

# 根轨迹图的计算机绘制

耿 直

(自动化教研室)

## 提 要

本文在对计算机绘制根轨迹图的收敛试探法分析、研究的基础之上,对原算法和程序进行了大量的修正和补充,它不但保持了原方法中的特点而且扩充了绘制正反馈系统根轨迹图和含有延迟环节的系统的根轨迹图的程序。从而建立了更加完备、实用的绘制根轨迹图的程序,与文献[3]中给出的计算机求解根轨迹图相比有以下几个优点:①人工输入数据少;②功能齐全,适应性强;③计算机在CRT上绘图清晰、直观;④具有建立数字文件的功能,便于贮存多个根轨迹的计算结果。

## 一、绘制根轨迹图的基本原理

计算机绘制根轨迹图的收敛试探法同人工绘制根轨迹图的依据一样,都是建立在幅角条件的基础之上的,但是对于不同的系统,像:负反馈控制系统、正反馈控制系统以及含有延迟环节的控制系统当中,其幅角条件也不相同,所以下面分别介绍绘制上述几类系统根轨迹的条件。

### 1. 绘制根轨迹的条件

系统的结构图一般如图(1)所示,对于负反馈控制系统而言,根轨迹上的点应满足它的特征方程式:

$$1 + G(s)H(s) = 0 \quad \text{或: } G(s)H(s) = -1$$

也就是必须满足下面两个条件

$$\text{幅角条件: } \angle G(s)H(s) = (2k+1)\pi \quad (1)$$

其中:  $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$$\text{幅值条件: } |G(s)H(s)| = 1 \quad (1')$$

对于正反馈控制系统而言(主反馈信号为“正”号),根轨迹上的点应满足它的特征方程

$$1 - G(s)H(s) = 0$$

$$\text{或} \quad G(s)H(s) = 1$$

也就是必须满足下面两个条件

$$\text{幅角条件} \quad \angle G(s)H(s) = 2k\pi \quad (2)$$

$$\text{幅值条件} \quad |G(s)H(s)| = 1 \quad (2')$$

对于 $G(s)$ 中包含有延迟环节 $e^{-ms}$ 的系统中(以负反馈系统为例),根轨迹上的点应满足

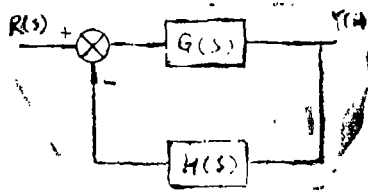


图 1

它的特征方程

$$1 + G(s)H(s) = 0$$

或  $G_1(s)H(s)e^{-\tau s} = -1$  其中:  $G(s) = G_1(s)e^{-\tau s}$

也就是必须满足下面两个条件

$$\text{幅角条件} \quad \angle G_1(s)H(s)e^{-\tau s} = (2k+1)\pi$$

$$\text{或:} \quad \angle G_1(s)H(s) = (2k+1)\pi + \tau\omega \quad (3)$$

$$\text{幅值条件} \quad |G_1(s)H(s)e^{-\tau s}| = 1$$

$$\text{或:} \quad e^{-\tau\omega} |G_1(s)H(s)| = 1 \quad (3')$$

其中:  $s = \sigma + j\omega$

$$\text{那么} \quad e^{-\tau s} = e^{-\tau\sigma} \cdot e^{-j\tau\omega} = e^{-\tau\sigma} / -\tau\omega \quad (4)$$

对上边①, ①', ②, ②', ③, ③' 6个等式综总, 得出绘制各类型系统根轨迹图的统一条件如下

$$\text{幅角条件} \quad \angle G_1(s)H(s) = (2k+1 - ZFK)\pi + \tau\omega \quad (5)$$

$$\text{幅值条件} \quad G_1(s)H(s) = e^{\tau\sigma} \quad (6)$$

其中: ZFK—在负反馈控制系统中取“0”, 在正反馈控制系统中取“1”。

$\tau$ —延迟时间常数, 在无延迟环节时取“0”。

我们知道绘制根轨迹图的幅角条件是充要条件, 幅值条件则仅是必要条件, 所以计算机绘制根轨迹图, 首先是利用幅角条件⑤确定出整个复平面内根轨迹上的点, 而后利用幅值条件⑥算出对应各点的根轨迹增益。

## 2. 收敛试探法原理

该方法是在已知根轨迹起始段第一、二点的情况下, 用试探的方法逐步确定出根轨迹上所有点的过程。

我们知道根轨迹除了一些特殊点之外都是光滑连续曲线, 所以利用已知的二点  $s_0$ 、 $s_1$  可以用线性外插法得到第一个试验点  $s_2$ , 它必然在  $s_0$ 、 $s_1$  两点的延长线上。见图(2)

$s_1$  与  $s_2$  相距一个计算步长  $L$ , 外插角为  $A$ 。  $s_2$  是否在根轨迹上还要看它是否满足幅角条件, 要想使幅角条件一点误差也没有的满足是不可能的, 为此, 我们事先设定一个允许误差角  $\Delta\phi$  (取  $0.02^\circ$ ), 并令:

$$\angle G_1(s_2)H(s_2) - (2k+1 + ZFK)\pi - \tau\omega = D_1 \quad (7)$$

$D_1$  为实际误差角, 只要  $D_1$  小于等于  $\Delta\phi$ , 即:

$$D_1 \leq \Delta\phi \quad (8)$$

就可以认为  $s_2$  是根轨迹上的点, 否则还需重新找第二个试验点, 具体方法是:

(1) 在原外插角  $A$  上增加一个试探角  $B$ , 即:  $A' = A + B$ , 这样可以在距  $s_1$  点一个计算步长  $L$  处得到一点  $s_2'$ 。

(2) 把  $s_2'$  代入(3)式中得  $D_1'$ , 用  $D_1$  和  $D_1'$  两个误差角来修正外插角  $A$ 。

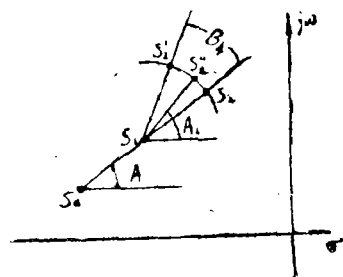


图2

$$\text{即: } A_1 = A + \frac{D_1}{D_1 - D_1'} B_1.$$

(3) 由新的外插角  $A_1$  和计算步长  $L$  找到第二个试验点  $s_2''$ 。

而后就可以仿上述方法重复进行工作，直到找到满足⑧式的点为止。

## 二、部分算法说明

为了便于计算机求解，我们采取的是把  $s$  平面上的根轨迹图以折线点分段，由计算机一段一段地求解的，为此先说明第一个问题。

### 1. 根轨迹的分段

我们一共把根轨迹分成四段，各段的起始点和终止点分别叙述如下。

① 起始点为实轴上分离点或复平面内的分离点；复平面内的共轭复数极点，实轴上的穿越点和实轴上为奇数的开环零点、极点（对负反馈系统而言）。

② 终止点为复平面内规定的“无穷远点”；复平面内的开环零点和分离点，实轴上的会合点、穿越点以及“无穷远点”。

注：无穷远点是指超出CRT显示范围的点。

### 2. 各段根轨迹起始第一、二点的确定。

(1) 起始于实轴上分离点的根轨迹第一点为分离点本身，第二点在其分离角方位上距第一点一个计算步长  $L$ 。

(2) 起始于复平面内分离点的根轨迹第一点为分离点本身，第二点在其分离角方位上距第一点一个计算步长  $L$ 。由于分离角为  $180^\circ$  和  $0^\circ$ ，所以由这种分离点起始的根轨迹应为二条，见图(3)所示。

(3) 起始于共轭复数极点的根轨迹段，第一点为极点本身，第二点为出射角方位上距该极点一个计算步长  $L$ 。

(4) 起始于穿越点的根轨迹段见图(4)。  $S$  是穿越点，若根轨迹是从复平面的  $S_0$  点到达  $S$  点，那么根轨迹必穿越实轴到达  $S$  平面的第三象限的  $S_1$  点，由于根轨迹的对称性和本程序不计算、不绘制下半  $S$  平面的根轨迹图，所以从穿越点出发的根轨迹第二点应在  $S_1$  点的镜象点  $S_1'$  处。具体确定办法是：首先由收敛试探法求出  $S_1$  的具体坐标位置并记录下来，那么第二点取  $S_1$  的实部和  $S_1$  的虚部的绝对值作为  $S_1'$  点的实部和虚部。

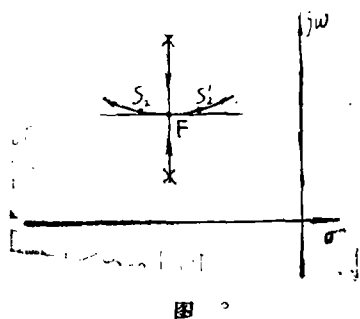


图 3

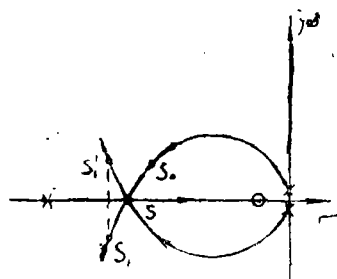


图 4

同时我们把实轴上具有四重根的点也归到了穿越点里边, 把它看成一种特殊情况处理, 见图(5)。由于它的特殊性, 凡这种点其分离角均为 $3\pi/4$ 和 $\pi/4$ , 所以起始于该点的根轨迹应为二条, 二个延续点都应在以S点为圆心, L为半径的半圆上, 其方位角一个为 $3\pi/4$ , 一个为 $\pi/4$ 。即:  $S_2$  和  $S_2'$  点。

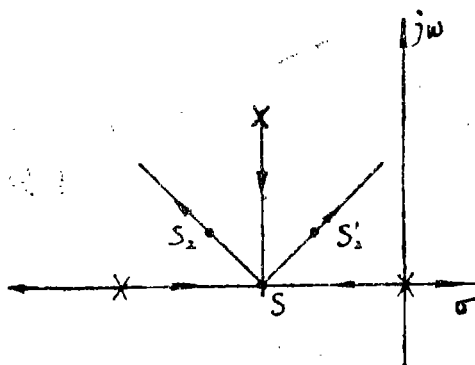


图5

### 3. 绘制根轨迹图的范围

由于根轨迹的对称性以及保证在有限的CRT屏幕上绘图清晰, 所以根轨迹的计算和绘制都限制在S平面上半平面进行。

### 4. 分离点、会合点、穿越点的判别

根轨迹是从分离点、会合点、穿越点出发或终止的, 所以有必要告诉计算机它们的个数及具体数值。我们在人工绘制根轨迹图时知道以上各点均为重根点, 所以首先可以用 $\frac{dk}{ds} = 0$ 的方程把这些重根点找出来, 而后用它们各自的特点来分析哪些是分离点、哪些是会合点、哪些是穿越点, 哪些点什么都不是而应舍去。我们在程序中给出了自动求取 $\frac{dk}{ds} = 0$ 方程根和判别上述各点的子程序, 具体判别方法说明如下

#### ①分离点的判别

我们知道根轨迹的分离点, 不论在实轴上还是在复平面内, 都是当系统参变量 $k_1$ 从小到大变化时, 有几条根轨迹先在分离点相遇而后分开的, 见图6。可见在进入分离点时所对应的参变量 $k_1$ 都小于分离点处的 $k_1$ 值,

$$\text{即: } \begin{cases} k_1 |_{s=s_0} > k_1 |_{s=s_1} \\ k_1 |_{s=s_0} > k_1 |_{s=s_1'} \end{cases}$$

这仅是一种可能。另一种可能是如果系统中出现重极点, 那么重极点也必须是分离点。所以我们可以所有的重根中利用 $k_1$ 值和是否等于开环极点来定出分离点的个数及数值。

#### ②会合点判别

会合点的出现也同分离点一样, 当系统中的参变量 $k_1$ 从小到大变化时, 有几条根轨迹先在会合点相遇, 而后分开的, 见图7。但是我们从图中可以看出, 会合点处的 $k_1$ 值具有这样

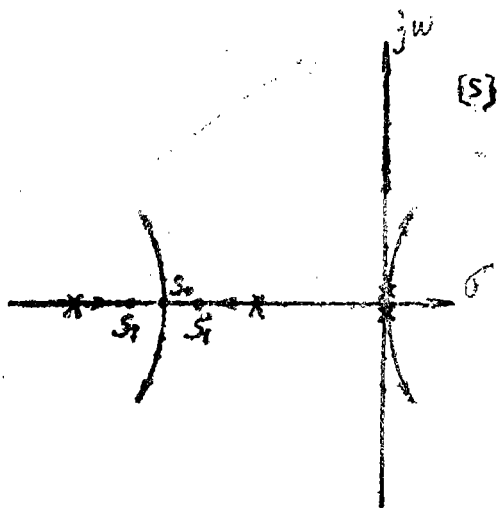


图6

的性质：

$$k_1 |s-s_0| < k_1 |s-s_1|$$

$$k_1 |s-s_0| < k_1 |s-s_1'|$$

这种性质恰恰与分离点相反，这仅是一种可能。另一种可能是，如果系统中出现重零点，那么重零点也必然是会合点。所以我们可以所有重根中利用 $k_1$ 值和是否等于开环零点来判定出会合点的个数及数值。

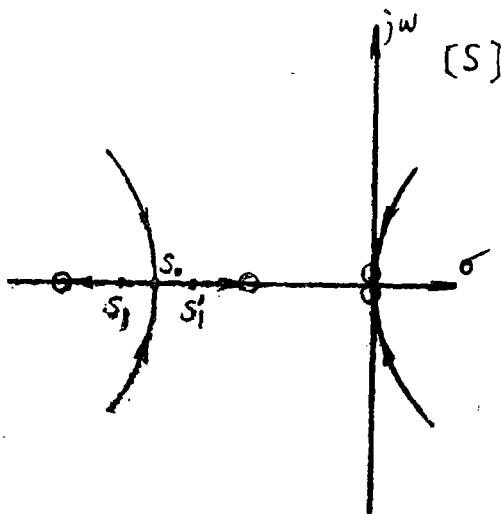


图 7

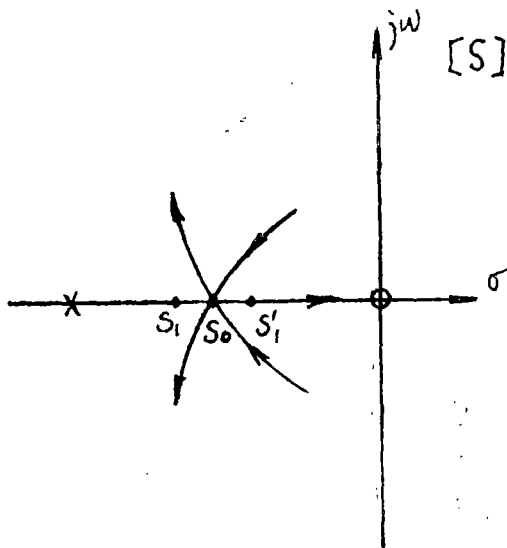


图 8

### ③穿越点判别

穿越点只在实轴上出现，它是当系统的参变量 $k_1$ 从小到大变化时，有几条从复平面来的根轨迹在实轴上穿越而引起的。我们从图8中可以看出，穿越点 $s_0$ 处的 $k_1$ 值满足：

$$k_1 |s-s_0| > k_1 |s-s_1|, \quad k_1 |s-s_0| < k_1 |s-s_1'|$$

所以我们完全可以利用 $k_1$ 值来判定出穿越点的个数及数值。

## 三、程序框图说明

### 1. 程序总框图 见图(9)

从总框图可以看出该程序一共由四部分组成。

(1)输入数据：由方框①完成，一共输入：

N—开环极点的个数

M—开环零点的个数

L—计算步长

$M_2$ —CRT显示最大值

$P(N, 0)$ ,  $P(N, 1)$ —开环极点的实部和虚部

$Z(M, 0)$ ,  $Z(M, 1)$ —开环零点的实部和虚部

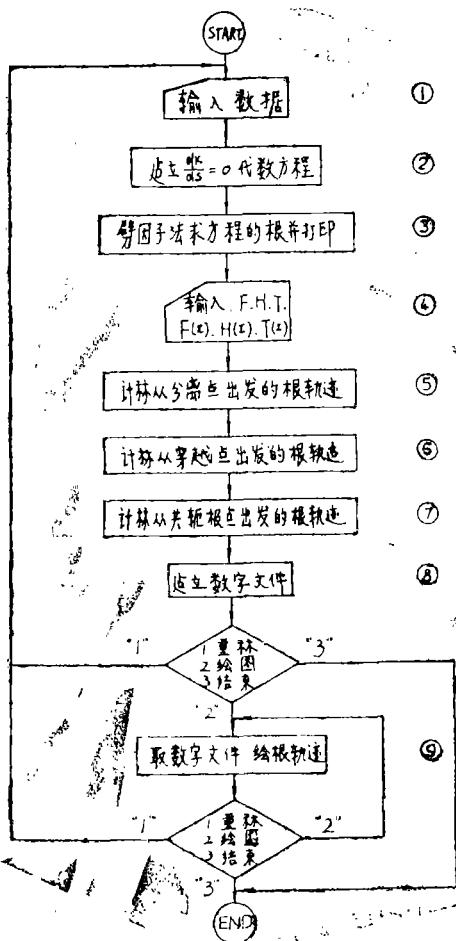


图 9

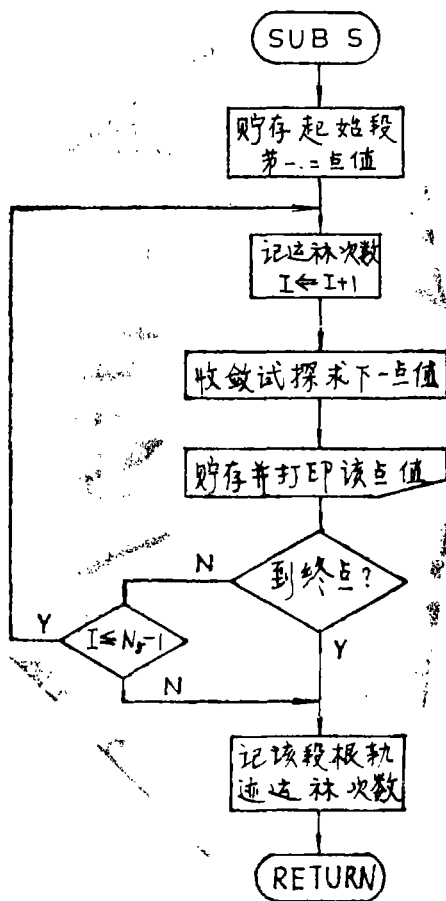


图10

YC——延迟环节时间常数具体值

ZFK——正、负反馈选择。打“0”负反馈；打“1”正反馈。

(2) 计算根轨迹各段的值：由方框⑤、⑥、⑦完成。

(3) 建立数字文件：由方框⑧完成。

(4) 绘制根轨迹图：由方框⑨完成。

## 2. 部分细框图

### (1) 收敛试探法求下一点子程序细框图

它是为了完成计算各段根轨迹上的点而设置的，是程序总图方框⑤、⑥、⑦的主要子程序之一。其框图见图10。

\*注：图9中(4)应为“求出F, H, TF(I)H(I)T(I)”。

(2) 绘制根轨迹图细框图, 见图11。

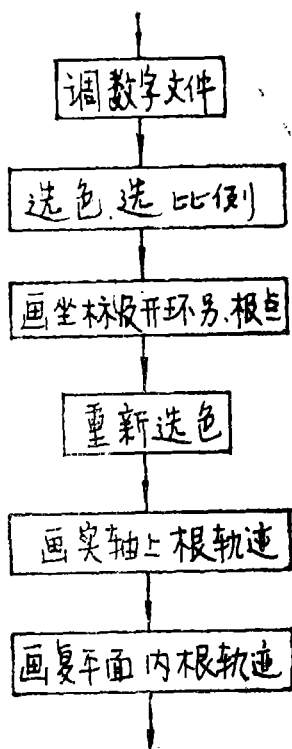


图11

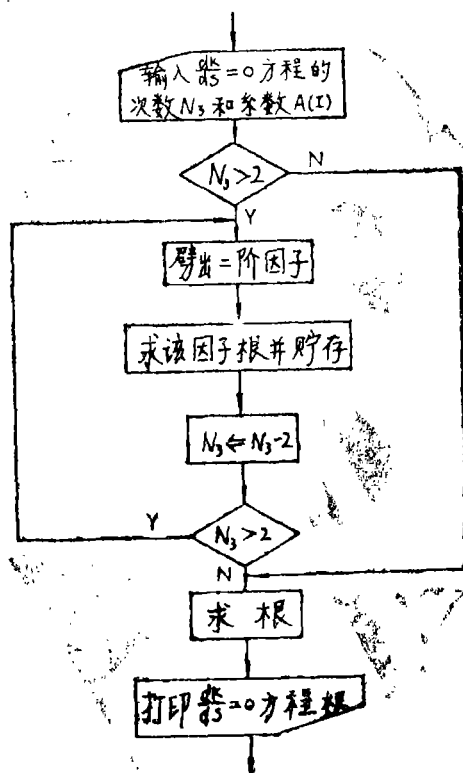


图12

(3) 劈因子法求高阶代数方程细框图 见图12。

(4) 判定分离点、会合点、穿越点细框。见图13。

#### 四. 举例

[例 1] 系统的开环传递函数为 (负反馈)

$$G(s)H(s) = \frac{K_1(s+0.11111)}{s^2(s+1)}$$

该系统有三个开环极点、一个开环零点, 计算机运行结果如下。

其中:  $J_1$ —根轨迹段数

$I$ —每段根轨迹计算点数

$S(I, 0)$ —根轨迹上点的实部

$S(I, 1)$ —根轨迹上点的虚部

$K(I)$ —对应第  $I$  点的根轨迹增益

$E(I) - \frac{dk}{ds} = 0$  方程根的实部

$C(I) - \frac{dk}{ds} = 0$  方程根的虚部

$F, H, T$ ——分离点、会合点、穿越点个数。

$F_1(I)$ 、 $F_2(I)$ 、一分离点的实部和虚部。

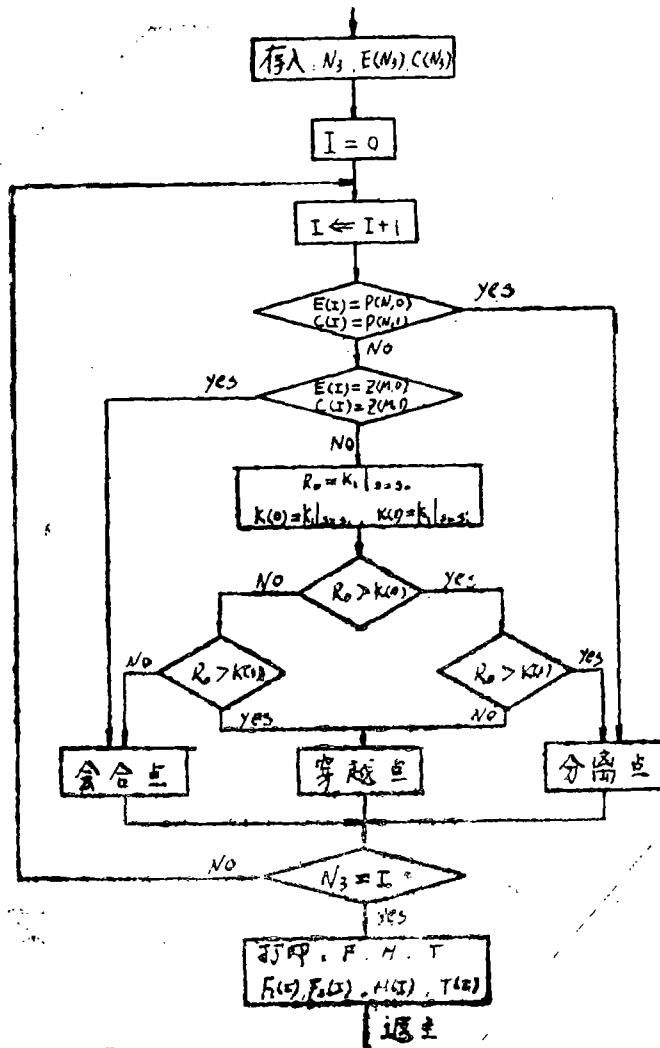


图13

$H(I)$ —会合点的值

$T(I)$ —穿越点的值

IRUN

N, M, L, M2=?3, 1, 0.05, 1.5

P(0, 0), P(0, 1)=? 0, 0

P(1, 0), P(1, 1)=? 0, 0

P(2, 0), P(2, 1)=? -1, 0

Z(0, 0), Z(0, 1)=? -0.11111, 0

YC, ZFK=? 0, 0

FANG CHENG GEN

E(1)=1.90921128E-08 C(1)=0

E(2)=-.332587158 C(2)=0

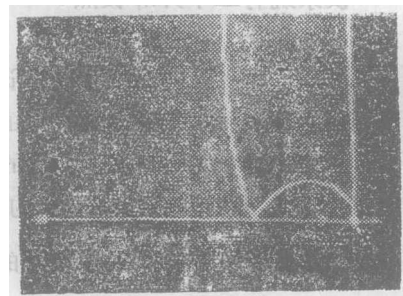


图14



$$E(3) = -.334077841 \quad C(3) = 0$$

$$F_1(0) = 0 \quad F_2(0) = 0$$

$$T(0) = -.0.332587158$$

$$T(1) = -.0.334077841$$

$$F = 1 \quad H = 0 \quad T = 1$$

## JI SUAN

*****				
J <sub>1</sub>	I	S(I, 0)	S(I, 1)	K(I)
1	0	0	0	0
1	1	0	.06	.028560426
1	2	-.0464372477	.0979945	.0960068978
1	3	-.0996910368	.125635664	.185351191
1	4	-.159528533	.130048602	.259622809
1	5	-.217242055	.113642828	.30575847
1	6	-.267838058	.0813931075	.326875787
1	7	-.30931907	.0380419179	.332881551
1	8	-.350800197	-5.30916172E-03	.333315292
1	9	-.333	0	.333315292
J <sub>1</sub>	I	S(I, 0)	S(I, 1)	K(I)
2	0	-.333	0	.333315292
2	1	-.36470802	.050937231	.334126698
2	2	-.378815595	.109255121	.339064443
2	3	-.392923016	.167573049	.350490178
2	4	-.404478113	.226449867	.369418045
2	5	-.412644868	.28589147	.396183236
2	6	-.418811124	.345573773	.430831245
2	7	-.423493604	.40539078	.473286408
2	8	-.427098359	.465282397	.523444388
2	9	-.429908812	.525216539	.581204721
2	10	-.432127825	.585175491	.646482312
2	11	-.434346679	.645134449	.719205087
2	12	-.435334499	.705126317	.799323083
2	13	-.43632216	.765118188	.886799246
2	14	-.437309661	.825110061	.981598881
2	15	-.438297004	.885101937	1.08369573
2	16	-.439284188	.945093815	1.19306682

2	17	-.439537227	1.00509328	1.3097078
2	18	-.439790106	1.06509275	1.43359992
2	19	-.440042827	1.12509222	1.56473635
2	20	-.439352688	.984728831	1.26930404
2	21	-.440224343	1.03472123	1.36998981
2	22	-.440174079	1.08472121	1.47570816

〔例2〕绘制下述正反馈控制系统的根轨迹图

$$G(s)H(s) = \frac{k_1(s+1+j2)(s+1-j2)}{s^2(s+1)(s+2)(s+3-j1)(s+3+j1)}$$

该系统为阶系统，一共有6个开环极点和两个共轭开环零点。计算机运行及绘图结果如下

JRUN

N, M, L, M2 = ?6, 2, .06, 5

P(0, 0), P(0, 1) = ?-3, -1

P(1, 0), P(1, 1) = ?-3, 1

P(2, 0), P(2, 1) = ?-2, 0

P(3, 0), P(3, 1) = ?-1, 0

P(4, 0), P(4, 1) = ?0, 0

P(5, 0), P(5, 1) = ?0, 0

Z(0, 0), Z(0, 1) = ?-1, -2

Z(1, 0), Z(1, 1) = ?-1, -2

YC, ZFK = ?0, 1

FANG CHENG GEN

E(1) = -1.51834607 C(1) = 0

E(2) = -.874264021 C(2) = -2.59186891

E(3) = -.874264021 C(3) = 2.59186891

E(4) = -2.7071325 C(4) = -.639029164

E(5) = -2.7071325 C(5) = .639029164

E(6) = 0 C(6) = 0

E(7) = -.568860899 C(7) = 0

F1(0) = -.568860899 F2(0) = 0

F = 1

H = 0

T = 0

〔例3〕绘制包含有延迟环节的负反馈控制系统的根轨迹图。其中

$$G(s)H(s) = \frac{k_1(s+3)}{s(s+1)}e^{-0.5s}$$

该题有二个开环极点和一个开环零点，延迟环节时间常数为0.5。计算机运行及绘图结果如下

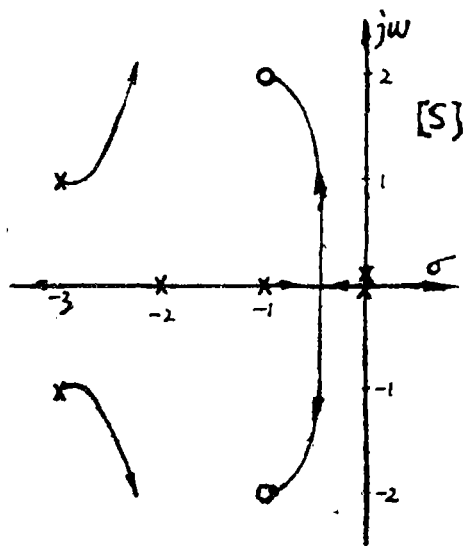


图15

IRUN

N, M, L, M2 = ?2, 1, .05, 3

P(0, 0), P(0, 1) = ?0, 0

P(1, 0), P(1, 1) = ?-1, 0

Z(0, 0), Z(0, 1) = ?-3, 0

YC, ZFK-?.5, 0

FANG CHENG GEN

E(1) = -.487254679 C(1) = 0

E(2) = -2.75637266 C(2) = -2.17170413

E(3) = -2.75637266 C(3) = 2.17170413

F1(0) = -.487254679 F2(0) = 0

F=1 H=0 T=0

从该题的计算结果来看, 系统为条件稳定系统, 这主要是延迟环节引起的, 若系统中不包含延迟环节, 那么系统不会出现不稳定现象。

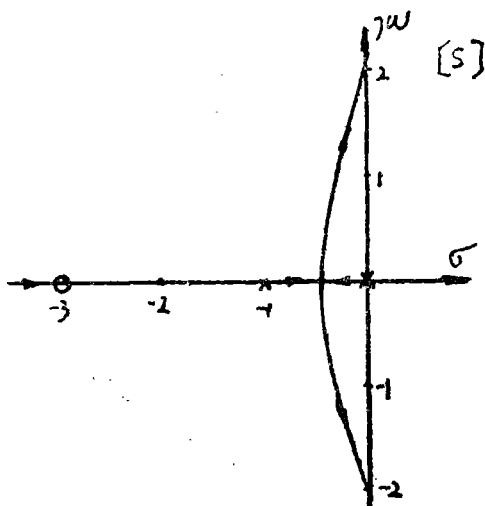


图16

## 五. 结 束 语

整个程序经过大量例题的考验证明: 求解计算根轨迹上的点和绘制根轨迹图都是十分理想的, 具有计算速度快、输入数据少, 绘制图形清晰、灵活、方便等特点。它不但可以绘制一般根轨迹图形, 而且可以绘制参量根轨迹和非最小相位系统的根轨迹图、正反馈系统根轨迹和包含有延迟环节系统的根轨迹图, 给分析研究控制系统的性能提供了方便。

## 参 考 文 献

- (1) 李育才译: [现代控制系统理论及应用] (美)
- (2) 上海计算技术研究所: [电子计算机算法手册]
- (3) 夏德铃主编: [反控制理论]
- (4) 郑州工学院电机系: [APPLE-II微型计算机系统]