无限自由度直杆体系的横向振动

霍 达

(土建系结构理论研究室)

提 要

本文在较为一般的条件下导出了等刚度、均匀质量无限自由度直杆体系横向振动的矩阵形式初参数法基本公式。形状规律简单，便于记忆和使用。同时，对一些特殊情况文中讨论了基本公式的简化和用法，使解题变得极简便。特别是求解自由振动时，几乎不用什么计算便可直接写出频率方程。

一、引 言

对于一个直杆体系进行有限分段，每段杆轴不弯且具有连续分布刚度$J(\chi_i)$、质量$\overline{m}(\chi_i)$、分布扰力$q(\chi_i)f(t)$、分布扰矩$\overline{M}(\chi_i)f(t)$，除边界处以外段内不存在集中质量m_i、集中扰力$P_if(t)$、集中扰矩$M_if(t)$和抗侧移弹性支座(刚度为C_i)及抗转弹性支座(刚度为K_i)，设沿杆轴方向的均布轴向荷载为g，则该分段的基本方程组是

$$\frac{\partial^2}{\partial\chi_i^2}\left[EJ(\chi_i)\frac{\partial^2 y(\chi_i,t)}{\partial\chi_i^2}\right]+N(\chi_i)\frac{\partial^2 y(\chi_i,t)}{\partial\chi_i^2}+g\frac{\partial y(\chi_i,t)}{\partial\chi_i}+\overline{m}(\chi_i)\frac{\partial^2 y(\chi_i,t)}{\partial t^2}$$

$$=q(\chi_i)f(t)-\frac{d\overline{M}(\chi_i)}{d\chi_i}f(t) \qquad (1)$$

当然在边界处必须满足边界条件。由于未知数$y(\chi_i,t)=F(\chi_i)\cdot T_i(t)$的个数与方程的个数相同，理论上总是可解的，可是却极其繁琐。我们发现，在很多情况下，使用初参数法是很方便的。特别是使用本文建议的矩阵形式初参数法基本公式尤为简捷。

二、初参数法的矩阵形式基本公式

为书写方便，第i杆段不再加脚标i。在等刚度、均布质量的条件下($EJ(\chi)=EJ$; $\overline{m}(\chi)=\overline{m}$)，如$g=0$则N为不变的常数。假设杆受简谐扰力和扰矩$q(\chi)f(t)=q(\chi)\sin\theta t$及$\overline{M}(\chi)f(t)=\overline{M}(\chi)\sin\theta t$作用，则在稳态时只需考虑纯强迫振动，方程(1)变为常系数四阶线性微分方程

$$\frac{d^4y}{d\chi^4}+\frac{N}{EJ}\frac{d^2y}{d\chi^2}-\frac{m\theta^2}{EJ}y=\frac{q(\chi)}{EJ}-\frac{d\overline{M}(\chi)}{EJd\chi} \qquad (2)$$

令$\upsilon^2=\dfrac{N}{EJ}$，　　$k^4=\dfrac{m\theta^2}{EJ}$

则(2)的特征方程是

$$\lambda^4+\upsilon^2\lambda^2-k^4=0 \qquad (3)$$

它的四个根，两个是相反的实数，两个是共轭的纯虚数，即

$$\lambda_{1,2}=\pm\lambda,\ \lambda_{3,4}=\pm\mu\lambda$$

其中$\lambda=\sqrt{-\frac{\upsilon^2}{2}+\sqrt{\frac{\upsilon^4}{4}+k^4}}$，$\mu=\sqrt{\left(-\frac{\upsilon^2}{2}-\sqrt{\frac{\upsilon^4}{4}+k^4}\right)/\left(-\frac{\upsilon^2}{2}+\sqrt{\frac{\upsilon^4}{4}+k^4}\right)}$。

方程(2)的一个特解是$-\frac{q(\chi)}{k^4EJ}+\frac{1}{k^4EJ}\cdot\frac{d\overline{M}(\chi)}{d\chi}$，所以它的通解是

$$y_x=C_1ch\lambda\chi+C_2sh\lambda\chi+C_3ch\mu\lambda\chi+C_4sh\mu\lambda\chi-\frac{1}{k^4EJ}\left[g(\chi)-\frac{d\overline{M}(\chi)}{d\chi}\right]\quad(4)$$

引入记号$y_x^*=y_x$、$\varphi_x^*=\frac{\varphi_x}{\lambda}$、$M_x^*=\frac{M_x}{\lambda^2EJ}$、$Q_x^*=\frac{Q_x}{\lambda^3EJ}$、及$R^*(\chi)=\frac{1}{k^4EJ}\cdot$

$[q(\chi)-\overline{M}'(\chi)]$、$R^{*\prime}(\chi)=\frac{1}{\lambda k^4EJ}[q'(\chi)-\overline{M}''(\chi)]$、$R^{*\prime\prime}(\chi)=\frac{1}{\lambda^2k^4EJ}\cdot$

$[q''(\chi)-\overline{M}'''(\chi)]$和$R^{*\prime\prime\prime}(\chi)=\frac{1}{\lambda^3k^4EJ}[q'''(\chi)-\overline{M}^{(4)}(\chi)]$。因为$\varphi_x=\frac{dy_x}{d\chi}$，

$EJM_x=\frac{d^2y_x}{d\chi^2}$，$EJQ_x=\frac{d^3y_x}{d\chi^3}$，则有

$$\left.\begin{aligned}
y^*_x&=C_1ch\lambda\chi+C_2sh\lambda\chi+C_3ch\mu\lambda\chi+C_4sh\mu\lambda\chi-R^*(\chi)\\
\varphi^*_x&=C_1sh\lambda\chi+C_2ch\lambda\chi+\mu C_3sh\mu\lambda\chi+\mu C_4ch\mu\lambda\chi-R^{*\prime}(\chi)\\
M^*_x&=C_1ch\lambda\chi+C_2sh\lambda\chi+\mu^2C_3ch\mu\lambda\chi+\mu^2C_4sh\mu\lambda\chi-R^{*\prime\prime}(\chi)\\
Q^*_x&=C_1sh\lambda\chi+C_2ch\lambda\chi+\mu^3C_3sh\mu\lambda\chi+\mu^3C_4ch\mu\lambda\chi-R^{*\prime\prime\prime}(\chi)
\end{aligned}\right.\quad(5)$$

而$Sh0=0$，$Ch0=1$，故对初始点有

$$\begin{aligned}
C_1+C_3&=y_0^*+R^*(0)\\
C_2+\mu C_4&=\varphi_0^*+R^{*\prime}(0)\\
C_1+\mu^2C_3&=M_0^*+R^{*\prime\prime}(0)\\
C_2+\mu^2C_4&=Q_0^*+R^{*\prime\prime\prime}(0)
\end{aligned}$$

求解它们可得

$$\left.\begin{aligned}
C_1&=\frac{1}{1-\mu^2}[(M_0^*-\mu^2y_0^*)+(R^{*\prime\prime}(0)-\mu^2R^*(0))]\\
C_2&=\frac{1}{1-\mu^2}[(Q_0^*-\mu^2\varphi_0^*)+(R^{*\prime\prime\prime}(0)-\mu^2R^{*\prime}(0))]\\
C_3&=\frac{1}{1-\mu^2}[(y_0^*-M_0^*)+(R^*(0)-R^{*\prime\prime}(0))]\\
C_4&=\frac{1}{\mu(1-\mu^2)}[(\varphi_0^*-Q_0^*)+(R^{*\prime}(0)-R^{*\prime\prime\prime}(0))]
\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

将(6)代入(5)并引入记号

$$\left.\begin{aligned}
A_{\mu,\lambda} &= \frac{1}{1-\mu^2}\left[\operatorname{ch}\mu\lambda\chi - \mu^2\operatorname{ch}\lambda\chi\right] \\
B_{\mu,\lambda} &= \frac{1}{1-\mu^2}\left[\frac{1}{\mu}\operatorname{sh}\mu\lambda\chi - \mu^2\operatorname{sh}\lambda\chi\right] \\
C_{\mu,\lambda} &= \frac{1}{1-\mu^2}\left[\operatorname{ch}\lambda\chi - \operatorname{ch}\mu\lambda\chi\right] \\
D_{\mu,\lambda} &= \frac{1}{1-\mu^2}\left[\operatorname{sh}\lambda\chi - \frac{1}{\mu}\operatorname{sh}\mu\lambda\chi\right]
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

可得：
$$\begin{aligned}
y_x^* = {} & A_{\mu,\lambda}y_0^* + B_{\mu,\lambda}\varphi_0^* + C_{\mu,\lambda}M_0^* + D_{\mu,\lambda}Q_0^* + A_{\mu,\lambda}R^*(0) + \\
& B_{\mu,\lambda}R^{*\prime}(0) + C_{\mu,\lambda}R^{*\prime\prime}(0) + D_{\mu,\lambda}R^{*\prime\prime\prime}(0) - R^*(\chi)
\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}
\varphi_x^* = {} & \frac{1}{\lambda}\left[A'_{\mu,\lambda}y_0^* + B'_{\mu,\lambda}\varphi_0^* + C'_{\mu,\lambda}M_0^* + D'_{\mu,\lambda}Q_0^* + A'_{\mu,\lambda}R^*(0)\right. \\
& \left. + B'_{\mu,\lambda}R^{*\prime}(0) + C'_{\mu,\lambda}R^{*\prime\prime}(0) + D'_{\mu,\lambda}R^{*\prime\prime\prime}(0)\right] - R^{*\prime}(\chi) \\
M_x^* = {} & \frac{1}{\lambda^2}\left[A''_{\mu,\lambda}y_0^* + B''_{\mu,\lambda}\varphi_0^* + C''_{\mu,\lambda}M_0^* + D''_{\mu,\lambda}Q_0^* + A''_{\mu,\lambda}R^*(0)\right. \\
& \left. + B''_{\mu,\lambda}R^{*\prime}(0) + C''_{\mu,\lambda}R^{*\prime\prime}(0) + D''_{\mu,\lambda}R^{*\prime\prime\prime}(0)\right] - R^{*\prime\prime}(\chi) \\
Q_x^* = {} & \frac{1}{\lambda^3}\left[A'''_{\mu,\lambda}y_0^* + B'''_{\mu,\lambda}\varphi_0^* + C'''_{\mu,\lambda}M_0^* + D'''_{\mu,\lambda}Q_0^* + A'''_{\mu,\lambda}R^*(0)\right. \\
& \left. + B'''_{\mu,\lambda}R^{*\prime}(0) + C'''_{\mu,\lambda}R^{*\prime\prime}(0) + D'''_{\mu,\lambda}R^{*\prime\prime\prime}(0)\right] - R^{*\prime\prime\prime}(\chi)
\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

令 $\overline{\lambda} = \operatorname{diag}\left\{1, \frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda_2}, \frac{1}{\lambda_3}\right\}$

$\overline{Z}(x) = [y_x^*, \varphi_x^*, M_x^*, Q_x^*]^T$；$\overline{Z_0} = [y_0^*, \varphi_0^*, M_0^*, Q_0^*]^T$

$$\overline{S}_{\mu,\lambda} = \begin{pmatrix} A_{\mu,\lambda} & B_{\mu,\lambda} & C_{\mu,\lambda} & D_{\mu,\lambda} \\ A'_{\mu,\lambda} & B'_{\mu,\lambda} & C'_{\mu,\lambda} & D'_{\mu,\lambda} \\ A''_{\mu,\lambda} & B''_{\mu,\lambda} & C''_{\mu,\lambda} & D''_{\mu,\lambda} \\ A'''_{\mu,\lambda} & B'''_{\mu,\lambda} & C'''_{\mu,\lambda} & D'''_{\mu,\lambda} \end{pmatrix}$$

及 $\overline{R}(\chi) = [R^*(\chi), R^{*\prime}(\chi), R^{*\prime\prime}(\chi), R^{*\prime\prime\prime}(\chi)]^T$

$R(0) = [R^*(0), R^{*\prime}(0), R^{*\prime\prime}(0), R^{*\prime\prime\prime}(0)]^T$

则公式(8)可用矩阵形式简洁地表述如下：

$$\overline{Z}_x = \overline{\lambda}\,\overline{S}_{\mu,\lambda}(\overline{Z}_0 + \overline{R}(0)) - \overline{R}(\chi) \tag{9}$$

根据式(9)我们便可以从某个参数为已知的截面出发，逐段地表达相对应截面的参数值，直至最后。因所列方程数与未知数数目相等，故总可以求解。

在边界处，变形y及φ应协调一致。有集中扰力、集中扰矩、集中质量或弹性支座时，边界参数值通过左、右截面的突变来协调统一。当集中扰力是幅值为P_j的$P_j\sin\theta t$时，其作用点处左、右截面剪力值突变p_j；集中扰矩$M_j\sin\theta t$处左、右截面弯矩值实变M_j；集中质点M_i处左、右截面弯矩突变$-\theta^2 J\varphi_j$，剪力突变$\theta^2 m_j y_j$；在抗侧移弹性支座处，左、右截面剪力突变$-C_j y_j$；抗弯弹性支座处弯矩突变$-K_j\varphi_i$。

三、无轴力等截面直杆的自由振动

无轴力$N=0$，如整杆上无集中质量及弹性支座，则把整个杆看成一段。自由振动，扰力及扰矩为零。于是特征方程(3)的根就成为$\pm k$及$\pm ki$，$\mu=i$。相应的影响函数化为

$$\left.\begin{aligned}
A_{\mu,\lambda}&=\frac{1}{2}[\operatorname{ch}k\chi+\cos k\chi]=A_{KX}\\
B_{\mu,\lambda}&=\frac{1}{2}[\operatorname{sh}k\chi+\sin k\chi]=B_{KX}\\
C_{\mu,\lambda}&=\frac{1}{2}[\operatorname{ch}k\chi-\cos k\chi]=C_{KX}\\
D_{\mu,\lambda}&=\frac{1}{2}[\operatorname{sh}k\chi-\sin k\chi]=D_{KX}
\end{aligned}\right\}\tag{10}$$

而且满足$A'_{KX}=kD_{KX}$，$B'_{KX}=kA_{KX}$，$C'_{KX}=kB_{KX}$，$D'_{KX}=kA_{KX}$。

令

$$\overleftarrow{S}_{KX}=\begin{pmatrix}A_{KX}&B_{KX}&C_{KX}&D_{KX}\\D_{KX}&A_{KX}&B_{KX}&C_{KX}\\C_{KX}&D_{KX}&A_{KX}&B_{KX}\\B_{KX}&C_{KX}&D_{KX}&A_{KX}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A&B&C&D\\D&A&B&C\\C&D&A&B\\B&C&D&A\end{pmatrix}_{KX}\tag{11}$$

则公式(9)就简化为

$$\overline{Z_x}=\overleftarrow{S}_{KX}\overline{Z_0}\tag{12}$$

即

$$\begin{pmatrix}y_x^*\\\varphi_x^*\\M_x^*\\Q_x^*\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A&B&C&D\\D&A&B&C\\C&D&A&B\\B&C&D&A\end{pmatrix}_{KX}\begin{pmatrix}y_0^*\\\varphi_0^*\\M_0^*\\Q_0^*\end{pmatrix}\tag{13}$$

使用式(12)或式(13)求解问题非常简便。只要对相应两端点的边界条件把$\overrightarrow{Z_0}$中等于0的参数对应的$\overleftarrow{S}_{kx}$中的列勾掉，把$\overline{Z_x}$中等于0的参数对应的$\overleftarrow{S}_{KX}$中的行下画波浪线。则由$\overleftarrow{S}_{KX}$的画波浪线而未勾掉的元素组成的行列式就是频率行列式$|\triangle|$，频率方程就是$|\triangle|=0$。

例1：求图1所示悬臂梁的自振频率方程。

〔解〕 边界条件$y_0^* = \varphi_0^* = 0$，$M_l^* = Q_l^* = 0$

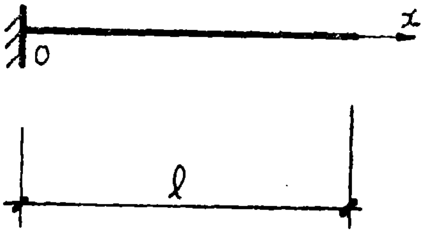

图 1

则

$$\begin{pmatrix} y \\ \varphi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_L^* = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ D & A & B & C \\ C & D & A & B \\ B & C & D & A \end{pmatrix}_{KL} \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi \\ M \\ Q \end{pmatrix}_0^*$$

频率方程 $\begin{vmatrix} A & B \\ D & A \end{vmatrix}_{KL} = A^2_{KL} - B_{KL}D_{KL} = 0$

整理即得　$\mathrm{ch}kL\cos kL + 1 = 0$

当杆上还有集中质量及弹性支座时，则集中质量m_j产生惯性力幅值为$\omega^2 m_j y_j$和转动惯矩幅值为$-\omega^2 J\cdot\varphi_j$；弹性支座产生反力$-C_j y_j$和反矩$-K_j\varphi_j$。这时可按（二）节末尾的方法逐段解算，下面推导统一的公式。对图2所示的情况，先只考虑仅有一个集中质量m_1的情况，在$0\sim \chi - e_1$段

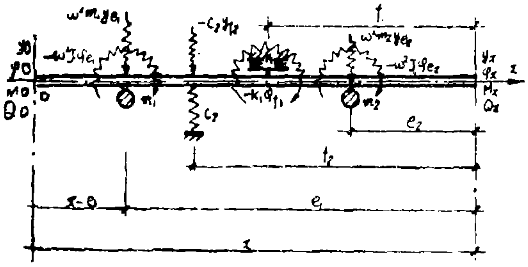

图　2

$$\overline{Z}_{x-e_1} = \overleftarrow{S}_{K(x-e_1)}\overline{Z}_0 \qquad (a)$$

而在$\chi - e_1 \sim \chi$段，令$(-\omega^2 J\varphi_1)^* = \dfrac{-\omega^2 J\varphi_1}{k^2 EJ}$

$(\omega^2 m_1 y_1)^* = \dfrac{\omega^2 m_1 y_1}{k^3 EJ}$，并引入记号

$\overline{U}_1 = [0, 0, (-\omega^2 J\varphi_1)^*, (\omega^2 m_1 y_1)^*]^T$，则得

$$\overline{Z}_x = \overleftarrow{S}_{Ke_1}(\overline{Z}_{x-e_1} + \overline{U}_1) \qquad (b)$$

将(a)式代入(b)整理，因此

$$\overline{Z}_x = \overleftarrow{S}_{Ke_1}\overleftarrow{S}_{K(x-e_1)}\overline{Z}_0 + \overleftarrow{S}_{Ke_1}\overline{U}_1$$

易证　$\overleftarrow{S}_{Ke_1}\overleftarrow{S}_{K(x-e_1)} = \overleftarrow{S}_{Kx}$

从而有　$$\overline{Z}_x = \overleftarrow{S}_{Kx}\overline{Z}_0 + \overleftarrow{S}_{Ke_1}\overline{U}_1 \qquad (14)$$

将这种推导办法应用于所有质点及弹性支座，并令$(-K_j\varphi_j)^* = \dfrac{-K_j\varphi_j}{k^2 EJ}$、$(-C_j y_j)^* = \dfrac{-C_j y_j}{k^3 EJ}$

则对于有限多个集中质点和弹性支座

$$\overline{Z}_x = \overleftarrow{S}_{Kx}\overline{Z}_0 + \sum_{e_j}\overleftarrow{S}_{Ke_j}\overline{U}_j + \sum_{f_j}\overleftarrow{S}_{Kf_j}\overline{V}_j \qquad (15)$$

这里$\overline{V}_j = [0, 0, (-K_j\varphi_j)^*, (-C_j y_j)^*]^T$，而$e_j$和$f_j$分别表示第j个质点到杆右端χ面的距离和第j个弹性支座到杆右端χ面的距离（见图2），

公式(14)、(15)中含有集中质点或弹性支座处的转角和位移，因此还需增加必要的作用点或支座处的φ_j及y_j的方程作为附加方程才能求解。

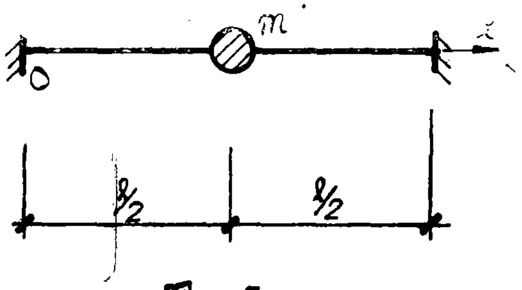

图 3

例2：试图3所示跨中有一集中质量m的两端固定梁的自振频率（不考虑m的转动影响）。

〔解〕 边界条件

$y_0^* = \varphi_0^* = y_L^* = \varphi_L^* = 0$

不考虑$-\omega^2 J_1 \varphi_1$项，由(14)式

$$\begin{pmatrix}0\\0\\M\\Q\end{pmatrix}^*_L = \begin{pmatrix}A&B&C&D\\D&A&B&C\\C&D&A&B\\B&C&D&A\end{pmatrix}_{KL}\begin{pmatrix}0\\0\\M\\Q\end{pmatrix}^*_0 + \begin{pmatrix}A&B&C&D\\D&A&B&C\\C&D&A&B\\B&C&D&A\end{pmatrix}_{K\frac{L}{2}}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\\omega^2 m y_{\frac{L}{2}}\end{pmatrix}^*$$

附加方程

$$\begin{pmatrix}y\\\cdot\\\cdot\\\cdot\end{pmatrix}^*_{\frac{L}{2}} = \begin{pmatrix}A&B&C&D\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\end{pmatrix}_{K\frac{L}{2}}\begin{pmatrix}0\\0\\M\\Q\end{pmatrix}^*_0$$

所以频率方程是

$$\begin{vmatrix}C_{KL}+\omega^2 m D_{K\frac{L}{2}} C_{K\frac{L}{2}} & D_{KL}+\omega^2 m D^2_{K\frac{L}{2}}\\ B_{KL}+\omega^2 m C^2_{K\frac{L}{2}} & C_{KL}+\omega^2 m C_{K\frac{L}{2}} D_{K\frac{L}{2}}\end{vmatrix} = 0$$

展开整理可得

$$(C^2_{KL} - B_{KL}D_{KL}) + \omega^2 m (2C_{KL}C^2_{K\frac{L}{2}}D_{K\frac{L}{2}} - B_{KL}D^2_{K\frac{L}{2}} - D_{KL}C^2_{K\frac{L}{2}}) = 0$$

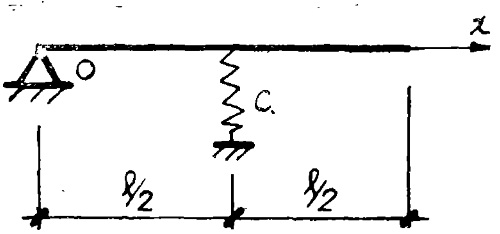

图 4

例3：求图4所示具有弹性支座（抗侧移刚度为C）的梁的自振频率方程。

〔解〕边界条件$y_0^* = M_0^* = M_L^* = Q_L^* = 0$，则

$$\begin{pmatrix} y\\ \varphi \\ 0 \\ 0\end{pmatrix}^*_L = \begin{pmatrix} A & B & C & D\\ D & A & B & C\\ C & D & A & B\\ B & C & D & A\end{pmatrix}_{KL} \begin{pmatrix}0\\ \varphi\\ 0\\ Q\end{pmatrix}^*_0 + \begin{pmatrix} \cdot&\cdot&\cdot&D\\ \cdot&\cdot&\cdot&C\\ \cdot&\cdot&\cdot&B\\ \cdot&\cdot&\cdot&A \end{pmatrix}_{K\frac{L}{2}} \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\\ -Cy_{\frac{L}{2}}\end{pmatrix}^*$$

附加方程

$$\begin{pmatrix} y\\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot\end{pmatrix}^*_{\frac{L}{2}} = \begin{pmatrix} A & B & C & D\\ \cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\ \cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\ \cdot&\cdot&\cdot&\cdot\end{pmatrix}_{K\frac{L}{2}} \begin{pmatrix}0\\ \varphi\\ 0\\ Q\end{pmatrix}^*_0$$

于是知频率方程为

$$\begin{vmatrix} D_{KL}-CB^2_{K\frac{L}{2}} & B_{KL}-CB_{K\frac{L}{2}}C_{K\frac{L}{2}} \\ C_{KL}-CA_{K\frac{L}{2}}B_{K\frac{L}{2}} & A_{KL}-CA_{K\frac{L}{2}}D_{K\frac{L}{2}} \end{vmatrix} = 0$$

展开并整理可得

$$(A_{KL}D_{KL}-B_{KL}C_{KL})-C(A_{KL}B^2_{K\frac{L}{2}}+D_{KL}A_{K\frac{L}{2}}D_{K\frac{L}{2}}-B_{KL}A_{K\frac{L}{2}}B_{K\frac{L}{2}}-C_{KL}B_{K\frac{L}{2}}D_{K\frac{L}{2}})=0$$

四、等截面拉杆和压杆的自由振动

在一般公式(9)中，扰力、扰矩为0，改扰频θ为自振频率ω，则自由振动公式为

$$\overline{Z_x}=\overset{\frown}{\lambda}\overset{\frown}{S}_{\mu,\lambda}\overline{Z_0} \qquad (16)$$

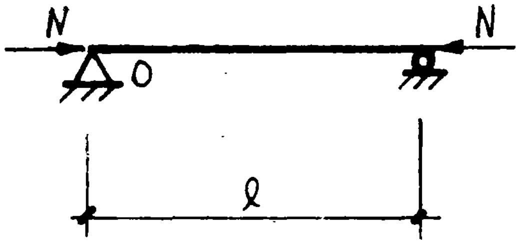

图 5

采用在（三）中介绍的办法，从式(16)可很容易地写出拉、压杆的自振频率方程

例4：试求图5所示两端铰支杆承受轴向力N时的频率方程。

〔解〕 边界条件 $y_0^*=M_0^*=y_L^*=M_L^*=0$，则

$$\begin{pmatrix}0\\ \varphi\\ 0\\ Q\end{pmatrix}^*_L = \begin{bmatrix}1&&&\\ &\frac{1}{\lambda}&&\\ &&\frac{1}{\lambda^2}&\\ &&&\frac{1}{\lambda^3}\end{bmatrix} \begin{pmatrix} A & B & C & D\\ A' & B' & C' & D'\\ A'' & B'' & C'' & D''\\ A''' & B''' & C''' & D'''\end{pmatrix}_{\mu\lambda} \begin{pmatrix}0\\ \varphi\\ 0\\ Q\end{pmatrix}^*_0$$

故频率方程为　$\begin{vmatrix} B & D \\ \lambda^{-2}B'' & \lambda^{-2}D'' \end{vmatrix} = 0$

展开整理　　$sh\lambda L sh\mu\lambda L = 0$。　∵$sh\lambda L = 0$，所以频率方程为

$sh\mu\lambda L = 0$。其中$\mu\lambda = \sqrt{-\frac{v^2}{2} - \sqrt{\frac{v^2}{4} + k^4}}$

五、无轴力等截面直杆的强迫振动

与（三）的推导过程一样，在轴力N＝0时，公式(9)化为

$$\overline{Z}_x = \widetilde{S}_{Kx}(\overline{Z}_0 + \overline{R}(0)) - \overline{R}(\chi) \qquad (17)$$

把杆轴不变方向、断面不改变和分析扰力$q(\chi)$及分布扰矩$\overline{M}(\chi)$规律不改变的相邻分段合并，在该大段上一般地还作用有集中质量m_j，集中扰力幅值p_j，集中扰矩M_j，弹性支座反力幅值$-C_jy_j$和反矩幅值$-k_j\varphi_j$以及由集中质量运动产生的惯性力幅值$\theta^2 m_j y_j$和转动惯矩幅值$-\theta^2 J\varphi_j$（见图6所示）。经推导可得如下公式

$$\overline{Z}_x = \widetilde{S}_{kx}(\overline{Z}_0 + \overline{R}(0)) - \overline{R}(\chi) + \sum_{\Delta j}\widetilde{S}_{k\Delta j}\overline{W}_j + \sum_{rj}\widetilde{S}_{krj}\overline{H}_j + \sum_{ej}\widetilde{S}_{kej}\overline{U}_j + \sum_{fj}\widetilde{S}_{kfj}\overline{V}_j \qquad (18)$$

其中Δ_j和r_j分别为第j个集中扰力或第j个集中扰矩作用点到杆右端截面的距离。$\overline{W}_j = [0,0,0,P_j]^T$；$\overline{H}_j = [0,0,M_j,0]^T$。其余符号意义同前。

用(18)式解题时，只需将有关扰力、扰矩的项放在式的一侧，把$\widetilde{S}_{kx}\overline{Z}_0 + \sum_{ej}\widetilde{S}_{kej}\overline{U}_j + \sum_{fj}\widetilde{S}_{kfj}\overline{V}_j$放在另一侧，用（三）中所述的办法勾列和画重点行，$\widetilde{S}_{kx}$中余下的对应元素将组成特

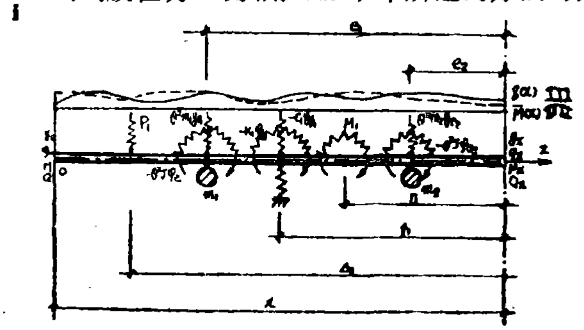

图　6

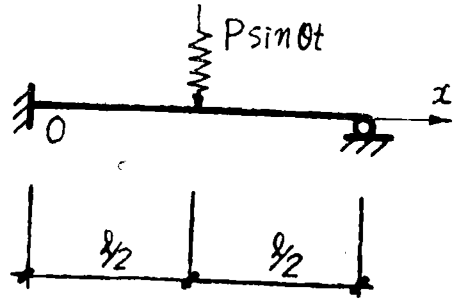

图　7

征行列式$|\triangle|$。根据用行列式求多元方程组的方法，要求某参数，只要在另一侧找出对应的系数来代替$|\triangle|$中的相应列，结果会很容易地写出。

在有集中质量或弹性支座时，需列在集中质量处或弹性支座处加列附加方程联立求解。

例5：求图7所示一端固定、一端简支梁在动荷载$P\sin\theta t$作用下的固端弯矩M_0和剪力Q_0。

〔解〕　边界条件　$y_0^* = \varphi_0^* = y_l^* = M_l^* = 0$，据(18)式有

$$-\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & D \\ \cdot & \cdot & \cdot & C \\ \cdot & \cdot & \cdot & B \\ \cdot & \cdot & \cdot & A \end{pmatrix}_{K\frac{L}{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ P \end{pmatrix}^* + \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi \\ 0 \\ Q \end{pmatrix}^*_L = \begin{array}{c} \begin{matrix} A & B & C & D \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} D & A & B & C \\ C & D & A & B \\ B & C & D & A \end{pmatrix}_{KL} \\ \begin{matrix} \uparrow & \uparrow & & \end{matrix} \end{array} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M \\ Q \end{pmatrix}^*_0$$

所以频率行列式 $|\Delta| = \begin{vmatrix} C_{KL} & D_{KL} \\ A_{KL} & B_{KL} \end{vmatrix}$。去掉那些取零的项以后，前面的等式是二元一次方程组。M_0在前，Q_0^*在后，所以M_0^*对应第一列，Q_0^*对应第二列。从而有

$$M_0^* = \frac{-\begin{vmatrix} D_{K\frac{L}{2}} & D_{KL} \\ B_{K\frac{L}{2}} & B_{KL} \end{vmatrix}}{|\Delta|} P^* \qquad Q_0^* = \frac{-\begin{vmatrix} C_{KL} & D_{K\frac{L}{2}} \\ A_{KL} & B_{K\frac{L}{2}} \end{vmatrix}}{|\Delta|} P^*$$

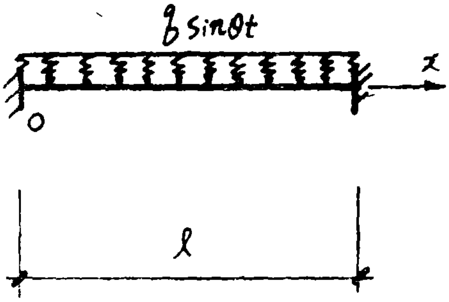

图 8

整理后得：$M_0 = \dfrac{B_{K\frac{L}{2}} D_{KL} - B_{KL} D_{K\frac{L}{2}}}{k(B_{KL}C_{KL} - A_{KL}D_{KL})} \cdot P\sin\theta t$

$$Q_0 = \frac{A_{KL}D_{K\frac{L}{2}} - C_{KL}B_{K\frac{L}{2}}}{B_{KL}C_{KL} - A_{KL}D_{KL}} \cdot P\sin\theta t$$

例6：求图8所示两端固定梁在均布动荷载$q\sin\theta t$作用下的固端弯矩M_0和剪力Q_0。

〔解〕：边界条件$y_0^* = \varphi_0^* = y_L^* = \varphi_L^* = 0$，由(18)式，

$$-\begin{pmatrix} (A-1) & \cdot & \cdot & \cdot \\ D & \cdot & \cdot & \cdot \\ B & \cdot & \cdot & \cdot \\ C & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}_{KL} \begin{pmatrix} q \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^* + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M \\ Q \end{pmatrix}_L^* = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ D & A & B & C \\ C & D & A & B \\ B & C & D & A \end{pmatrix}_{KL} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M \\ Q \end{pmatrix}_0$$

与例5一样，可知 $M_0^* = \dfrac{-\begin{vmatrix} A_{KL}-1 & D_{KL} \\ D_{KL} & C_{KL} \end{vmatrix}}{|\Delta|} q^*$　$Q_0^* = \dfrac{-\begin{vmatrix} C_{KL} & A_{KL}-1 \\ B_{KL} & D_{KL} \end{vmatrix}}{|\Delta|} q^*$

其中频率行列式 $|\Delta| = \begin{vmatrix} C_{KL} & D_{KL} \\ B_{KL} & C_{KL} \end{vmatrix}$。

整理后得 $M_0 = -\dfrac{q}{k^2} \dfrac{C_{KL}(A_{KL}-1) - D_{KL}^2}{C_{KL}^2 - B_{KL}D_{KL}} \cdot \sin\theta t$

$$Q_0^* = -\frac{q}{k} \frac{C_{KL}D_{KL} - B_{KL}(A_{KL}-1)}{C_{KL}^2 - B_{KL}D_{KL}} \cdot \sin\theta t$$

六、连续弹性支承杆的横向振动

当一杆件承受弹性支承时，如果弹性支承为均布的刚度C，则容易这样考虑弹性支承的作用：使惯性力一项减小cy_j。这样就可以想到，在方程(2)及本文前述的各相应公式中，只要对自由振动令$k_1^4 = \dfrac{\overline{m}\omega^2 - C}{EJ}$来代替$k^4 = \dfrac{\overline{m}\omega^2}{EJ}$；对强迫振动令$k_1^4 = \dfrac{\overline{m}\theta^2 - C}{EJ}$来代替$k^4 = \dfrac{\overline{m}\theta^2}{EJ}$，就可以得到连续弹性支承杆横向振动的初参数法公式。当然其解法也完全一样。

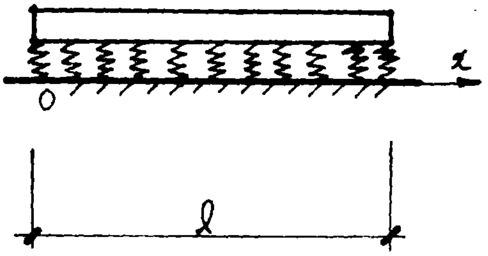

图 9

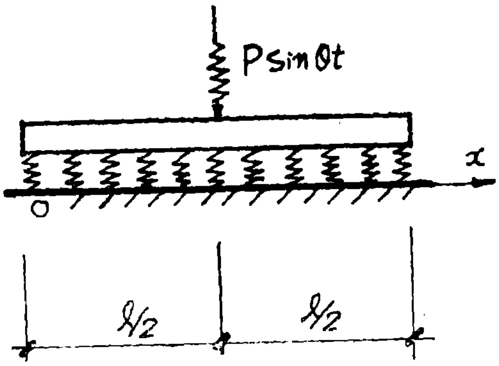

图 10

例7：求图9所示自由放置在弹性基础上梁的自振频率。

〔解〕 边界条件$M_0^* = Q_0^* = M_L^* = Q_L^* = 0$

则：

$$\begin{pmatrix} y \\ \varphi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_L^* = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ D & A & B & C \\ C & D & A & B \\ B & C & D & A \end{pmatrix}_{K1L} \end{array} \begin{pmatrix} y \\ \varphi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^*.$$

式中 $k_1 = \dfrac{\overline{m}\omega^2 - C}{EJ}$ 。

频率方程 $C^2_{K1L} - B_{K1L}D_{K1L} = 0$

求解此方程得$k_1L=0$时，$\omega^0 = \sqrt{\dfrac{C}{EJ}}\sqrt{\dfrac{EJ}{\overline{m}}} = \sqrt{\dfrac{C}{\overline{m}}}$；$k_1L=4.73L$时，

$$\omega_1 = \sqrt{\left(4.73^4 + \frac{C}{EJ}\right)\frac{EJ}{\overline{m}}}$$等等。

例8：求图10所示一端固定一端自由的弹性地基上的梁在梁跨中扰力$P\sin\theta t$作用下的固端弯矩M_0。

〔解〕 边界条件$y_0^* = \varphi_0^* = M_L^* = Q_L^* = 0$

因

$$\begin{pmatrix} y \\ \varphi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_L^* = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \downarrow & \downarrow & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ D & A & B & C \\ C & D & A & B \\ B & C & D & A \end{pmatrix}_{K1L} \end{array} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M \\ Q \end{pmatrix}_0^* + \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & D \\ \cdot & \cdot & \cdot & C \\ \cdot & \cdot & \cdot & B \\ \cdot & \cdot & \cdot & A \end{pmatrix}_{K1\frac{L}{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ P \end{pmatrix}^*$$

则有 $$M_0^* = \frac{-A_{KL}B_{K1\frac{L}{2}} + A_{K1\frac{L}{2}}B_{K1L}}{A^2_{K1L} - B_{K1L}D_{K1L}}P^*$$

其中 $$k_1 = \frac{\overline{m}\theta^2 - C}{EJ}$$

所以 $$M_0 = \frac{P}{k}\,\frac{A_{K1L}B_{K1\frac{L}{2}} - A_{KL}B_{K1}}{A^2_{K1L} - B_{K1L}D_{K1L}}。$$

参 考 文 献

[1] 钱培风：《结构动力学》、中国工业出版社，1964年。
[2] 别祖霍夫：《结构动力学习题及例题》