

三次样条函数在计算机 求取控制系统脉冲响应中的应用

耿 直 黄亮胜

(工业自动化教研室)

提 要

计算机求取自动控制系统的单位阶跃响应的方法很多,但求取一个自动控制系统的单位脉冲响应则很少见到。这里介绍一种在用四阶龙格——库塔法求取了控制系统单位阶跃响应的基础上,采用三次样条函数来求取该系统的单位脉冲响应的方法。该算法用BASIC语言编写的程序,在APPLE——II微型机上通过,效果良好。

一、龙格——库塔法不能求取系统的脉冲响应

为了把这个问题说清楚,下面以三个方面论述。

1、龙格——库塔法简介

在求取系统的时域响应时,常常遇到求解微分方程的问题,这可以通过数值积分法来进行,而龙格——库塔法就是一种常用的数值积分法。

若考虑系统为如下常微分方程:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(t, y) \\ y_0 = y(t_0) \end{cases} \quad (1)$$

并假设 t_1 时刻的值 $y_1 = y(t_0 + h)$,其中 h 为时间的增量。那么可以在 t_0 附近展成台劳级数,并且只保留 h^2 项则:

$$y_1 = y_0 + f(t_0, y_0) \cdot h + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + f \frac{\partial f}{\partial y} \right) h^2 \Big|_{t=t_0, y=y_0} \quad (2)$$

我们假设这个解可写成:

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + (a_1 k_1 + a_2 k_2) h \\ k_1 &= f(t_0, y_0) \\ k_2 &= f(t_0 + b_1 h, y_0 + b_2 k_1 h) \end{aligned} \quad (3)$$

$$\cong f(t_0, y_0) + b_1 \frac{\partial f}{\partial t} \cdot h \Big|_{t=t_0} + b_2 k_1 \frac{\partial f}{\partial y} \cdot h \Big|_{y=y_0}$$

$$\text{即: } y_1 = y_0 + a_1 h f(t_0, y_0) + a_2 h \left[f(t_0, y_0) + b_1 \frac{\partial f}{\partial t} h + b_2 k_1 \frac{\partial f}{\partial y} h \right] \quad (4)$$

由②和④比较可得:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 1 \\ a_2 b_1 = \frac{1}{2} \\ a_2 b_2 = \frac{1}{2} \end{cases} \quad (5)$$

今有四个未知数, 而只有三个方程, 所以尚可自由选择一个方程。今取:

$$b_1 = b_2$$

于是
$$a_1 = a_2 = \frac{1}{2}$$

把 a_1, a_2 代入⑤中得: $b_1 = b_2 = 1$

于是得到这样一组计算公式:

$$\begin{cases} y_1 = y_0 + \frac{h}{2} (k_1 + k_2) \\ k_1 = f(t_0, y_0) \\ k_2 = f(t_0 + h, y_0 + k_1 h) \end{cases} \quad (6)$$

上式计算时只取了 h, h^2 两项, 故称二阶龙格——库塔法, 其计算截断误差正比于 h^3 , 需要更高精度时, 可用高阶龙格——库塔法。同时从⑥式中可以看出, 下一点值 y_1 与前一点值 y_0 有关, 而单位脉冲函数具有如下数学表达式:

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases} \quad (7)$$

若把 $t = 0$ 时的值代入⑥式中 y_1 是很难求出来的, 所以龙格——库塔这类数值积分法只对输入信号的幅值为有限值时才有效。

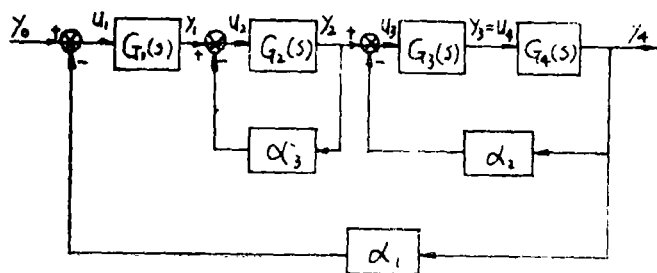
下面我们从描述系统的一阶微分方程组的形式, 来分析输入信号对求解输出信号的影响, 从另一角度看看求解脉冲响应的困难。

2、系统的一阶微分方程组的建立

一个自动控制系统一般可由放大环节、积分环节、微分环节、比例微分环节、惯性环节和振荡环节组成, 若把这些环节的数学表达式选成具有普遍代表性的形式, 即:

$$G_i(s) = \frac{C_i + D_i s}{A_i + B_i s}$$

那么以上的任何一个环节都可以通过选择不同的 A_i, B_i, C_i, D_i 来得到, 所以一个多环



图(1)

自动控制系统的数学模型就可以顺利推出来。下面我们举例说明, 设某控制系统结构图如图①所示:

由结构图可知:

$$\begin{cases} (A_1 + B_1 S) Y_1 = (C_1 + D_1 S) U_1 \\ (A_2 + B_2 S) Y_2 = (C_2 + D_2 S) U_2 \\ (A_3 + B_3 S) Y_3 = (C_3 + D_3 S) U_3 \\ (A_4 + B_4 S) Y_4 = (C_4 + D_4 S) U_4 \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} U_1 = Y_0 - \alpha_1 Y_4 \\ U_2 = Y_1 - \alpha_3 Y_2 \\ U_3 = Y_2 - \alpha_2 Y_4 \\ U_4 = Y_3 \end{cases} \quad (9)$$

把(8)和(9)式写成矩阵形式为:

$$(A + BS) Y = (C + DS) U \quad (8)'$$

$$U = WY + W_0 Y_0 \quad (9)'$$

把(8)'代入(9)'中并整理得:

$$Q(SY) = RY + V_1 Y_0 + V_2(SY_0) \quad (10)$$

其中: A, B, C, D, W 为 4×4 阶方阵

W_0 为 4×1 阶矩阵

那么 $Q = B - DW$ 为 4×4 阶方阵

$R = CW - A$ 为 4×4 阶方阵

$V_1 = CW_0$ 为 4×1 阶矩阵

$V_2 = DW_0$ 为 4×1 阶矩阵

如果 Q^{-1} 存在, 则(10)式可写成:

$$SY = Q^{-1}RY + Q^{-1}V_1 Y_0 + Q^{-1}V_2 SY_0$$

$$\text{即 } \dot{Y} = Q^{-1}RY + Q^{-1}V_1 Y_0 + Q^{-1}V_2 \dot{Y}_0 \quad (11)$$

对(11)式这样一个标准的微分方程组, 利用龙格——库塔法即可求解了, 但是由于输入信号 Y_0 的影响, 要使(11)式真正有解必须限制 Y_0 即要求 $Y_0(t) = t^a, a \geq 1$ 。

3. 不能求解的原因

从上面二方面的分析可以看出, 要想用龙格——库塔求解一个实际系统的响应, 对输入信号的限制是十分严格的。为了能使(11)式在阶跃输入信号时也能求出时域响应, 应使 $V_2 = 0$ 即要求 $G_1(S)$ 中的 D_1 等于零。这就是说如果系统的外加输入信号为阶跃信号时, 那么必须限制 $G_1(S)$ 环节, 这时(11)式可以写成:

$$\dot{Y} = \tilde{A}Y + \tilde{B}Y_0 \quad (11)'$$

其中 $\tilde{A} = Q^{-1}R, \tilde{B} = Q^{-1}V_1$

比较(11)', (7), (6)三式可以看出在脉冲信号输入下 $Y_0 \rightarrow \infty |_{t=0}$, 所以不论怎

样修正系统的数学模型都不可能直接用龙格——库塔法求出脉冲响应。所以有必要找出另一条路子。

二、利用三次样条函数求解系统的脉冲响应

在具体说明怎样求解之前,先复习一下线性定常系统的一个重要特性。

1、线性定常系统的重要特性

对于另初始条件的自动控制系统中,当输入信号为 $r(t)$ 时,其输出信号 $Y(t)$ 的拉氏变换表达式为:

$$\begin{cases} Y(s) = G_B(s) R(s) \\ Y(t) = L^{-1}[G_B(s) R(s)] \end{cases} \quad (12)$$

若今使系统的输入为 $\frac{dr(t)}{dt}$ 时,那么 $L[\frac{dr(t)}{dt}] = sR(s)$,这时系统输出

$Y_1(t)$ 的拉氏变换表达式为:

$$\begin{cases} Y_1(s) = G_B(s) sR(s) \\ \quad = Y(s) \cdot s \\ y_1(t) = L^{-1}[Y(s) \cdot s] = \dot{y}(t) \end{cases} \quad (13)$$

从(12)和(13)两式说明:对于同一个控制系统来说,当输入信号为原来输入信号的导数时,系统的输出则必为原来输出的导数。我们知道单位脉冲函数 $\delta(t)$ 是单位阶跃 $1(t)$ 对时间的一个阶导数,那么可以证明,同一系统的脉冲响应也可以从系统的阶跃响应求出。但是我们用数字计算机求出的阶跃响应不是连续的,而是离散函数,所以不能用常规的求导法去确定系统的脉冲响应,必须借助于其它数学工具,在此我们用三次样条函数插值的方法求数值导数。

2、三次样条函数及数值导数

我们知道:对于给定插值点序列 (x_i, y_i) , $i=0, 1, 2, \dots, N$ 。不妨假定 $a = x_0 < x_1 < x_2 \dots < x_n = b$,求 $[a, b]$ 区间上的函数 $S(x)$,应满足下列三个条件:

- ① $S(x_i) = y_i$, $i=0, 1, 2, \dots, N$
- ② $S(x)$ 在 $[a, b]$ 上有一阶、二阶连续导数。
- ③ 对于 $x \in [x_i, x_{i+1}]$, $S(x)$ 为三次多项式。

则 $S(x)$ 即为 $[a, b]$ 上的三次样条插值函数。

若令 m_i 表示 $S(x)$ 在 x_i 处的导数值,即 $S'(x_i) = m_i$ $i=0, 1, 2, \dots, N$

因此对于 $[a, b]$ 的每个子区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 有:

$$\begin{aligned} S(x_i) &= y_i & S'(x_i) &= m_i \\ S(x_{i+1}) &= y_{i+1} & S'(x_{i+1}) &= m_{i+1} \end{aligned}$$

假设 $[x_i, x_{i+1}]$ 上三次多项式表示为如下形式:

$$\begin{aligned} P_3(x) &= \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} y_{i+1} + \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} y_i \\ &+ (ax + b)(x - x_i)(x - x_{i+1}) \end{aligned} \quad (14)$$

显然: $P_3(x_i) = y_i$, $P_3(x_{i+1}) = y_{i+1}$

此外:

$$P_3'(x) = \frac{y_{i+1}}{x_{i+1} - x_i} + \frac{y_i}{x_i - x_{i+1}} + a(x - x_i)(x - x_{i+1}) + (ax + b)(2x - x_{i+1} - x_i) \quad (15)$$

则

$$P_3'(x_i) = \frac{y_{i+1}}{x_{i+1} - x_i} + \frac{y_i}{x_i - x_{i+1}} + (ax_i + b)(x_i - x_{i+1}) = m_i$$

而:

$$ax_i + b = (m_i - \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}) / (x_i - x_{i+1}) \quad (16)$$

同理可得:

$$ax_{i+1} + b = (m_{i+1} - \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}) / (x_{i+1} - x_i) \quad (17)$$

从上面(16)和(17)式中解出a和b值代入(14)中, 并整理后得出:

$$\begin{aligned} P_3(x) = & [\frac{3}{h_i^2}(x_{i+1} - x)^2 - \frac{2}{h_i^2}(x_{i+1} - x)^3]y_i \\ & + [\frac{3}{h_i^2}(x - x_i)^2 - \frac{2}{h_i^2}(x - x_i)^3]y_{i+1} \\ & + h_i[\frac{1}{h_i^2}(x_{i+1} - x)^2 - \frac{1}{h_i^3}(x_{i+1} - x)^3]m_i \\ & - h_i[\frac{1}{h_i^2}(x - x_i)^2 - \frac{1}{h_i^3}(x - x_i)^3]m_{i+1} \end{aligned}$$

其中: $h_i = x_{i+1} - x_i$

可见上式在 $[x_i, x_{i+1}]$ 上, 就是满足给定条件的 $S(x)$, 即: $P_3(x)$ 是 $[x_i, x_{i+1}]$ 上的三次样条函数 $S(x)$ 。下面我们推导求各个插值点的一阶导数 m_i 的公式。

因为 $S(x)$ 具有二阶连续导数, 所以

$$\begin{aligned} S''(x) = & [\frac{6}{h_i^2} - \frac{12}{h_i^3}(x_{i+1} - x)]y_i + [\frac{6}{h_i^2} - \frac{12}{h_i^3}(x - x_i)]y_{i+1} \\ & + h_i[\frac{2}{h_i^2} - \frac{6}{h_i^3}(x_{i+1} - x)]m_i - h_i[\frac{2}{h_i^2} - \frac{6}{h_i^3}(x - x_i)]m_{i+1} \end{aligned}$$

于是有:

$$S''(x_i) = -\frac{6}{h_i^2}y_i + \frac{6}{h_i^2}y_{i+1} - \frac{4}{h_i}m_i - \frac{2}{h_i}m_{i+1}$$

$$S''(x_{i+1}) = \frac{6}{h_i^2}y_i - \frac{6}{h_i^2}y_{i+1} + \frac{2}{h_i}m_i + \frac{4}{h_i}m_{i+1}$$

此外在 $S(x)$ 的子区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 右端 x_i 的二阶导数值应为:

$$S''(x_i^-) = \frac{6}{h_{i-1}^2} y_{i-1} - \frac{6}{h_{i-1}^2} y_i + \frac{2}{h_{i-1}} m_{i-1} + \frac{4}{h_{i-1}} m_i \quad (18)$$

而在 $S(x)$ 子区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 左端 x_i 的二阶导数值应为:

$$S''(x_i^+) = -\frac{6}{h_i^2} y_i + \frac{6}{h_i^2} y_{i+1} - \frac{4}{h_i} m_i - \frac{2}{h_i} m_{i+1} \quad (19)$$

由于要求 $S(x)$ 在 x_i 处有连续的二阶导数, 所以 $S''(x_i) = S''(x_i^+)$

令 (17) 和 (18) 式相等, 并整理可得:

$$(1 - \alpha_i) m_{i-1} + 2m_i + \alpha_i m_{i+1} = 3 \left[\frac{1 - \alpha_i}{h_{i-1}} (y_i - y_{i-1}) + \frac{\alpha_i}{h_i} (y_{i+1} - y_i) \right] \quad (20)$$

$$\text{其中: } \alpha_i = \frac{h_{i-1}}{h_{i-1} + h_i}$$

(20) 式对所有的插值点 x_1, x_2, \dots, x_{n-1} 均成立。所以由 (20) 式可得到 $(n-1)$ 个含 m_i 的方程式, 整理如下:

$$\begin{cases} (1 - \alpha_1) m_0 + 2m_1 + \alpha_1 m_2 = \beta_1 \\ (1 - \alpha_2) m_1 + 2m_2 + \alpha_2 m_3 = \beta_2 \\ \vdots \\ (1 - \alpha_{n-1}) m_{n-1} + 2m_n + \alpha_{n-1} m_{n+1} = \beta_{n-1} \end{cases} \quad (21)$$

$$\text{其中: } \beta_i = 3 \left[\frac{1 - \alpha_i}{h_{i-1}} (y_i - y_{i-1}) + \frac{\alpha_i}{h_i} (y_{i+1} - y_i) \right]$$

从 (21) 中是求不出唯一的 $(n+1)$ 个 m_i 的, 还需补进两个边界条件, 在实际控制系统中, $S'(x_0)$ 和 $S'(x_n)$ 都是确定的, 而且可以用拉氏变换终值定理和初值定理求出, 所以补进的两个边界条件为:

$$\begin{cases} S'(x_0) = m_0 \\ S'(x_n) = m_n \end{cases} \quad (22)$$

这样把 (21) 和 (22) 式联立, 就可以求出各插值点的所有一阶导数值 (唯一解)。

可见在用龙格——库塔法求出系统的阶跃响应后, 运用三次样条函数, 完全可以唯一地确定出系统的单位脉冲响应了。知道了某系统的单位脉冲响应, 应用卷积定理又可对任意输入信号的系统响应进行全面的分析和研究, 给深入研究系统的性能提供依据。

三、系统仿真主程序及说明

主程序框图见图2所示。

输入数据有以下几个方面:

N ——典型环节个数

H_s ——计算步长

$A(I), B(I), C(I), D(I)$ ——典型环节的系数

I_1, J_1, W_1 ——各环节之间联接关系

输出性能指标有以下几个:

M_p ——系统超调量

T_s ——系统调节时间

N_0 ——系统振荡次数

F ——系统振荡频率

N_3 ——衰减比

输出时域响应曲线有二种:

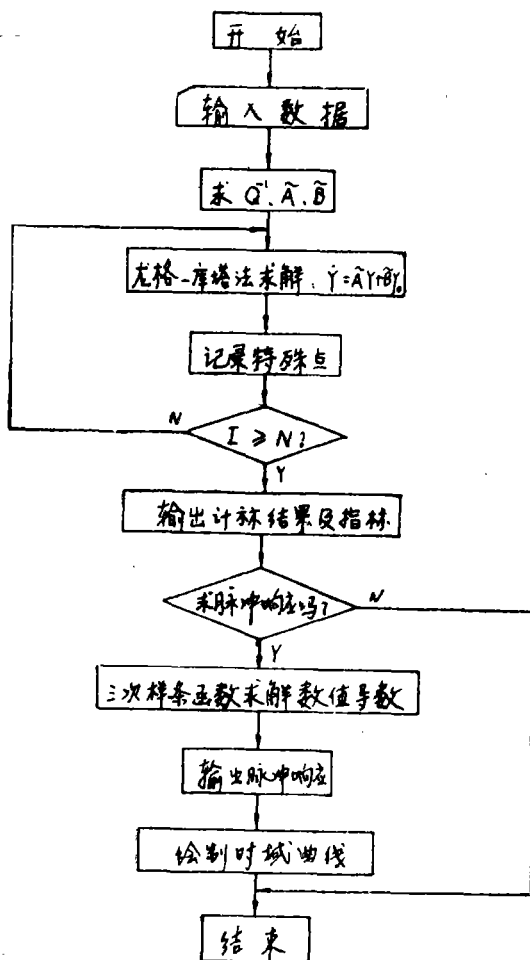
①单位脉冲响应—— $Y(T)$ 。

②单位阶跃响应—— $Y_1(T)$ 。

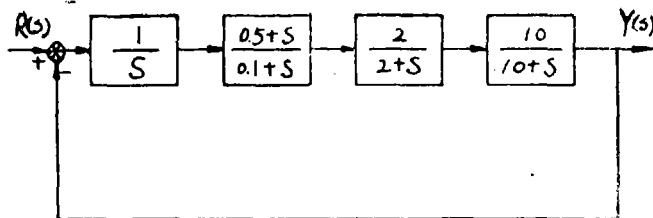
四、举 例

设某系统的结构图如图(3)所示

系统中有四个环节组成, 由计算机计算运行, 输出单位阶跃响应曲线见图(4), 输出系统脉冲响应曲线见图(5)。



图(2)



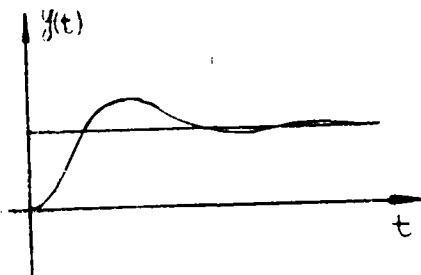
图(3)

(下转96页)

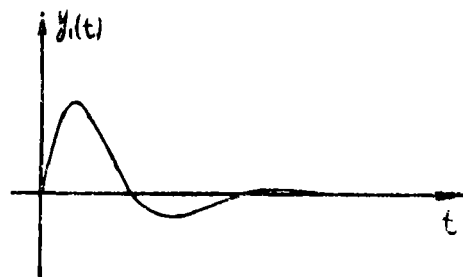
参 考 文 献

- [1] Н. И. мусхелишвили著, 赵惠元译《数学弹性力学的几个基本问题》 科学出版社 1958.
- [2] 清华大学固体力学教研室 《断裂力学讲义》 1979
- [3] 村上裕则, 大南正瑛共编 《破壊力学入門》 オーム社 1980
- [4] 范天佑编著, 《断裂力学基础》 江苏科技出版社 1978
- [5] 樊大钧编著《数学弹性力学》 新时代出版社 1983
- [6] 中原一郎著《应用弹性学》 富教出版株式会社 1977

(上接80页)



图(4)



图(5)

参 考 文 献

- [1] 清华大学、北京大学《计算方法》编写组 计算方法
- [2] 熊光楞 编著 控制系统数字仿真
- [3] 蔡尚丰 主编 自动控制原理
- [4] 郑州工学院电机系 APPLE-II微型计算机系统