叠加定理在含受控源线性网络中的应用

王俊鹍

（电机系）

提　要

本文提出了在满足存在唯一解的含线性受控源的线性网络中，应用迭加定理时的二种不同迭加方式，并用网络拓扑理论严格证明了受控源和独立源一样可以参与迭加。但当受控源单独作用时，其控制量应是原网络中所有独立源和受控源共同作用产生的。从而论证了二种不同迭加方式的等价性。

任何线性物理系统都具有可迭加性，因此，含受控源线性网络当然具有可迭加性。但对迭加定理能否适用于含受控源的线性网络，目前国内外一些电路理论著作中有不同的说法。大多数作者认为受控源是非独立电源，不可能单独存在，只有独立源才能参与迭加[1][2][3]。有的作者认为含受控源的线性网络是不能应用迭加定理的，如将受控源和独立源一样参与迭加，将导致错误的结果[4][7]。这些看法都是不全面的。文献[5]虽正确地提出了在含受控源线性网络中应用迭加定理时受控源和独立源一样可以参与迭加这个论点，但缺乏严格的证明，所以对这个问题有进一步探讨的必要。

（一）

众所周知，受控源是一种既有“电阻性”，又具有“电源性”的元件[1]。在线性网络分析中我们既可以把它看作电阻性元件，又可以把它看作电源。基此，在满足存在唯一解的含线性受控源的线性网络中，应用迭加定理时有两种不同的迭加方式。当受控源作为电阻性元件处理时，受控源不参与迭加。网络中各处的响应只是各独立源分别单独作用时，在该处产生的响应的迭加。即当电路中每一独立源单独作用时受控源均应保留，而这正是一般电路理论著作中的处理方法。当受控源作为电源处理时，则可将它和独立源同等看待，受控源亦可参与迭加。网络中各处的响应是独立源和受控源分别单独作用时，在该处产生的响应的迭加。这时受控源对响应的激励作用，应看成网络中的独立源通过受控源的控制量对响应的间接作用。因此，当受控源单独作用时应看成一个知知电源，其控制量是网络中所有独立源和受控源共同作用的结果。文献[5]、[7]中受控源参与迭加时未注意这一点，即受控源单独作用时，未保持用所有独立源和受控源共同作用时的原控制量，从而引出了错误的结论。为了说明上

述两种迭加方式的计算结果是相同的，先看一个简单的例子。

例一、图1(a)示一含CCVS的直流网络，试求I_X

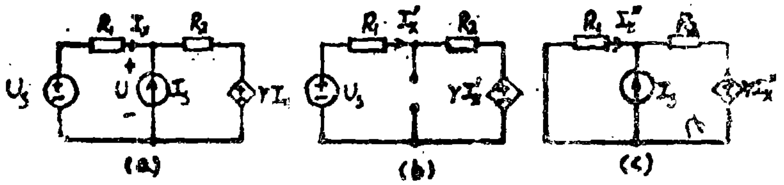


图1

解：按第一种迭加方式只有独立源参与迭加，当独立源单独作用时受控源仍保留，且与电阻同样对待。

U_S电压源单独作用时〔图1(b)〕有

$$I_X' = \frac{U_S}{R_1+R_2+r}$$

I_S电流源单独作用时〔图1(c)〕有

$$I_X'' = -\frac{R_2 I_S}{R_1+R_2+r}$$

由迭加定理有

$$I = I_X' + I_X'' = \frac{U_S}{R_1+R_2+r} - \frac{R_2 I_S}{R_1+R_2+r} \tag{1}$$

此题若用弥尔定理求解，则有

$$U = \frac{\frac{U_S}{R_1} + I_S + \frac{rI_x}{R_2}}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}} = \frac{R_2 U_S}{R_1+R_2} + \frac{R_1 R_2}{R_1+R_2} I_S + \frac{rR_1 I_x}{R_1+R_2}$$

由有源支路欧姆定律有

$$I_x = \frac{U_S - U}{R_1} = \frac{U_S}{R_1+R_2} - \frac{R_2 I_S}{R_1+R_2} - \frac{rI_x}{R_1+R_2} = I_x^{(1)} + I_x^{(2)} + I_x^{(3)} \tag{2}$$

显然，由（2）式中解出的I_x所得结果与（1）式相同。但从（2）式可以认为I_x是$I_x^{(1)}$、$I_x^{(2)}$、$I_x^{(3)}$三个分量迭加的结果。其中$I_x^{(1)} = \frac{U_S}{R_1+R_2}$是独立源$U_S$单独作用，其它独立源和受控源均置零的结果，如图 2 (a)所示；$I_x^{(2)} = -\frac{R_2 I_S}{R_1+R_2}$是独立源$I_S$单独作用，其他独立源和受控源均置零的结果，如图2(b)所示；$I_x^{(3)} = -\frac{rI_x}{R_1+R_2}$是受控源$rI_x$(注意其控制量为图1(a)网络中原控制量$I_x$而不是$I_x^{(3)}$单独作用，其他电源均置,零所得结果如图2(c)所示。

这就是含受控源的线性网络在应用迭加定理时的另一种迭加方式。即受控源如独立源一样可参与迭加，但当受控源单独作用时，其控制量必须是原网络中所有独立源和受控源共同

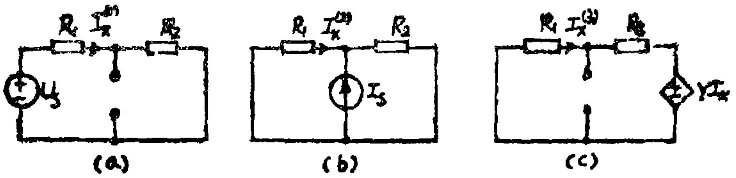


图2

作用的结果。

（二）

现在进一步讨论，将例一导出的有关结论推广到一般含受控源的线性网络上，并用网络拓扑的节点法来证明含线性受控源的线性网络应用迭加定理时，两种迭加方式是等价的。假设一个线性网络具有m条支路，n个节点。我们采用图3所示的标准支路，支路中电压和电流的关系是

$$I_b = I_e + I_d - I \quad (3)$$

$$U_b = U_e + U_d - E \quad (4)$$

而元件电压与电流间的关系是

$$Ie = YeUe \quad (5)$$

设支路电流用列向量来表示，即$〔I_b〕=〔I_{b1}、I_{b2}\cdots I_{bm}〕^T$，同样地有列向量〔Ie〕、$〔I_d〕$、〔I〕、$〔U_b〕$、〔Ue〕、$〔U_d〕$及〔E〕。这样，可得出下列支路电压、电流的矩阵方程

$$〔I_b〕=〔Ie〕+〔I_d〕-〔I〕 \quad (6)$$

$$〔U_d〕=〔Ue〕+〔U_d〕-〔E〕 \quad (7)$$

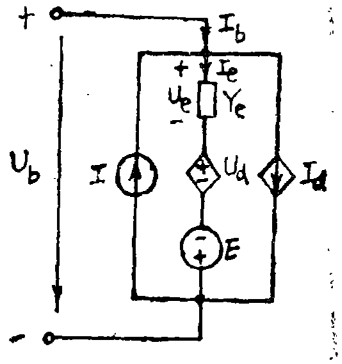


图3

元件电压与电流间的矩阵方程为

$$〔Ie〕=〔Ye〕〔Ue〕 \quad (8)$$

其中〔Ye〕为元件导纳矩阵。

设受控源受控支路的非独立电压和电流是控制支路元件电压电流的线性组合。因而非独立电压源为

$$〔U_b〕=〔D'〕〔Ue〕+〔R〕〔Ie〕=\{〔D'〕+〔R〕〔Ye\}〔Ue〕=〔D〕〔Ue〕 \quad (9)$$

其中〔D′〕为电压控制电压源放大倍数矩阵，

〔R〕为电流控制电压源互阻矩阵。

同样地，非独立电流源为

$$〔I_d〕=〔G〕〔Ue〕+〔B'〕〔Ie〕=\{〔G〕〔Ye〕^{-1}+〔B'〕\}〔Ie〕=〔B〕〔Ie〕 \quad (10)$$

其中〔G〕为电压控制电流源互导矩阵，

〔B′〕为电流控制电流源放大系数矩阵。

由〔7〕式可得

$$〔Ue〕+〔U_d〕=\{〔1〕+〔D〕\}〔U_b〕=〔U_b〕+〔E〕 \quad (11)$$

这样，可以求得

$$[Ue]=\{[1]+[D]\}^{-1}\{[U_b]+[E]\} \tag{12}$$

又因元件电流为

$$[Ie]=[Ye][Ue]=[Ye]\{[1]+[D]\}^{-1}\{[U_b]+[E]\} \tag{13}$$

支路电流为

$$[I_b]=[Ie]+[I_d]-[I]=\{[1]+[B]\}[Ie]-[I] \tag{14}$$

将(13)式代入(14)式得

$$[I_b]=\{[1]+[B]\}[Ye]\{[1]+[D]\}^{-1}\{[U_b]+[E]\}-[I] \tag{15}$$

若令

$$[Y_b]=\{[1]+[B]\}[Ye]\{[1]+[D]\}^{-1} \tag{16}$$

则

$$[I_b]=[Y_b]\{[U_b]+[E]\}-[I] \tag{17}$$

其中$[Y_b]$称为支路导纳矩阵。

由于KCL的矩阵形式为

$$[A][I_b]=0 \tag{18}$$

将(17)式代入上式得

$$[A]\{[Y_b]([U_b]+[E])-[I]\}=0 \tag{19}$$

而节点电压与支路电压的关系为

$$[U_b]=[A]^T[Un] \tag{20}$$

将此式代入(19)式并整理得节点方程为

$$[A][Y_b][A]^T[Un]=[A][I]-[A][Y_b][E] \tag{21}$$

这就是所有独立源与受控源共同作用时的节点方程。在导出该方程过程中，我们把受控源当作电阻性元件处理，而受控源的作用则反映在$[Y_b]$中。

若网络中只有独立源单独作用，不存在受控源，则矩阵$[B]=0$及$[D]=0$，这时$[Y_b]=[Ye]$，由(21)式得网络的节点方程为

$$[A][Ye][A]^T[Un']=[A][I]-[A][Ye][E] \tag{22}$$

若网络中只有受控源作用，不存在独立源，这时标准支路变为图（4）所示的形式。据此，我们来重新导出其节点方程。

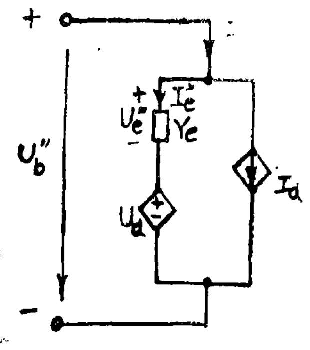


图4

支路电压、电流的矩阵方程为

$$[I_b'']=[Ie'']+[I_d] \tag{23}$$

$$[U_b'']=[Ue'']+[U_d] \tag{24}$$

元件的电压、电流间的矩阵方程为

$$[Ie'']=[Ye][Ue''] \tag{25}$$

注意到图（4）中受控源的控制量U_d与I_d，仍与图3中受控源的控制量相同，于是（9）式与(10)式仍成立，即

$$[I_d]=[B][Ie] \tag{26}$$

$$[U_d]=[D][Ue] \tag{27}$$

将(27)式代入(24)式并整理得

$$[Ue''] = [U_b''] - [D][Ue] \tag{28}$$

从而

$$[Ie''] = [Ye][Ue''] = [Ye][U_b''] - [Ye][D][Ue] \tag{29}$$

把(29)式代入(23)式，并考虑到(26)式与(8)式得

$$\begin{aligned}[I_b''] &= [Ie''] + [I_d] = [Ye][U_b''] - [Ye][D][Ue] + [B][Ie] \\ &= [Ye][U_b''] - [Ye][D][Ue] + [B][Ye][Ue]\end{aligned} \tag{30}$$

由$[A][I_b''] = 0$可得

$$[A][I_b''] = [A][Ye][U_b''] - [A][Ye][D][Ue] + [A][B][Ye][Ue] = 0 \tag{31}$$

考虑到$[U_b''] = [A]^T[Un'']$代入上式得节点方程

$$[A][Ye][A]^T[Un''] = [A][Ye][D][Ue] - [A][B][Ye][Ue] \tag{32}$$

我们将(32)式右端变形：

$$\begin{aligned}(32)\text{式右端} &= [A][Ye][D][Ue] + [A][Ye][Ue] - [A][Ye][Ue] - [A][B][Ye][Ue] \\ &= [A][Ye]\{[1]+[D]\}[Ue] - [A]\{[1]+[B]\}[Ye][Ue] \\ &= [A][Ye]\{[U_b]+[E]\} - [A]\{[1]+[B]\}[Ye]\{[1]+[D]\}^{-1}\{[U_b]+[E]\} \\ &= [A][Ye][E] - [A][Y_b][E] + [A][Ye][A]^T[Un] - [A][Y_b][A]^T[Un]\end{aligned} \tag{33}$$

上面变形过程中应用了(12)式、(16)式与(20)式。

于是有

$$\begin{aligned}&[A][Ye][A]^T[Un''] - [A][Ye][A]^T[Un] + [A][Y_b][A]^T[Un] \\ &= [A][Ye][E] - [A][Y_b][E]\end{aligned} \tag{34}$$

把(22)式与(34)式相加得

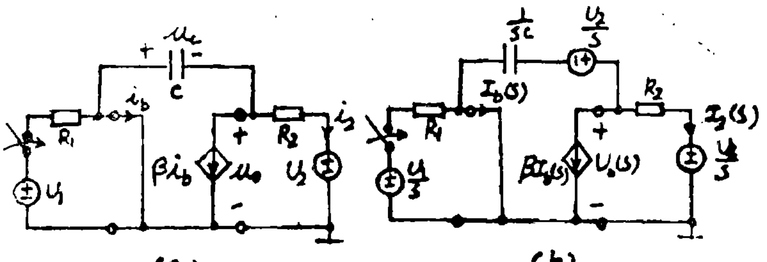
$$\begin{aligned}&[A][Ye][A]^T\{[Un'] + [Un'']\} - [A][Ye][A]^T[Un] + [A][Y_b][A]^T[Un] \\ &= [A][I] - [A][Y_b][E]\end{aligned} \tag{35}$$

上式与(21)式比较显然有

$$[Un] = [Un'] + [Un''] \tag{36}$$

这就证明了迭加定理。

综上所述，可以得出如下的结论：在满足存在唯一解的含线性受控源的线性网络中，应用迭加定理时有两种不同的迭加方式。其一只是独立源参与迭加，但当每一独立源单独作用



(a) (b)

图5

时，受控源均应保留；其二是受控源如独立源一样亦可参与迭加，但当受控源单独作用时，其控制量应是原网络中所有独立源和受控源共同作用产生的。两种迭加方式是等价的。

例二：图5(a)所示密勒积分电路，求t≥0时输出电压$\mu_0(t)$

解：开关闭合前电路处于稳态，$i_b=0$故$\beta i_b=0$，受控电流源开路，R_2中无电流，故有$\mu c(0_-)=U_2=\mu c(0_+)$。

我们用运算法来求解，作出运算等效电路如图5(b)所示。将电容电压的初始条件看成是与电容串联的阶跃电势源（独立源），这样，原来求全响应的问题就转化为求零状态响应的问题，从而可用迭加定理求解。

当所有独立源及电容电压的初始条件的等效阶跃电势源作用，受控电流源置零时，有

$$I_2'(s)=0,\ U_0'(s)=\frac{U_2}{S}\text{及}I_b'(s)=\frac{U_1}{R_1S}。$$

当受控电流源$\beta I_b(s)$〔注意不是$\beta I_b''(s)$〕单独作用，所有其他电源均置零时，有

$$U_0''(s)=-\beta I_b(s)\frac{R_2\cdot\frac{1}{sc}}{R_2+\frac{1}{sc}}=-\frac{\beta R_2}{1+R_2cs}I_b(s)$$

$$I_b''(s)=-\beta I_b(s)\frac{R_2}{R_2+\frac{1}{sc}}=-\frac{\beta R_2cs}{1+R_2cs}I_b(s)$$

按迭加定理有

$$I_b(s)=I_b'(s)+I_b''(s)=\frac{U_1}{R_1S}-\frac{\beta R_2cs}{1+R_2cs}I_b(s)$$

从上式解得

$$I_b(s)=\frac{U_1}{R_1S}\frac{1+R_2cs}{1+(1+\beta)R_2cs}$$

于是

$$U_0''(s)=\frac{\beta R_2U_1}{R_1}\frac{1}{s[1+(1+\beta)R_2cs]}$$

最后得

$$U_0(s)=U_0'(s)+U_0''(s)=\frac{U_2}{S}-\frac{\beta R_2U_1}{R_1}\frac{1}{S[1+(1+\beta)R_2cs]}$$

进行拉氏反变换得时域解

$$\mu_0(t)=U_2-\frac{\beta R_2}{R_1}U_1(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\qquad t\geqslant 0$$

式中$\tau=(1+\beta)R_2C$。

读者不难用只有独立源参与迭加方式或“三要素法”验证上述解答的正确性。

参 考 文 献

〔1〕、C.A.狄苏尔、葛守仁著 林争辉译 王蔼校“基本电路理论”上下册人民教育出版社1979.

〔2〕、李瀚荪编：“电路分析基础”〈上册〉人民教育出版社1978.

〔3〕、邱关源主编“电路”（修订本）〈上册〉人民教育出版社1983.

〔4〕、“网络理论讲义”（一）（第三分册）天津大学电工原理教研室1979.

〔5〕、武汉工学院胡焕章郑天柱：“线性网络中受控源是否可以参与迭加”武汉电工理论学会通讯第二期1982.

〔6〕、“Electronic Circuits and Applications” stephen D. Senturia and Bruce D. Wedlock1975.

〔7〕、“Circuit Theory Fundamentals and Applications” Aram Budak 1978.