}{\chi+1}\right)\frac{1}{\sqrt{z^2-a^2}}\right]$

$$\therefore\quad\phi(z)=\frac{P}{2\pi i}\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{(z-b)\sqrt{z^2-a^2}}$$

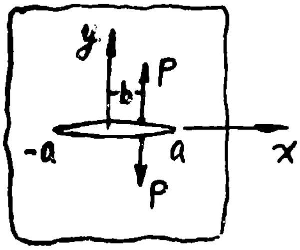


图 6

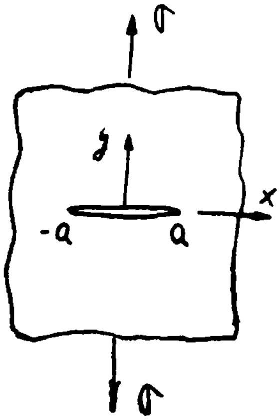


图 7

$$\Omega(z)=\frac{P}{4\pi i}\left[\left(\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{\sqrt{z^2-a^2}}-1\right)(z-b)^{-1}-\left(\frac{\chi-1}{\chi+1}\right)\frac{1}{\sqrt{z^2-a^2}}\right]+$$

$$+\frac{P}{4\pi i}\left[\left(\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{\sqrt{z^2-a^2}}+1\right)(z-b)^{-1}+\left(\frac{\chi-1}{\chi+1}\right)\frac{1}{\sqrt{z^2-a^2}}\right]$$

$$\therefore\qquad \Omega(z)=\frac{P}{2\pi i}\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{(z-b)\sqrt{z^2-a^2}}$$

强度因子为：

$$K_{I}=2\sqrt{2}\lim_{z\to z_1}\{(z-z_1)^{\frac{1}{2}}\phi(z)\}=\frac{P}{\pi\sqrt{a}}\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}-i0$$

以上所得结果与文献给出完全符合。

2、求图7受力状态的应力函数结构式及强度因子。分析图7则有：$\sigma_1=\sigma$，$\sigma_2=0$，$\alpha=\frac{\pi}{2}$

由式（14）知：$\phi(z)=\frac{1}{4}\sigma\left[\frac{2z}{\sqrt{z^2-a^2}}-1\right]$

$$\Omega(z)=\frac{1}{4}\sigma\left[\frac{2z}{\sqrt{z^2-a^2}}+1\right]$$

强度因子为：

$$K_{I}=2\sqrt{2}\lim_{z\to z_1}\{(z-z_1)^{\frac{1}{2}}\phi(z)\}=\sigma\sqrt{a}-i0$$

结果与文献给出亦完全符合。

综上所述，通过两种受力类型裂纹体应力函数结构式的分析和验证，可以证实Riemann—Hilbert问题解法概括了一般，具有普遍性。

参考文献

[1] Н·И·мусхлиш были著, 赵惠元译《数学弹性力学的几个基本问题》 科学出版社 1958.

[2] 清华大学固体力学教研室 《断裂力学讲义》 1979

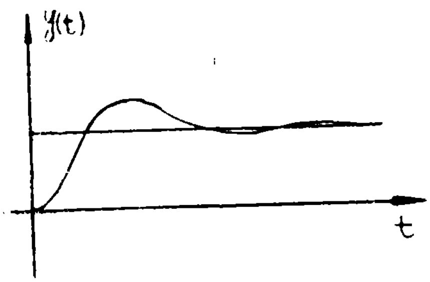
[3] 村上裕则, 大南正瑛共编 《破壞力学入门》オーム社 1980

[4] 范天佑编著, 《断裂力学基础》 江苏科技出版社 1978

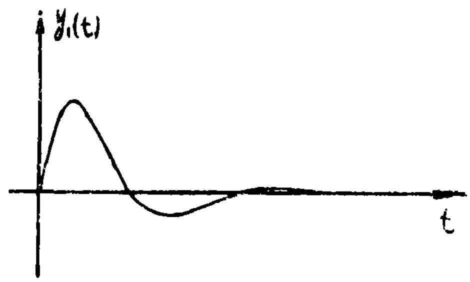
[5] 樊大钧编著《数学弹性力学》 新时代出版社 1983

[6] 中原一郎著《应用弹性学》 富教出版株式会社 1977

（上接80页）



图（4）



图（5）

参考文献

[1] 清华大学、北京大学《计算方法》编写组 计算方法

[2] 熊光楞 编著 控制系统数字仿真

[3] 蔡尚丰 主编 自动控制原理

[4] 郑州工学院电机系 APPLE—II微型计算机系统