

# 挑坎上的水流运动分析和挑距的简化计算

辛玉传

（水利系）

## 提 要

本文对挑坎反弧上的水流采用等半径流线假定，导出反弧底部的离心力影响系数和水舌实际挑角与鼻坎挑角的关系式，并进行了试验验证，制出了反弧底部水深求解曲线；对挑距的计算作了进一步简化，制出挑距系数计算曲线，最后对鼻坎挑角和反弧半径的选择进行了讨论。

## 一、分析及试验

### （一）、引言

挑坎反弧底部的收缩水深 $h$ 和挑流水舌的实际出射角 $\theta_s$ 是进行挑坎设计的重要参数，由于对挑坎上的水流运动认识还不够深入，对这两个参数的计算方法仍有必要进行进一步的探讨。(4)对折线形挑坎运用势流理论导出了 $\theta_s$ 与鼻坎挑角 $\theta$ 的关系式；关于反弧式挑坎，(2)根据日本渡部仪三郎的水工模型实验资料整理得到下式：

$$\theta_s = (1 - 0.18 \times 3.9^{h/R}) \theta \quad (1)$$

反弧底部水深因受离心力的影响，也不能用通常的方法进行计算。(1)对同心圆流动情形导出 $z + \frac{p}{\gamma}$ 表达式如下：

$$z + \frac{p}{\gamma} = h + c \frac{v^2}{2g} \quad (2)$$

其中 $c$ 为离心力影响系数，

$$c = 2 \left( \frac{R}{h} \ln \frac{1}{1 - h/R} - 1 \right) \quad (3)$$

以上两式结合能量方程用来计算挑坎反弧底部的水深。

事实上，挑坎反弧上的水流并非同心圆流动，水面线通常要比同心圆弧缓，在 $R/h$ 较小时水面线更缓。这种现象可解释如下：1.由于离心力的影响，反弧底部水深有所增加；2.反弧两端必有拐点（准确位置未知），该点离心力为零，而且反弧末端的水流已进入大气，压力显著减小，这两个因素抵消了位置水头的减小后，水深仍有所减小。由于以上的原因，水面线变缓，水舌上缘出射角也随之变小。可见同心圆理论不适用于挑坎上的水流。

### （二）试验结果及其分析

为进一步探讨离心力对反弧上水流的作用和水舌实际出射角 $\theta_s$ 与 $R/h$ 的关系,特进行了三组试验。在40厘米宽的玻璃水槽中,置一溢流坎模型。第一组试验后接鼻坎挑角为 $35^\circ$ ,反弧半径18厘米;第二组试验后接鼻坎挑角 $29^\circ$ ,反弧半径18厘米;第三组试验后接鼻坎挑角为 $25.8^\circ$ ,反弧半径24厘米(计算采用 $\bar{R}=21$ 厘米);第一组的泄流宽度为25.15厘米,后两组的泄流宽度为34.2厘米。由于泄流宽度小于水槽宽度,故可保证水舌下面的空腔与大气相通。将测针放在水平轨道上,测绘出水舌的水面线,并进而量得水舌上缘的出射角。经对比,我们认为这种测法比照像法精确。

从试验结果可以看到:

1. 不掺气时,水面线的确比同心圆弧缓,二者的比较见图1。图中粗实线为实测水面线,虚线为同心圆弧线。

2. 水面线的拐点发生在过鼻坎顶的垂线之前,可以近似认为在过坎顶的反弧半径上。

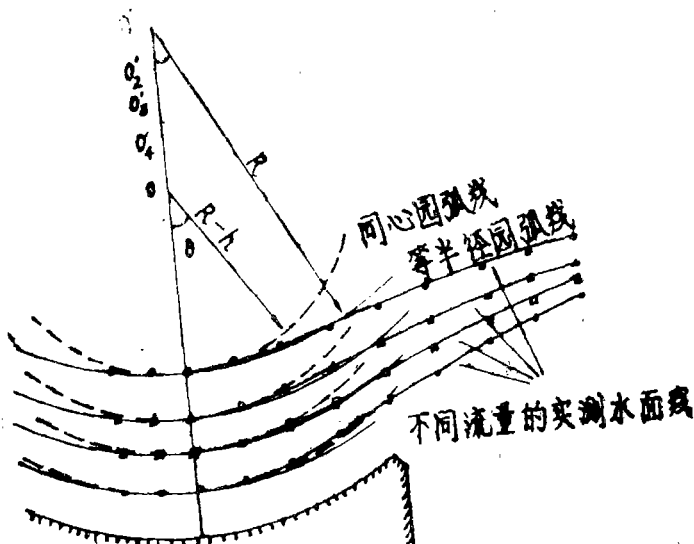


图 1

3. 不掺气时,水舌上缘出射角小于鼻坎挑角,这是前两项的必然结果。

### (三) 离心力影响系数及验证

基于以上的实验观测,本文采用以下的假定:

1. 反弧上水流的流线是等半径的,而曲率中心在过反弧圆心的垂线上(如图1)。(实际上, $R/h$ 较大时,曲率中心应稍向左偏移)。水面线的曲率中心位于 $O'$ 点,相对于反弧圆心升高一个水深 $h$ 。

2. 假定过反弧最低点的水流断面是一个平面,流速为均匀分布。

采用第一个假定后,正好在反弧底部水深最大,随 $R/h$ 的增大,反弧上流线趋近于同心圆,与实测水流基本吻合;而 $R/h$ 较小时,等半径假定的水面线较同心圆弧缓的多,与实测水流也非常接近,如图1所示。

在反弧底部的水流中取微元水体(图2), 其平衡方程为:

$$-(p + dp) ds + p ds - \rho g ds dz - \rho ds dz \frac{V^2}{R} = 0$$

式中最后一项为离心力。简化得:

$$-d\left(z + \frac{p}{\rho}\right) = \frac{V^2}{gR} dz \quad (4)$$

积分上式, 注意到 $z = h$ 时,  $\frac{p}{\rho} = 0$  可得:

$$z + \frac{p}{\rho} = h + (h - z) \frac{V^2}{gR} \quad (5)$$

上式为反弧底部过流断面上任一点的静水头表达式, 为便于应用总流的能量方程, 还需求出 $z + \frac{p}{\rho}$ :

$$\begin{aligned} z + \frac{p}{\rho} &= \frac{1}{Q} \int_0^Q \left(z + \frac{p}{\rho}\right) dQ \\ &= \frac{1}{Vh} \int_0^h \left[h + (h - z) \frac{V^2}{gR}\right] V dz \end{aligned}$$

于是

$$z + \frac{p}{\rho} = h + \frac{h}{R} \frac{V^2}{2g} \quad (6)$$

与(2)式比较, 此处的离心力影响系数为:

$$c = \frac{h}{R} \quad (7)$$

利用(6)式可列出能量方程:

$$E_0 = h + \left(\frac{h}{R} + \frac{1}{\phi^2}\right) \frac{V^2}{2g} \quad (8)$$

其中 $E_0$ 是以反弧最低点为基线的坝前总水头。

由(8)式求解的反弧底部水深如表一所示, 与实测值非常吻合, 为避免巧合, 特在溢流坝后接平底护坦进行试验, 结果表明 $\phi$ 值可用下式计算:

$$\phi = 1 - \frac{0.00725}{(g/\sqrt{gz_c^{1.5}})^{0.746}} \quad (9)$$

文献(1)使用的计算式为:

$$\phi = 1 - 0.0155 \frac{P}{H} \quad (10)$$

计算表明, 在本试验条件下, 两式的结果是一致的。

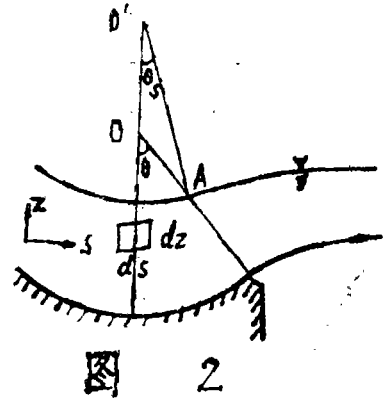


表 1

R (cm)	$\theta$	$E_0$ (cm)	q (cm <sup>2</sup> /s)	h <sub>测</sub> (cm)	h <sub>计</sub> (cm)	相对 误差	R/h <sub>测</sub>	$\theta_s$ 测	$\theta_s$ 测/ $\theta$	L <sub>测</sub> (cm)	L <sub>计</sub> (cm)	$\eta$
		32.75	690.0	3.09	3.21	+3.9%	5.83	26.6	0.760	66.5	67.1	0.214
		34.62	908.5	4.31	4.25	-1.4%	4.18	23.6	0.674	68.5	68.7	0.274
		36.19	1097.0	5.38	5.16	-4.1%	3.35	20.8	0.594	70.0	69.0	0.323
18	35°	37.35	1238.0	61.7	5.85	-5.2%	2.92	20.3	0.580	70.5	70.4	0.359
		39.16	1474.0	7.34	7.06	-3.8%	2.45	20.0	0.571	72.0	72.9	0.418
		40.59	1678.0	8.54	8.15	-4.6%	2.108	17.4	0.497	73.0	72.1	0.467
		31.07	516.4	2.36	2.41	+2.1%	7.63	28.4	0.811	63.0	64.6	0.164
		29.73	386.0	1.76	1.81	+2.8%	10.23	28.3	0.809	61.0	61.6	0.126
		28.58	291.7	1.41	1.39	-1.41%	12.80	23.8	0.821	57.5	57.5	0.097
		30.74	465.1	2.22	2.17	-2.2%	8.11	22.4	0.772	60.5	61.1	0.149
		32.21	636.5	2.99	2.97	-0.7%	6.02	21.2	0.731	64.5	63.1	0.199
18	29°	32.62	679.5	3.17	3.16	-0.3%	5.68	20.3	0.700	65.0	63.1	0.211
		34.09	847.1	4.01	3.96	-1.2%	4.49	19.9	0.686	68.0	65.2	0.257
		35.38	1000.6	4.76	4.70	-1.3%	3.78	18.7	0.645	69.0	66.2	0.298
		36.54	1149.1	5.39	5.42	+0.6%	3.34	20.0	0.690	70.0	69.2	0.337
		37.49	1266.5	6.02	6.00	-0.3%	2.99	19.0	0.655	71.5	69.6	0.367
		29.42	367.0	1.68	1.72	+2.4%	14.29	21.3	0.826	57.5	57.7	0.103
		31.10	530.0	2.38	2.45	+2.9%	10.08	21.3	0.826	60.0	60.9	0.145
		32.18	648.0	2.96	2.99	+1.0%	8.11	19.8	0.767	62.5	61.7	0.174
21 (R)	25.8°	33.48	787.0	3.60	3.62	+0.6%	6.67	19.7	0.764	63.0	63.8	0.207
		34.53	908.0	4.18	4.19	+0.2%	5.74	19.4	0.752	64.5	65.2	0.235
		36.19	1109.0	5.11	5.13	+0.4%	4.70	17.4	0.674	66.0	65.8	0.280
		36.84	1192.0	5.49	5.52	+0.5%	4.37	17.6	0.682	67.0	67.1	0.299
		27.19	1245.0	5.69	5.79	+1.8%	4.22	16.8	0.651	67.5	66.6	0.310

用(8)式计算(1)中的资料,与实测值也是吻合的。(1)在计算中并未采用(3)式,而是:

$$c = \frac{1}{R/h - 0.5} \quad (11)$$

#### (四) 反弧底部水深的求解

用(8)式求解反弧底部水深需要试算,为简化计算,将(8)式写为:

$$\xi_0 = \xi_c + \left( \frac{\xi_c}{\xi_R} + \frac{1}{\phi^2} \right) \frac{1}{2\xi_c^2} \quad (12)$$

(9)式也可写为:

$$\phi = 1 - 0.00725 \xi_0^{1.12} \quad (13)$$

式中  $\xi_0 = E_0/h_k$ ,  $\xi_c = h/h_k$ ,  $\xi_R = R/h_k$ .

(13)代入(12)得:

$$\xi_0 = \xi_c + \frac{1}{2\xi_c\xi_R} + \frac{1}{2\xi_0^2(1 - 0.00725\xi_0^{1.12})^2} \quad (14)$$

以  $\xi_R$  为参数, 制出反弧底部水深求解图, 如图3所示。该图可用来求解自由溢流情况下的反弧底部水深。

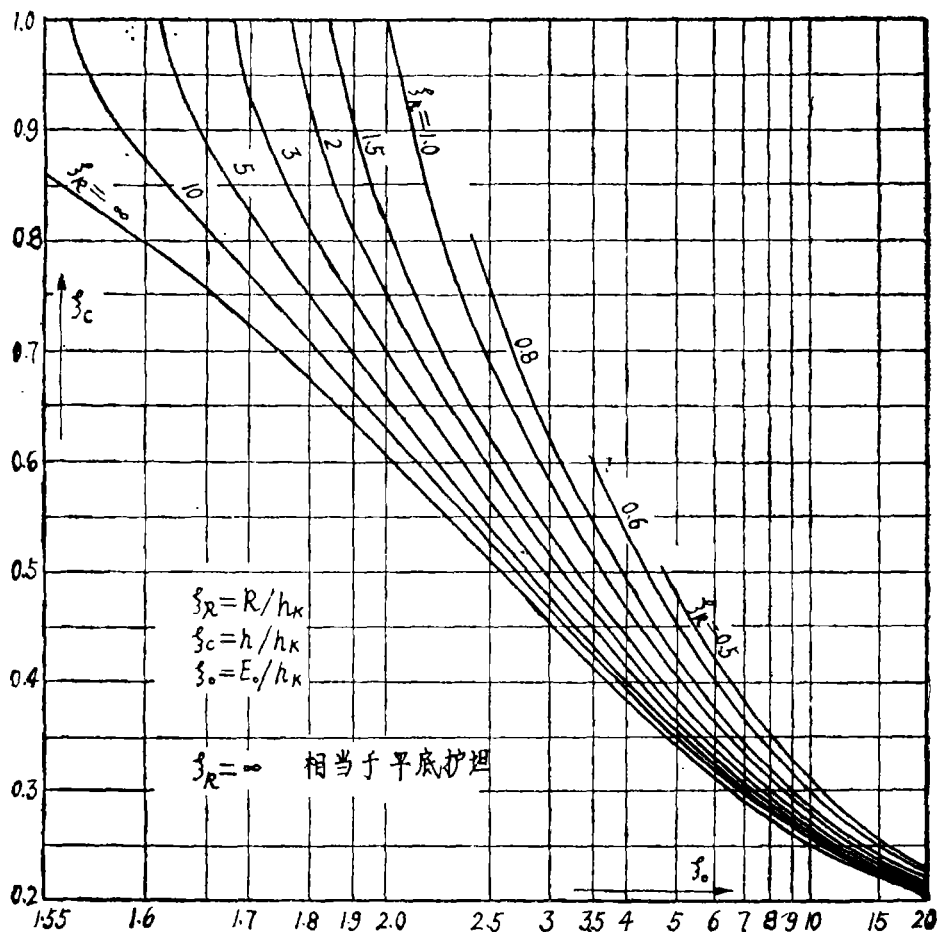


图 3 反弧底部收缩水深求解图

(8)式能否用于计算消力库底的收缩水深, 还有待于试验证。

(五)、计算反弧底部水深的经验式

由(8)(9)两式可知,

$$\frac{h}{R} = f(q, E_0, g, R)$$

稍加分析可得:

$$\frac{h}{R} = f(\eta) \quad (15)$$

式中

$$\eta = \frac{q}{R\sqrt{gE_0}} = \frac{h_k^{1.5}}{R\sqrt{E_0}} \quad (16)$$

以 $\eta$ 为自变量点绘实测结果如图4所示,从图可见,实测点子规律性极好,这使我们想到可用一近似式来代替(8)式,以进一步简化反弧底部水深的计算。(8)式和(13)式与实测点子结合起来,经计算可得以下的经验式:

$$\frac{h}{R} = 0.016 + 1.15\eta^{1.25} \quad (17)$$

上式代替(8)式,其精确度是令人满意的,但同样只适用于自由溢流的情况。

#### (六)、水舌实际出射角 $\theta_s$ 的计算

根据实验观测的结果,认为水面线的拐点位于过鼻坎顶的反弧半径上,并近似认为该点的倾角就是水舌上缘出射角。如2图所示,在三角形 $OA_0'$ 中运用正弦定理则有:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\sin \theta_s}{\cos \theta_s - \frac{h}{R}} \quad (18)$$

解出 $\sin \theta_s$ 并取近似得:

$$\frac{\sin \theta_s}{\sin \theta} = 1 - \frac{h}{R} \quad (19)$$

或近似为

$$\frac{\theta_s}{\theta} = 0.98 \left( 1 - \frac{h}{R} \right) \quad (20)$$

上式与实测值比较(见图5),在 $R/h$ 较大时仍有些偏大,为使其更近于实际,修正为:

$$\frac{\sin \theta_s}{\sin \theta} = 0.9 \left( 1 - 0.92 \frac{h}{R} \right) \quad (21)$$

或

$$\frac{\theta_s}{\theta} = 0.89 \left( 1 - 0.92 \frac{h}{R} \right) \quad (22)$$

从图5可见用上式计算 $\theta_s$ 较(1)式更接近于实测结果。

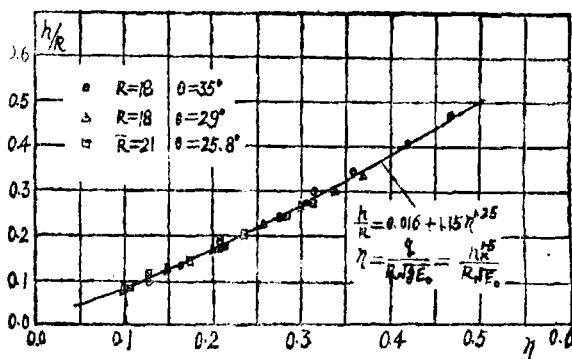


图 4

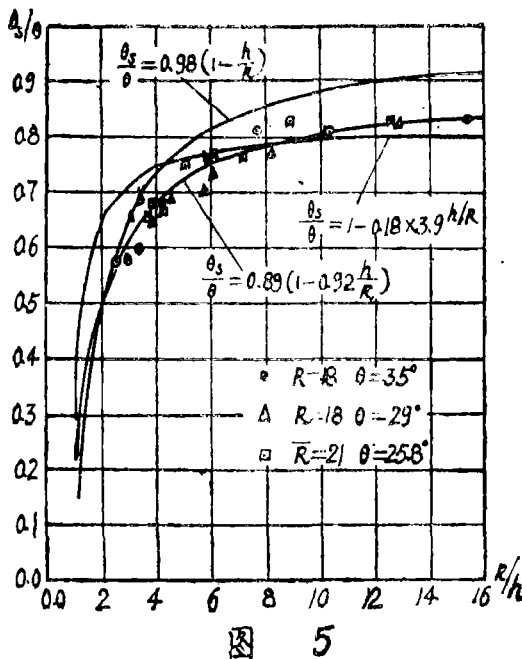


图 5

(17)式代入(22)式可得:

$$\frac{\theta_s}{\theta} = 0.88 - 0.95\eta^{1.25} \quad (23)$$

上式的显著优点是不需求反弧底部水深,即可求出水舌上缘的实际挑角。该式与实测结果的比较见图6。

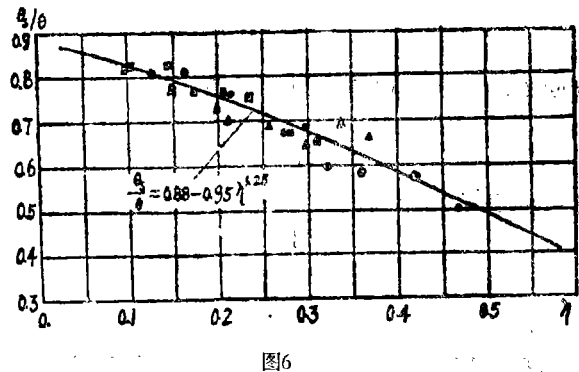


图6

## 二、射程的简化计算及水舌的最优挑角

### (一)、射程的简化计算

挑流射程的计算,应用最广的是真空抛射体公式:

$$L = \phi^2 Z \sin 2\theta_s \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{y}{\phi^2 Z \sin^2 \theta_s}} \right) \quad (24)$$

式中  $\phi$ ——挑流系数,按(9)或(13)式计算;

$Z$ ——以鼻坎顶为零点的坝前总水头;

$y$ ——鼻坎顶与冲坑最深点之高差。

上式之所以得到普遍应用,是因为它有一定的理论基础,不仅能很好的反映射程的变化规律,为鼻坎设计提供水力学依据,而且在工程实用上也可得到足够精确的结果。表1中的L计就是按照上式计算的水舌外缘之射程。

在目前的冲坑深度计算公式中,大多不包括水舌入射角这一因素,说明冲深与入射角关系不大,当坎高一定并选择了适当的冲深计算公式后,(24)式中的 $y$ 成为已知,加之一般情况下挑距越远越好,因此用(24)式来计算挑流射程或水舌最优出射角都很方便合理。

文献(2)和(3)对采用不同的方法绘制了参考曲线,不同程度的简化了计算。下面采用另一参数来简化射程的计算和水舌最优出射角的选择。若令

$$A = \frac{y}{\phi^2 Z} \quad (25)$$

则(24)式成为

$$L = ky \quad (26)$$

其中

$$k = \frac{\sin 2\theta_s}{A} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{A}{\sin^2 \theta_s}} \right) \quad (27)$$

利用上式制成的 $k$ 值计算曲线如图7, 可用来计算挑流射程, 甚为方便。

## (二)、水舌的最优出射角

(27)式对 $\theta_s$ 求导, 可得最优水舌出射角 $\theta_{s0}$ :

$$\sin \theta_{s0} = \sqrt{\frac{1}{A+2}} \quad (28)$$

代回(27)式可得最大射距系数 $k_0$ :

$$k_0 = \frac{2}{A} \sqrt{A+1} \quad (29)$$

相应的最大挑距为:

$$L_0 = \frac{2}{A} \sqrt{A+1} y \quad (30)$$

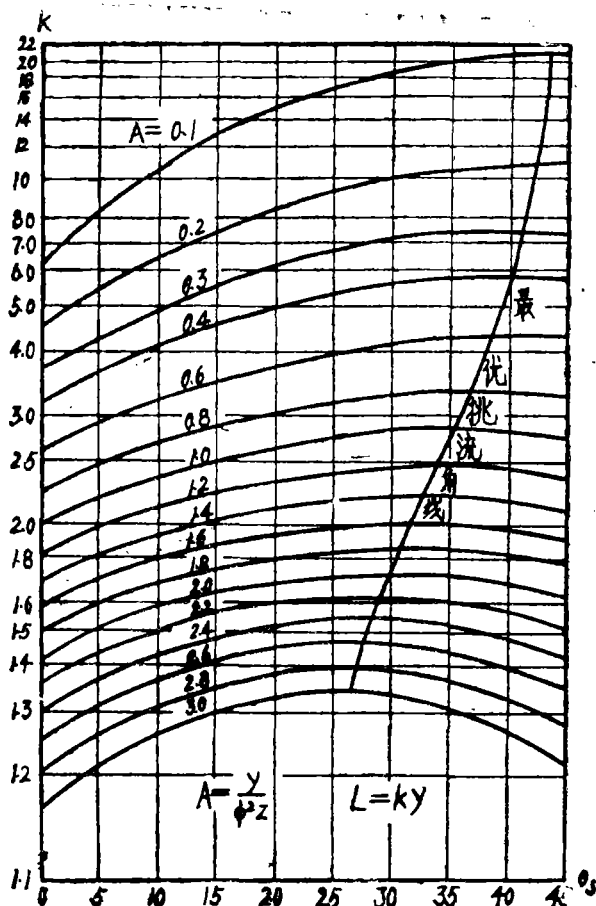


图 7

将(28)式的结果一并绘于图7, 即得理论上的最优水舌挑角线从(28)和图7都可看到,  $A$  越小(坎越低),  $\theta_{s0}$  越大, 极限值是 $45^\circ$ 。

从图7还可清晰的看到挑距 $L$ 随 $\theta_s$ 的变化规律。在 $\theta_{s0}$ 附近, 曲线平缓, 说明挑角在 $\theta_{s0}$ 附近有一定的活动余地, 稍许减小挑角, 并不显著影响挑距。例如 $A$ 从0.1到3.0,  $\theta_s$ 若依次比 $\theta_{s0}$ 小 $7^\circ$ — $10^\circ$ , 挑距的减小不超过3%。

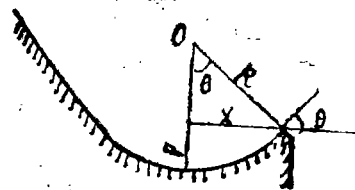


图 8



### 三、鼻坎挑角与反弧半径的选择

由前所述, 已知A值可从图7查得 $\theta_{s0}$ , 稍许减小后可作为水舌的设计出射角 $\theta_s$ , 而 $\theta_s$ 作为水舌的设计出射角 $\theta_s$ , 但 $\theta_s$ 并非鼻坎挑角, 还需按照(22)式并兼顾到工程量和起挑流量来决定鼻坎挑角 $\theta$ 和反弧半径R。显然反弧深度P对起挑流量影响较大, 而反弧段的水平长度X对工程量则起着决定性作用。如图8所示, 它们与反弧半径和挑角存在如下关系:

$$\frac{P}{h} = \frac{R}{h} (1 - \cos \theta)$$

$$\frac{X}{h} = \frac{R}{h} \sin \theta$$

将(22)代入上两式可得:

$$\frac{P}{h} = \frac{R}{h} \left( 1 - \cos \frac{\theta_s}{0.89(1 - 0.92h/R)} \right) \quad (31)$$

$$\frac{X}{h} = \frac{R}{h} \sin \frac{\theta_s}{0.89(1 - 0.92h/R)} \quad (32)$$

$\theta_s$ 已经选定, 以 $\theta_s$ 为参数, 上两式可作出曲线如图9所示。从图中可以看到:

1.  $P/h$ 随 $R/h$ 的变化存在极小值, 当 $\theta_s = 35^\circ \sim 15^\circ$ 时, 与 $(P/h)_{\min}$ 对应的 $R/h$ 为2.8~26。

2. 当 $R/h > 3$ 时,  $P/h$ 和 $X/h$ 都近似呈直线增大,  $\theta_s$ 越大, 斜率越大, 说明高坎宜用大半径, 低坎宜用小半径。

根据以上分析, 若从减少反弧深度, 减少工程量出发, 在保证 $\theta_s$ 不变的条件下, 宜采用小半径大挑角的鼻坎。考虑到挑射水舌需要一定的导流长度, 减少工程量是有限度的, 一般以 $X/h > 2$ 为宜。建议用下式选择 $R/h$ :

$$\frac{R}{h} = \frac{1.65}{\sin \theta_s} \quad (33)$$

用上式计算的结果是,  $\theta_s = 35^\circ \sim 15^\circ$ 时,  $R/h = 2.9 \sim 6.4$ , 鼻坎挑角按(22)式推算得 $\theta = 57.6^\circ \sim 19.7^\circ$ , 可见鼻坎挑角有时是可以大于 $45^\circ$ 的。

我们来看一个例子: 某鼻坎要保证水舌出射角 $\theta_s = 30^\circ$ , 在地基挖深不变, 坎顶高程不变的情况下, 若按(33)式计算则

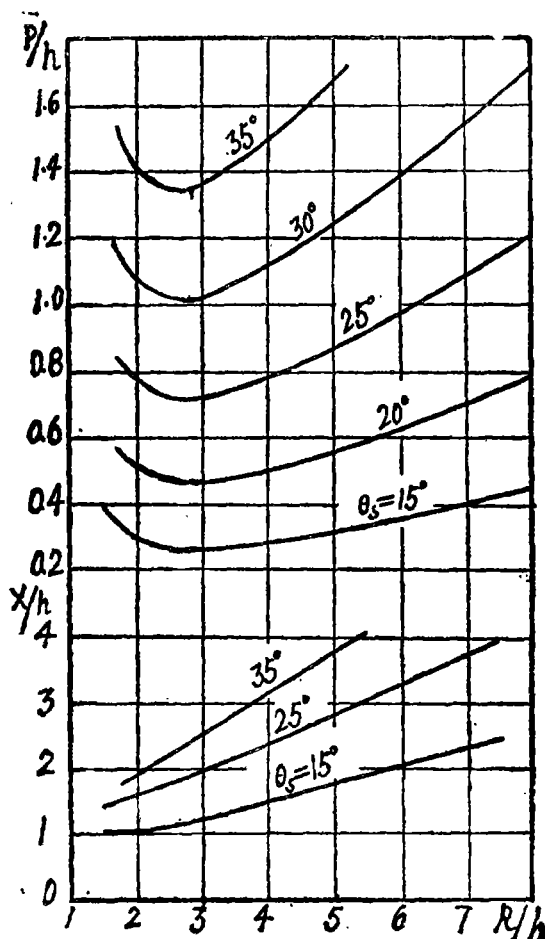


图 9

$R/h = 3.3$ ,  $\theta = 46.7^\circ$  ( (22) 式 ),  $X/h = 2.4$ , 若取  $R/h = 6$ , 则  $\theta = 39.8^\circ$ ,  $X/h = 3.85$  ( 注意这里忽略了水深的微小变化 ), 如图10, 显见前者鼻坎短, 工程量小, 反弧深度小。因  $\theta_s$  相同, 故二者承受的动力也基本相等, 前者鼻坎短, 对地基的压强有些增大。这就是说, 只要地基条件允许, 小半径大挑角是有其优越性的。

## 结 论

1. 导出了反弧底部的离心力影响系数  $c = h/R$ , 可用以求解反弧底部水深, 并制出水深求解图。

2. 导出了水舌实际出射角与鼻坎挑角的关系式, 并根据试验作了修正。 (22)、(23) 式都可应用。

3. 以  $A$  为参数, 制出了射程系数  $k$  的计算曲线和最优挑角线, 简化了挑距的计算。

4. 挑距在  $\theta_s$  附近变化较缓, 故设计的  $\theta_s$  可比最优挑角  $\theta_{s0}$  减少  $7^\circ - 10^\circ$ 。照此原则, 可按下式选择水舌上缘实际出射角:

$$\sin \theta_s = \frac{1}{1.6 + 0.6A}$$

5. 鼻坎挑角的选择决定于  $\theta_s$  和  $R/h$  的选择,  $R/h$  的初选可用 (33) 式计算。在地基条件允许的情况下, 宜采用小半径大挑角。

本文是在刘子榕老师的指导下完成的。

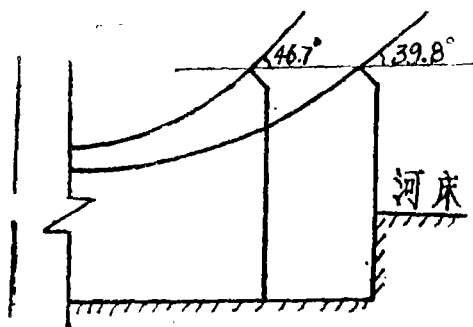


图 10

## 参 考 文 献

- (1) 梁曾相: 恒定急变流的能量方程及其应用, [水利学报], 1982年第2期。
- (2) 谭新贤: 溢流坎挑流射程的简捷计算, [泄水建筑物消能防冲论文集], 1980。
- (3) 苏鲁平: 挑流设计参考图的绘制与应用, [水利水电技术], 1982年第10期。
- (4) 潘水波等: 通气挑坎的挟气能力, [水利学报], 1980年第5期。
- (5) 张志恒: 消力库底收缩水深的计算, [水利学报], 1983年第5期。