关于JACKSON—MATSUOKA算子逼近函数类$MH_*^{(\alpha)}$的渐近展开式

黄厚本*

提要

本文改正了Devore[1]在一个定理证明过程中的一个错误，并建立比该定理更为具体的估计式和一系列渐近展开式。

一、前言

为下文叙述方便，我们采用如下记号：

1° 设f(x)是以2π为周期的连续周期函数，记为$f(x)\in C_{2\pi}$，若恒成立：

$$|f(x+t)+f(x-t)-2f(x)|\leq 2Mg_\alpha(t),$$

则称f(x)属于$MH_*^{(\alpha)}$函数类，并记为$f(x)\in MH_*^{(\alpha)}$。

其中M为给定的正常数，$0<\alpha\leq 2$，

当$0<\alpha\leqslant 1$时，$g_\alpha(t)=|t|^\alpha$

当$1<\alpha\leqslant 2$时，

$$g_\alpha(t)=\begin{cases}|t|^\alpha, & |t|\leqslant\frac{\pi}{2},\\ 2\left(\frac{\pi}{2}\right)^\alpha-(\pi-|t|)^\alpha- & \frac{\pi}{2}<|t|\leqslant\pi.\end{cases}$$

$$2^\circ\qquad E(A,L)=\sup_{f\in A}\left\{\sup_x|f(x)-L(f;x)|\right\}$$

称为算子L对函数类A的最佳逼近。

3° Jackson——Matsuoka算子：

$$J_{n,p,q}(f;x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)C_{n,p,q}\frac{\sin^{2p}\frac{n+1}{2}t}{\sin^{2q}\frac{t}{2}}dt,$$

其中

$$C_{n,p,q}=\pi\Big/\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^{2p}\frac{n+1}{2}t}{\sin^{2q}\frac{t}{2}}dt,\qquad p\geqslant q\geqslant 1.$$

$$4^\circ\qquad I(p,q)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}t^p\sin^q t\,dt,$$

$$I_s(p,q)=\int_0^{\frac{S+1}{2}\pi}t^p\sin^q t\,dt.$$

*作者系郑州工学院数学师资班83届毕业生，本文1983年10月5日收到。

5° $C_p=\frac{(2p-1)!!}{(2p)!!}\cdot\frac{\pi}{2}$。

R.A.DeVore[1]得出这样的结论：

$$E(Lip^*(\alpha,1),J_n(p,q))=2^\alpha\frac{I(\alpha-2q,2p)}{I(-2q,2p)}(n+1)^{-\alpha}+O(\frac{1}{n^2}),$$

其中$p\geqslant q\geqslant 2$，$0<\alpha\leqslant 2$，$Lip^*(\alpha,1)=H_*^{(\alpha)}$。 (1)

但在其证明过程中，用到了"$|(2t^{-1})^{2q}-\sin^{-2q}\frac{t}{2}|$在$[0,\pi]$上是有界的"这样一个结论。本文证明这个前提是错误的，并加以改正，同时建立了比(1)更为具体的估计式和一系列渐近展开式。

二 引 理

引理1 在$[0,\pi]$上成立着下列不等式：

$$\frac{1}{3}\leqslant\frac{1}{\sin^2 t}-\frac{1}{t^2}\leqslant 1。\qquad (2)$$

且当$q\geqslant 2$时，$|(2t^{-1})^{2q}-\mathrm{Sin}^{-2q}(\frac{t}{2})|$在$[0,\pi]$上无界。

证 令$f(t)=\frac{1}{\mathrm{Sin}^2 t}-\frac{1}{t^2}$， $t\in(0,\frac{\pi}{2})$。

显然$f(t)$在$(0,\frac{\pi}{2})$上连续。又

$$\lim_{t\to 0^+}f(t)=\lim_{t\to 0^+}\frac{t^2}{\mathrm{Sin}^2 t}\times\frac{t^2-\sin^2 t}{t^4}=\frac{1}{3},$$

因而， 若定义$f(0)=\frac{1}{3}$，则

$f(t)$在$[0,\frac{\pi}{2}]$上连续。 又

$$f'(t)=\frac{2}{t^3\mathrm{Sin}^3 t}[\mathrm{Sin}^3 t-t^3\mathrm{Cos}t],\qquad t\in(0,\frac{\pi}{2}),$$

$$\mathrm{Sin}t>t-\frac{t^3}{b},\qquad 0<t\leqslant\frac{\pi}{2},$$

$$\cos t<1-\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{24},\qquad 0<t\leqslant\frac{\pi}{2},$$

所以， $f'(t)>0$， $0<t\leqslant\frac{\pi}{2}$。

故由 $f(0)=\frac{1}{3}$， $f(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi^2-4}{\pi^2}<1$，

得(2)成立。

由(2)即得：

$$\frac{1}{\mathrm{Sin}^{2q}t}\geqslant\frac{1}{t^{2q}}+\frac{q}{3t^{2q-2}},\qquad q\geqslant 1。$$

但当$q\geqslant 2$时，$\frac{q}{3t^{2q-2}}$在$[0,\frac{\pi}{2}]$上无界。　　证毕。

引理1的结论断言$3|(2t^{-1})^{2q}-\mathrm{Sin}^{2q}\frac{t}{2}|$

在$[0,\pi]$上是无界的，$(q\geqslant 2)$。容易看到：

$$|(\frac{1}{\mathrm{Sin}\frac{t}{2}})^{2q}-(\frac{2}{t})^{2q}|=O(t^{2-2q}),\ t\in[0,\ \pi].$$

借助上式，Devore的定理证明可以通过，从而所得结论仍然成立。

引理2　对于Jackson——Matsuoka算子及$MH_*^{(\alpha)}$，

1°　$$E(MH_*^{(\alpha)},J_{n,p,q})=\frac{2^{2+\alpha}M}{\pi}C_{n,p,q}\int_0^{\frac{\pi}{2}}t^\alpha\frac{\mathrm{Sin}^{2p}(n+1)t}{\mathrm{Sin}^{2q}t}dt,$$

$0<\alpha\leqslant 1$。

2°　$$E(MH_*^{(\alpha)},\ J_{n,p,q})=\frac{2^{2+\alpha}M}{\pi}C_{n,p,q}\int_0^{\frac{\pi}{4}}t^\alpha\frac{\mathrm{Sin}^{2p}(n+1)t}{\mathrm{Sin}^{2q}t}dt+\frac{4MC_{n,p,q}}{\pi}$$

$$\times\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}[2(\frac{\pi}{2})^\alpha-(\pi-2t)^\alpha]\frac{\mathrm{Sin}^{2p}(n+1)t}{\mathrm{Sin}^{2q}t}dt,$$

$1<\alpha\leqslant 2$。

证　根据Devore在[1]中所得结论：

若$g(t)$是函数类A的最佳函数*，则

$$E(A,\ L)=L(g;\ 0)。\qquad (3)$$

再由Devore在[1]中指出的$g_\alpha(t)$是$H_*^{(\alpha)}$的最佳函数，于是容易看到：

$Mg_\alpha(t)$是函数类$MH^{(\alpha)}_*$的最佳函数。

经过简单计算可得引理2成立。　　证毕。

引理3　存在仅与q有关的正常数m_q，使

$$(n+1)^{2q-1-\alpha}I_n(\alpha-2q,2P)+\frac{q}{3}(n+1)^{2q-3-\alpha}I_n(2+\alpha-2q,\ 2p)\leqslant$$

$$\leqslant\int_0^{\frac{\pi}{2}}t^\alpha\frac{\mathrm{Sin}^{2p}(n+1)t}{\mathrm{Sin}^{2q}t}dt\leqslant(n+1)^{2q-1-\alpha}I_n(\alpha-2q,2p)+m_q(n+1)^{2q-3-\alpha}I_n$$

$$\times(2+\alpha-2q,2p)。\qquad (4)$$

证　由引理1知：$\frac{1}{\mathrm{Sin}^2t}\leqslant\frac{1}{t^2}+1$，所以，

$$\frac{1}{\mathrm{Sin}^{2q}t}\leqslant\frac{1}{t^{2q}}+\frac{1}{t^{2q-2}}[q+\frac{q(q-1)}{2}t^2+\cdots+qt^{2q-4}+t^{2q-2}]$$

由于　$t\in[0,\ \frac{\pi}{2}]$，知存在$m_q>0$，使

* 函数类A的最佳函数是指：$g\in A$，且$g(t)$是非负偶数，$g(0)=0$，且对任意$f\in A$，任意$x\in D_f$，有$|f(x+t)+f(x-t)-2f(x)|\leqslant 2g(t)$。

$$q+\frac{q(q-1)}{2}t^{2}+\cdots+qt^{2q-4}+t^{2q-2}\leq m_q,\ t\in[0,\frac{\pi}{2}]。$$

结合引理1得到：

$$\frac{1}{t^{2q}}+\frac{q}{3t^{2q-2}}\leqslant\frac{1}{Sin^{2q}t}\leq\frac{1}{t^{2q}}+\frac{m_q}{t^{2q-2}},\ t\in[0,\frac{\pi}{2}]。$$

两端同乘以非负函数$t^{q}Sin^{2p}(n+1)t$，并从0到$\frac{\pi}{2}$积分，再注意到

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{Sin^{2p}(n+1)t}{t^{S}}dt=(n+1)^{S-1}Jn(-S,2p),$$

即得(4)成立。　　证毕。

引理4　对一切整数K，恒成立下式：

$$\int_{\frac{k\pi}{2}}^{\frac{k+1}{2}\pi}Sin^{2p}tdt=\frac{(2p-1)!!}{(2p)!!}\times\frac{\pi}{2}=Cp。\qquad(5)$$

证　令　$t=u+\frac{k\pi}{2}$，则

$$\int_{\frac{k\pi}{2}}^{\frac{k+1}{2}\pi}Sin^{2p}tdt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}Sin^{2p}(u+\frac{k\pi}{2})du$$

但

$$Sin^2(u+\frac{k\pi}{2})=\begin{cases}Sin^2u, & 当k为偶数,\\ Cos^2u, & 当k为奇数。\end{cases}$$

且

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}Sin^{2p}tdt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}Cos^{2p}tdt=Cp,$$

所以

$$\int_{\frac{k\pi}{2}}^{\frac{k+1}{2}\pi}Sin^{2p}tdt=Cp。$$

证毕。

引理5　对$0<\beta\leq 2P$，$S=0,1,2,\cdots$，有

1°　$\frac{Cp}{2}\ln(s+1)\leqslant Is(-\beta,2p)\leq 3^{p}+\ln(s+1)$，　$\beta=1$，

2°　$\frac{Cp}{2^{\beta}}\frac{(1+s)^{1-\beta}-1}{1-\beta}\leq Is(-\beta,2p)\leq 3^{p}+2\frac{(1+s)^{1-\beta}-1}{1-\beta}$，　$\beta\neq 1$。

证　因为　$Is(-\beta,2p)\geq\sum\limits_{k=0}^{s}\int_{\frac{k}{2}\pi}^{\frac{k+1}{2}\pi}(\frac{1}{k+1}\times\frac{\pi}{2})^{\beta}Sin^{2p}tdt$

$$=(\frac{2}{\pi})^{\beta}Cp\sum_{k=1}^{s+1}\frac{1}{k^{\beta}}\geqslant\begin{cases}\frac{Cp}{2}\ln(s+1), & \beta=1,\\ \frac{Cp}{2}\times\frac{(1+s)^{1-\beta}-1}{1-\beta}, & \beta\neq 1,\end{cases}$$

所以1°、2°的第一不等式成立，又

$$Is(-\beta,\ 2p)\le\int_0^{\frac{\pi}{2}}t^{2p-q}dt+\sum_{k=1}^{s}\int_{\frac{k}{2}\pi}^{\frac{k+1}{2}\pi}\frac{1}{K^\beta}\left(\frac{2}{\pi}\right)^\beta \mathrm{Sin}^{2p}tdt$$

$$=\frac{1}{2p+1-\beta}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2p+1-\beta}+Cp\left(\frac{2}{\pi}\right)^\beta\sum_{k=1}^{s}\frac{1}{k^\beta}$$

$$\le\begin{cases}3^p+\ln(s+1), & \beta=1,\\ 3^p+2\dfrac{(s+1)^{1-\beta}-1}{1-\beta}, & \beta\ne1.\end{cases}$$

故1°、2°的第二不等式亦成立。　　证毕。

引理6　对于$\beta>1$，$S=0,1,2,\cdots$，有

$$\frac{Cp}{2^\beta}\cdot\frac{(s+2)^{1-\beta}}{\beta-1}\le\int_{\frac{s+1}{2}\pi}^{+\infty}\frac{\mathrm{Sin}^{2p}t}{t^\beta}dt\le\frac{\beta}{\beta-1}(1+S)^{1-\beta},\tag{6}$$

证　因为

$$\int_{\frac{s+1}{2}\pi}^{+\infty}\frac{\mathrm{Sin}^{2p}t}{t^\beta}dt\ge\sum_{k=s+1}^{+\infty}\left(\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{k+1}\right)^\beta\int_{\frac{k}{2}\pi}^{\frac{k+1}{2}\pi}\mathrm{Sin}^{2p}tdt$$

$$=\left(\frac{2}{\pi}\right)^\beta Cp\sum_{k=s+2}^{+\infty}\frac{1}{k^\beta}\ge\frac{Cp}{2^\beta}\cdot\frac{(s+2)^{1-\beta}}{\beta-1},$$

所以(b)的第一不等式成立。又

$$\int_{\frac{s+1}{2}\pi}^{+\infty}\frac{\mathrm{Sin}^{2p}t}{t^\beta}dt\le\sum_{k=s+1}^{+\infty}\left(\frac{2}{\pi}\right)^\beta\frac{1}{k^\beta}\int_{\frac{k}{2}\pi}^{\frac{k+1}{2}\pi}\mathrm{Sin}^{2p}tdt$$

$$=\left(\frac{2}{\pi}\right)^\beta Cp\sum_{k=s+1}^{+\infty}\frac{1}{k^\beta}\le\frac{\beta}{\beta-1}(1+s)^{1-\beta},$$

所以(6)的第二等式亦成立。证毕。

引理7　对于Jackson——Matsuoka算子中的

$C_{n,p,q}$，有

$$C_{n,p,q}=\frac{(n+1)^{1-2q}}{4I(-2q,\ 2p)}+0\left(\frac{1}{n^{1+2q}}\right).\tag{7}$$

证　由引理3知

$$(n+1)^{2q-1}In(-2q,\ 2p)+\frac{q}{3}(n+1)^{2q-3}In(2-2q,\ 2p),\le\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{Sin}^{2p}(n+1)t}{\mathrm{Sin}^{2q}t}dt$$

$$\le(n+1)^{2q-1}In(-2q,\ 2p)+mq(n+1)^{2q-3}In(2-2q,\ 2p),$$

再利用引理6及$C_{n,p,q}$的定义，知引理7成立。　　证毕。

三 关于Jackson—Matsuoka算子逼近函数类$MH_*^{(\alpha)}$的渐近展开式

定理1 当$q\geq 3$，$0<\alpha\leq 2$，或$q=2$，$0<\alpha<1$时

1°
$$\frac{2^{2+\alpha}MI(\alpha-2q,2p)}{(n+1)^{1+\alpha-2q}}C_{n,p,q}+m_{q,\alpha}M(n+1)^{2q-3-\alpha}C_{n,p,q}\leq$$
$$\leq E(MH_*^{(\alpha)},J_{n,p,q})\leq\frac{2^{2+\alpha}MI(\alpha-2q,2p)}{(n+1)^{1+\alpha-2q}}C_{n,p,q}+$$
$$+m'_{q,\alpha}M(n+1)^{2q-3-\alpha}C_{n,p,q},\qquad (8)$$

2°
$$E(MH_*^{(\alpha)},J_{n,p,q})=\frac{2^{\alpha}M}{(n+1)^{\alpha}}\times\frac{I(\alpha-2q,2p)}{I(-2q,2p)}+O\left(\frac{1}{n^{2+\alpha}}\right)。\qquad (9)$$

证 当$0<\alpha\leq 1$时，（对$q=2$，只考虑$0<\alpha<1$。）

由引理2知

$$E(MH_*^{(\alpha)},J_{n,p,q})=\frac{2^{2+\alpha}M}{\pi}C_{n,p,q}\int_0^{\frac{\pi}{2}}t^{\alpha}\frac{\sin^{2p}(n+1)t}{\sin^{2q}t}dt\ 。$$

利用引理3并通过简单计算可得到（8）。

再由引理7知（9）也成立。

当$1<\alpha\leq 2$时，此时$q\geq 3$，

同理可得（8）成立，其中只要注意下面的估计式：

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}t^{\alpha}\frac{\sin^{2p}(n+1)t}{\sin^{2q}t}dt\leq\int_0^{\frac{\pi}{2}}t^{\alpha}\frac{\sin^{2p}(n+1)t}{\sin^{2q}t}dt\quad ,$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left[2\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\alpha}-(\pi-2t)^{\alpha}\right]\frac{\sin^{2p}(n+1)t}{\sin^{2q}t}dt\leq 2\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\alpha}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{2p}(n+1)t}{\sin^{2q}t}dt\quad ,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}t^{\alpha}\frac{\sin^{2p}(n+1)t}{\sin^{2q}t}dt\geq\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{2p}(n+1)t}{t^{2q-\alpha}}dt+\frac{q}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^{2p}(n+1)t}{t^{2q-2-\alpha}}dt\quad ,$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left[2\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\alpha}-(\pi-2t)^{\alpha}\right]\frac{\sin^{2p}(n+1)t}{\sin^{2q}t}dt\geq 0\quad ,$$

所以对于$q\geq 3$，$1<\alpha\leq 2$，（8）亦成立。

由（7）及（8）便得（9）。 证毕。

定理2 对于$q=2$，$1<\alpha\leq 2$，有

1°
$$MC_{n,p,2}\left[\frac{2^{2+\alpha}I(\alpha-4,2p)}{(n+1)^{\alpha-3}}+m_p\right]\leq E(MH_*^{(\alpha)},J_{n,p,2})$$
$$\leq MC_{n,p,2}\left[\frac{2^{2+\alpha}I(\alpha-4,2p)}{(n+1)^{\alpha-3}}+m'_p\right],\qquad (10)$$

$$2^\circ\quad E(MH_*^{(\alpha)},\ Jn,\ p,\ 2)=\frac{2^\alpha M}{(n+1)^\alpha}\times\frac{I(\alpha-4,\ 2P)}{I(-4,\ 2P)}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)。\tag{11}$$

证　由引理7知，只须证(10)成立。

根据引理2知，当$1<\alpha\leq 2$时，

$$E(MH_*^{(\alpha)},\ Jn,\ p,\ 2)=\frac{2^{2+\alpha}M}{\pi}Cn,\ p,2\int_0^{\frac{\pi}{4}}t^\alpha\frac{\mathrm{Sin}^{2p}(n+1)t}{\mathrm{Sin}^4 t}dt$$

$$+\frac{4M}{\pi}Cn,\ p,\ _2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left[2\left(\frac{\pi}{2}\right)^\alpha-(\pi-2t)^\alpha\right]\frac{\mathrm{Sin}^{2p}(n+1)t}{\mathrm{Sin}^4 t}dt\quad.$$

注意到

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}t^\alpha\frac{\mathrm{Sin}^{2p}(n+1)t}{\mathrm{Sin}^4 t}dt\leqslant\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{Sin}^{2p}(n+1)t\left[\frac{1}{t^{4-\alpha}}+\frac{m_2}{t^{2-\alpha}}\right]dt$$

$$\leqslant(n+1)^{3-\alpha}\pi I(\alpha-4,\ 2p)+m_2(n+1)^{1-\alpha}\int_0^{\frac{n+1}{4}\pi}\frac{\mathrm{Sin}^{2p}t}{t^{2-\alpha}}dt\quad,$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left[2\left(\frac{\pi}{2}\right)^\alpha-(\pi-2t)^\alpha\right]\frac{\mathrm{Sin}^{2p}(n+1)t}{\mathrm{Sin}^4 t}dt\leqslant m'_2\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1+\alpha}\quad,$$

可得(10)的第二不等式。

再注意到

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}t^\alpha\frac{\mathrm{Sin}^{2p}(n+1)t}{\mathrm{Sin}^4 t}dt\geqslant\pi(n+1)^{3-\alpha}I(\alpha-4,\ 2P)-(n+1)^{3-\alpha}\int_{\frac{n+1}{4}\pi}^{+\infty}\frac{\mathrm{Sin}^{2p}t}{t^{4-\alpha}}dt$$

$$+\frac{2}{3}(n+1)^{1-\alpha}\int_0^{\frac{n+1}{4}\pi}\frac{\mathrm{Sin}^{2p}t}{t^{2-\alpha}}dt\quad,$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left[2\left(\frac{\pi}{2}\right)^\alpha-(\pi-2t)^\alpha\right]\frac{\mathrm{Sin}^{2p}(n+1)t}{\mathrm{Sin}^4 t}dt$$

$$\geqslant\left(\frac{\pi}{2}\right)^\alpha\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{Sin}^{2p}(n+1)t\left[\frac{1}{t^4}+\frac{2}{3t^2}\right]dt$$

即可得到(10)的第一不等式。

综上所述，定理2成立。　　证毕。

定理3　对于　$q=2$，$\alpha=1$，有

$$1^\circ\quad MCn,\ p,\ _2[8(n+1)^2I(-3,\ 2p)+\frac{Cp}{\pi^2}\ln(n+1)]\leq E(MH_*^{(1)},\ Jn,\ p,\ _2)$$

$$\leq MCn,\ p,\ _2[8(n+1)^2I(-3,\ 2p)=2^{2p}m_2\ln(n+1)],\tag{12}$$

2^0 $E(MH_*^{(1)}, Jn, p, _2) = \frac{2M}{(n+1)} \times \frac{I(-3, 2p)}{I(-4, 2p)} + 0\left(\frac{Inn}{n^3}\right)$。 (13)

证 由引理2得

$$E(MH_*^{(1)}, Jn, p, _2) = \frac{2^3 M}{\pi} Cn, p, _2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \frac{\operatorname{Sin}^{2p}(n+1)t}{\operatorname{Sin}^4 t} dt$$

再由引理3及引理5得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \frac{\operatorname{Sin}^{2p}(n+1)t}{\operatorname{Sin}^4 t} dt \leqslant \pi(n+1)^2 I(-3, 2p) + m_2 In(-1, 2p)$$

$$\leq \pi(n+1)^2 I(-3, 2p) + \frac{\pi}{8} m_2 \times 2^{2p} \ln(n+1),$$

即(12)的第二不等式成立。

同理可得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \frac{\operatorname{Sin}^{2p}(n+1)t}{\operatorname{Sin}^4 t} dt \geqslant (n+1)^2 In(-3, 2p) + \frac{2}{3} In(-1, 2p)$$

$$\geqslant \pi(n+1)^2 I(-3, 2p) + \frac{Cp}{8\pi} \ln(n+1),$$

所以(12)的第一不等式亦成立。

将(7)收入(12)即得(13)。 证毕。

定理 4 对于$q = \alpha = 2$, 有

1^0 $16MCn,p,_2[(n+1)I(-2,2p) + \frac{3Cp}{\pi^2}] \leq E(MH_*^{(2)}, Jn, p, 2)$

$\leqslant 16MCn, p, _2[(n+1)I(-2, 2p) + \frac{m_2}{4} + \frac{\pi^2}{8}]$, (14)

2^0 $E(MH_*^{(\alpha)}, Jn, p, _2) = \frac{4M}{(n+1)^2} \frac{I(-2, 2p)}{I(-4, 2p)} + 0\left(\frac{1}{n^3}\right)$。 (15)

证 由引理2得

$$E(MH_*^{(2)}, Jn, p, _2) = \frac{2^4 M}{\pi} Cn, p, _2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} t^2 \frac{\operatorname{Sin}^{2p}(n+1)t}{\operatorname{Sin}^4 t} dt$$

$$+ \frac{4M}{\pi} Cn, p, 2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left[2\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - (\pi - 2t)^2\right] \frac{\operatorname{Sin}^{2p}(n+1)t}{\operatorname{Sin}^4 t} dt$$

于是由

$$\pi(n+1)I(-2,2p) - \frac{4}{\pi^2} Cp \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{4}} t^2 \frac{\operatorname{Sin}^{2p}(n+1)t}{\operatorname{Sin}^4 t} dt$$

$$\leqslant \pi(n+1)I(-2, 2p) + \frac{\pi}{4} m_2,$$

$$\frac{1}{3}Cp+\frac{4}{\pi^2}Cp\leq\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}[2\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-(\pi-2t)^2]\frac{\operatorname{Sin}^{2p}(n+1)t}{\operatorname{Sin}^4 t}dt\leqslant\frac{\pi^3}{2}$$

可得（14）成立。将（7）代入（14）得（15）。　证毕。

推论　对于$p\geqslant q\geqslant 2$，　$0<\alpha\leqslant 2$，　有

$$E(MH_*^{(\alpha)},Jn,p,q)=\frac{2^\alpha MI(\alpha-2q,2p)}{(n+1)^\alpha I(-2q,2p)}+0(Aq^{n}{}_{(\alpha)}),\qquad(16)$$

其中$Aq^{(n)}\alpha$满足

$$Aq,^{(n)}\alpha=\begin{cases}\frac{1}{n^{2+\alpha}}, & q\geqslant 3,\ 0<\alpha\leq 2\text{或}q=2,\ 0<\alpha<1,\\ \frac{1}{n^3}, & q=2,\ 1<\alpha\leq 2,\\ \frac{l_n n}{n^3}, & q=2,\ \alpha=1,\end{cases}$$

并且总有$A^{(n)}_{q,\alpha}=0\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$。

这一推论正是上面四个定理的综合，而且获得了与Sevore在[1]中所得的相同结论。

定理5　对于$q=1$，　$0<\alpha<1$，　有

$$E(MH_*^{(\alpha)},Jn,p,1)=\frac{2^\alpha M}{(n+1)^\alpha}\frac{I(\alpha-2,2p)}{I(-2,2p)}+0\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)。\qquad(17)$$

证　因为

$$E(MH_*^{(\alpha)},Jn,p,1)=\frac{2^{2+\alpha}M}{\pi}Cn,P,1\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\frac{\operatorname{Sin}^{2p}(n+1)t}{\operatorname{Sin}^2 t}dt,$$

由引理1得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}t^\alpha\frac{\operatorname{Sin}^{2p}(n+1)t}{\operatorname{Sin}^2 t}dt\geqslant(n+1)^{1-\alpha}In(\alpha-2,2p)+\frac{1}{3(n+1)^{1+\alpha}}In(\alpha,2p)$$

$$\geqslant\pi I(\alpha-2,2p)(n+1)^{1-\alpha}-Cp\left(\frac{\pi}{2}\right)^\alpha\frac{2}{3\pi^2(1-\pi^2)},$$

所以，

$$E(MH_*^{(\alpha)},Jn,p,1)\geqslant\frac{2^{2+\alpha}M}{\pi}Cn,p,1[\pi I(\alpha-2,2p)(n+1)^{1-\alpha}-d]$$

其中$d>0$。　又

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}t^\alpha\frac{\operatorname{Sin}^{2p}(n+1)t}{\operatorname{Sin}^2 t}dt\leqslant\pi I(\alpha-2,2p)(n+1)^{1-\alpha}+\frac{Cp}{1+\alpha},$$

所以，

$$E(MH_*^{(\alpha)},Jn,p,1)\leq\frac{2^{2+\alpha}M}{\pi}Cn,p,1[\pi I(\alpha-2,2p)(n+1)^{1-\alpha}+\frac{Cp}{1+\alpha}]。$$

但

$$Cn,p,_1=\frac{(n+1)^{-1}}{4I(-2,2p)}+0\left(\frac{1}{n^3}\right),$$

故

$$E(MH_*^{(\alpha)},\ J_{n,p,1}) = \frac{2^\alpha M}{(n+1)^\alpha}\ \frac{I(\alpha-2,\ 2p)}{I(-2,\ 2p)} + 0\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)。$$

证毕。

〔注记〕 若在推论与定理5中分别令P=q=2,P=q=1,就对应得到Jackson算子和Fejer算子的逼近渐近展开式。关于这方面的成果参见〔2〕、〔3〕,本文的方法有所不同。

作者的这篇论文得到杭州大学谢庭藩教授的指正,谨在此深表感谢。

参考文献

〔1〕 Devore,The Appraximation of Continous functions by Postive linear operators. New York,1972.

〔2〕 王兴华,爵克松奇异积分对连续函数逼近的准确常数,数学进展,14(1964)231——237。

〔3〕 李文清,关于费叶尔算子的逼近度,厦门大学学报(自然科学报),1977年第二期。