最优无偏估计量两个定理的推广

韩芝隆　贾军国

（郑州工学院　基础部）

提　要

本文将参数θ的最优无偏估计的充要条件和存在条件下的唯一性问题，推广到一般的可估计函数，并进行了严格的证明。

我们将最优无偏估计量的两个定理（一个是估计量T为参数θ的最优无偏估计的充要条件，另一个是参数θ的最优无偏估计量T至多存在一个，）加以推广，将参数θ推广到可估计函数g（θ），即证明了一个估计量T为可估计函数g（θ）的最优无偏估计量的充要条件，及可估计函数g(θ)的最优无偏估计量在概率为1相等的意义下是唯一的。

为便于定理的叙述，引入下面记号，记

$U=\{T: E_\theta(T)=g(\theta)\quad D_\theta(T)<\infty$，对一切 $\theta\in\Omega$ ……(1)

即U为可估计函数g(θ)的方差有限的无偏估计量的集合。

又记：

$U_0=\{T_0: E_\theta(T_0)=0, D_\theta(T_0)<\infty$，对一切$\theta\in\Omega\}$ ……(2)

U_0是可估计函数g(θ)的数学期

岴为0方差有限的估计量的集合。

Theorem 1　设U是非空的集合，有一$T\in U$，则T为(θ)g的最优无偏估计量的充要条件为对每个$T_0\in U_0$，有

$$E_\theta(T\cdot T_0)=0 \qquad \cdots\cdots(3)$$

其中$\theta\in\Omega$

Proof　必要性　用反证法，设$T\in U$为g(θ)的最优无偏估计量，但(3)式不成立，即存在T_0及$\theta_0\in\Omega$，使得

$$E_{\theta_0}(T\cdot T_0)\neq 0$$

由于$E_\theta(T_0)=0$，所以对一切C值$(T-CT_0)\in U$，于是

$$E_{\theta_0}(T-CT_0)^2=E_{\theta_0}(T^2)+C^2E_{\theta_0}(T_0^2)-2CE_{\theta_0}(T\cdot T_0)$$

由于$E_{\theta_0}(T\cdot T_0)\neq 0$，

一定能找到C的某值$C_0\neq 0$，例如：

$$C_0=\frac{E_{\theta_0}(T\cdot T_0)}{E_{\theta_0}(T_0^2)}$$

使得

$$E_{\theta_0}(T-C_0T_0)^2=E_{\theta_0}(T^2)+\left\{\frac{E_{\theta_0}(T\cdot T_0)}{E_{\theta_0}(T_0^2)}\right\}^2E_{\theta_0}(T_0^2)-2\frac{E_{\theta_0}(T\cdot T_0)}{E_{\theta_0}(T_0^2)}E_{\theta_0}(T\cdot T_0)$$

$$=E_{\theta_0}(T^2)-\frac{[E_{\theta_0}(T\cdot T_0)]^2}{E_{\theta_0}(T_0^2)}<E_{\theta_0}(T^2)$$

即 $E_{\theta_0}(T-C_0T_0)^2<E_{\theta_0}(T^2)$　　(4)

由于 $D_{\theta_0}(T-C_0T_0)=E_{\theta_0}[(T-C_0T_0)^2]-[E_{\theta_0}(T-C_0T_0)]^2$

$$=E_{\theta_0}[(T-C_0T_0)^2]-[g(\theta)]^2 \quad (5)$$

$$D_{\theta_0}(T)=E_{\theta_0}(T^2)-[E_{\theta_0}(T)]^2=E_{\theta_0}(T^2)-[g(\theta)]^2 \quad (6)$$

由(4)(5)(6)式得

$$D_{\theta_0}(T-C_0T_0)<D_{\theta_0}(T)$$

这与T为最优无偏估计量的假设矛盾。因此条件(3)是必要的。

充分性　设有某个 $T\in U$，使得(3)式成立，我们来证明T是 $g(\theta)$ 的最优无偏估计量。

对任一估计量 $T'\in U$，显然 $T-T'\in U_0$，因而对一切 $\theta\in\Omega$，有

$$E_\theta[T\cdot(T-T')]=0 \quad (7)$$

即　$E_\theta(T^2)=E_\theta(T\cdot T')$

由许互兹不等式知，对一切 $\theta\in\Omega$，

$$E_\theta(T^2)=E_\theta[T\cdot T']\leqslant\sqrt{E_\theta(T^2)}\cdot\sqrt{E_\theta(T'^2)}$$

所以　$E_\theta(T^2)\leqslant E_\theta(T'^2)$

由于　$E_\theta(T)=E_\theta(T')=g(\theta)$　因而对一切 $\theta\in\Omega$

$D_\theta(T)\leqslant D_\theta(T')$

所以T为 $g(\theta)$ 的最优无偏估计量

Theorem 2　设U是(1)式所定义的非空集合，则可估计函数 $g(\theta)$ 的最优无偏估计量在概率为 1相等的意义下是唯一的。

Proof　假设T和T′均为 $g(\theta)$ 的最优无偏估计量，即对一切 $\theta\in\Omega$，有

$E_\theta(T)=E_\theta(T')=g(\theta)$

$D_\theta(T)=D_\theta(T')$

因此对一切 $\theta\in\Omega$，有

$E_\theta(T-T')=0$

又显然有　$D_\theta(T-T')<\infty$

即　$T-T'\in U_0$，由定理1知，对一切 $\theta\in\Omega$，有

$E_\theta[T\cdot)T-T')]=0$

$E_\theta[T'(T-T')]=0$

于是对一切$\theta\in\Omega$，有

$$E_\theta[(T-T')^2]=E_\theta[T(T-T')-T'(T-T')]$$
$$=E_\theta[T(T-T')-E_\theta[T'(T-T')]=0$$

亦即对一切$\theta\in\Omega$，有

$$D_\theta(T-T')=E_\theta[(T-T')^2]-[E_\theta(T-T')]^2=0$$

由概率论定理：“若$D(\xi)=0$，则ξ依概率为 1 地等于它的数学期望$E(\xi)$，即$p\{\xi=E(\xi)\}=1$”。对一切$\theta\in\Omega$，有

$$p_\theta\{T=T'\}=1$$

即说明可估计函数$g(\theta)$的最优无偏估计量在概率为 1 相等的意义下是唯一的。

参 考 文 献

〔1〕中山大学编，《概率论与数理统计》

〔2〕复旦大学编，《概率论》二册二分册