一般粘性阻尼多自由度系统的模态分析

王　伟

（力学教研室）

提　　要

本文讨论了多自由度具有一般粘性阻尼系统的振动问题，通过引入状态向量而使系统在状态方程下求得复特征值，并由复特征值判别系统的振动性质，以复模态矩阵求解系统的自由振动和强迫振动，为实现在电子计算机上的数值计算大大简化计算程序。

一. 引　言

在实际工程中有许多复杂的结构，在任意激励下的振动分析，往往可以离散化为一个多自由度系统的振动问题，若不考虑系统的阻尼通常可以用系统的固有振型的展开，来确定系统对激励的响应，若系统具有阻尼且为比例阻尼，即阻尼矩阵[C]是系统质量矩阵和刚度矩阵的线性组合，系统仍可以对固有振型分解，来确定系统的响应，如：

$$[M]\{\ddot{q}\}+[c]\{\dot{q}\}+[k]\{q\}=\{p\}$$

$[M]_{n\times n}$系统的惯量矩阵，正定对称矩阵，

$[C]_{n\times n}$系统的阻尼矩阵，对称阵，且有：

$$[c]=\alpha[M]+\beta[k]$$

式中α、β为线性比例系数。

$[K]_{n\times n}$系统的刚度矩阵，

$\{\ddot{q}\}$、$\{\dot{q}\}$、$\{q\}$分别为系统的广义加速度、速度和位移列矢量阵。

$\{p\}$为系统的激振力列矢量阵。

利用正则座标变换，得：

$$[u_N]^T[M][u_N]\{\ddot{q}_N\}+[u_N]^T[c][u_N]\{\dot{q}_W\}$$
$$+[u_N]^T[k][u_N]\{q\}=[u_N]^T\{p\}$$

式中$[u_N]$为正则模态矩阵，

若$[C]=\alpha[M]+\beta[K]$

则有：$[u_N]^T[C][u_N]=\alpha[u_N][M][u_N]+\beta[u_N]^T[K][u_N]=\alpha[I]+\beta[\Lambda]$

其中$[I]$为单位阵，$[\Lambda]$为特征值矩阵，均为对角阵，则$[C_N]$为对角阵，原方程变为：

$$\{\ddot{q}_N\}+[\diagdown C_N]\{\dot{q}\}+[\diagdown\Lambda]\{q\}=\{P_N\}$$

则有：$\dot{q}_N\dot{q}_i + C_{Nii} + \lambda_i q_i = p_{Ni}$　　(i = 1, 2, ……, n)

即将原来n个耦合的微分方程组化为n个非耦合的二阶微分方程组，并可独立求解。

但是，系统在非比例阻尼条件下就无法用固有振型分解方法得到系统的响应。本文通过引入一组状态参量从而使n个二阶微分方程组转化为2n个一阶微分方程组——状态方程求解。并由复特征判别系统的振动性质，以复模态矩阵求解该系统的强迫振动问题，为实现在电子计算机上的数值计算大大简化一步。

二. 状态方程：

对于具有一般粘性阻尼多自由度系统的受迫振动方程为：

$$[M]\{\ddot{q}\}+[C]\{\dot{q}\}+[K]\{q\}=\{Q(t)\} \tag{1}$$

若令$\{y\}_1=\{\dot{q}\}$　　$\{y\}_2=\{q\}$

称：

$$\{y\}=\begin{pmatrix}\{y\}_1\\ \{y\}_2\end{pmatrix}=(\{\dot{q}_1,\dot{q}_2,\cdots\dot{q}_n\};\ \{q_1,q_2,\cdots q_n\})^T \text{为状态向量。} \tag{2}$$

由$\{y\}_1=\{\dot{y}\}_2$

有：$[M]\{\dot{y}\}_2-[M]\{y\}_1=0$ 　(3)

原方程（1）可写为：

$$[M]\{\dot{y}\}_1+[C]\{\dot{y}\}_2+[K]\{y\}_2=\{0\} \tag{4}$$

将（3）、（4）两式合写为：

$$\begin{pmatrix} o & M\\ M & C\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\{\dot{y}\}_1\\ \{\dot{y}\}_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-M & o\\ o & k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\{y\}_1\\ \{y\}_2\end{pmatrix}=0 \tag{5}$$

即为：

$$\begin{pmatrix} o & M\\ M & c\end{pmatrix}\{\dot{y}\}+\begin{pmatrix}-M & o\\ o & k\end{pmatrix}\{y\}=0 \tag{6}$$

令：

$$A=\begin{pmatrix} o & M\\ o & c\end{pmatrix}_{2n\times 2n}\qquad B=\begin{pmatrix}-M & o\\ o & k\end{pmatrix}_{2n\times 2n}$$

二者皆为对称矩阵，[M]、[K]、[C]成为A与B的子矩阵。由此得到：

$$A\{\dot{y}\}+B\{\dot{y}\}=0 \tag{7}$$

此式称为系统的状态方程。

这样我们通过引入状态向量{y}便把物理座标中的n个二阶微分方程转化为由状态方程所表示的2n个一阶微分方程组。

应该指出：状态方程并不是唯一的形式，例如上述情况的状态方程也可以写为：

$$\begin{pmatrix} M & c\\ o & 1\end{pmatrix}\{\dot{y}\}+\begin{pmatrix} o & k\\ -1 & 0\end{pmatrix}\{y\}=\{0\}$$

但此时二矩阵$\begin{pmatrix} M & C\\ o & 1\end{pmatrix}$和$\begin{pmatrix} o & K\\ 1 & o\end{pmatrix}$为非对称阵，因此，状态方程一般是指上述A和B为对称矩阵的情况。对于受迫振动系统可表示为：

$$A\{\dot{y}\}+B\{y\}=\{E(t)\} \tag{8}$$

其中：$\{y\}=\begin{pmatrix}\{\dot{q}\}\\ \{q\}\end{pmatrix}$　　$\{E(t)\}=\begin{pmatrix} o\\ \{Q(t)\}\end{pmatrix}_{2n\times}$

三. 系统的特征值:

对于方程：$A\{\dot{y}\}+B\{y\}=\{0\}$

设其解为：$\{y\}=\{\psi\}e^{rt}$

代入原方程有：

$$Ar\{\psi\}e^{rt}+B\{\psi\}e^{rt}=\{0\} \quad (9)$$

即：　$[Ar+B]\{\psi\}=0$ 　(10)

左乘A^{-1}　$[rI+A^{-1}B]\{\psi\}=0$

令$H=-A^{-1}B$式中I为单位阵矩。

得：$[rI-H]\{\psi\}=0$ 　(11)

$\{\psi\}$非零解条件为：

$$\triangle(r)=|rI-H|=0 \quad (12)$$

此为能确定特征值的特征方程。

因为H为2n×2n阶方阵，所以特征方程为关于r 的2n次多项式，r 有2n个根且两 两组成共轭复根，这2n个根可能出现的情况有：

(1) 2n个根全部为虚数，即r的根是n对共轭虚数，这种情况下其解的形式为：

$$\{\psi\}e^{rt}\to\{\psi\}e^{j\omega t},\ \{\psi\}e^{-j\omega t}$$

这种解是平稳的。

(2) 2n个根中至少有一个根的实部是正的，此时解的形式为：

$$\{\psi\}e^{rt}=\{\psi\}e^{(\alpha i+j\beta i)t} \quad (\alpha_i>0)$$

$$\because\ e^{(\alpha i+j\beta i)it}=e^{\alpha it}\cdot e^{j\beta it},$$

其中$e^{\alpha it}$随着t的增加而发散，所以，其解为非稳定的。

(3) 2n个根中全部为负实数，此时其解的形式为：

$$\{\psi\}e^{rt}=\{\psi\}e^{-\alpha it} \quad (\alpha i>0)$$

此时，随着t的增加而衰减很快停止运动而不发生振动，此即为大阻尼情况。

(4) 2n个根全部为复数，且为n对共轭复数，其实部皆为负值，此种情况就是我们急待解决的，将2n个根按下列次序排列：

$$r_1,\ r_2,\ r_3,\ \cdots\cdots,\ r_n,\ r_1^*,\ r_2^*,\ r_3^*,\ \cdots\cdots,\ r_n^*$$

其中r_i与r_i^*互为共轭复数 ($i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n$)

2n个特征值对应的2n个特征向量为：

$$\{\psi\}_1,\{\psi\}_2,\ \{\psi\}_3,\ \cdots\cdots\{\psi\}_n,\ \{\psi\}_1^*,\ \{\psi\}_2^*,\ \cdots\cdots\{\psi\}_n^*$$

其复模态矩阵为

$$[\psi]_{2n\times2n}=[\underbrace{\{\psi\}_1\{\psi\}_2\cdots\cdots\{\psi\}_n}_{2n\times n}\vdots\underbrace{\{\psi\}_1^*\{\psi\}_2^*\cdots\{\psi\}_n^*}_{2n\times n}]$$

$$[r_iI-H]\{\psi\}_i=0$$

$$[r_i^*I-H]\{\psi\}_i^*=0$$

因为H为实对称矩阵,所以,r_i与r_i^*所对应的特征向量也是互为共轭的，即：$\{\psi\}_i$与$\{\psi\}_i^*$为共轭向量。

还要指出：在有阻尼存在情况下的多项式：

$|rI-H|=0$只能称为特征方程而不是频率方程。

四．模态矩阵的正交性：

由状态方程：$A\{\dot{y}\}+B\{y\}=0$

第i阶特征矢量满足方程：

$$r_iA\{\psi\}_i+B\{\psi\}_i=0$$

当$i=s$时，　　$r_sA\{\psi\}_s+B\{\psi\}_s=0$

左乘$\{\psi\}_r^T$　　$r_s\{\psi\}_r^TA\{\psi\}_s+\{\psi\}_r^TB\{\psi\}_s=0$

转置：　　$r_s\{\psi\}_s^TA\{\psi\}_r+\{\psi\}_s^TB\{\psi\}_r=0$　　(13)

当$i=r$时，　　$r_rA\{\psi\}_r+B\{\psi\}_r=0$

左乘$\{\psi\}_s^T$　　$\{\psi\}_s^Tr_rA\{\psi\}_r+\{\psi\}_s^TB\{\psi\}_r=0$　　(14)

式（13）、（14）两式相减：

$$(r_s-r_r)\{\psi\}_s^TA\{\psi\}_r=0$$

$r\neq s$，则$r_s\neq r_r$

故有：$\{\psi\}_s^TA\{\psi\}_r=0$

$$(r\neq s)$$

同样可得：$\{\psi\}_s^TB\{\psi\}_r=0$

将A、B以[M]、[K]、[C]表示：

$$\{\psi\}_s^T\begin{pmatrix} o & M \\ M & c\end{pmatrix}\{\psi\}=0 \qquad \{\psi\}_s^T\begin{pmatrix} -M & o \\ o & k\end{pmatrix}\{\psi\}_r=0$$

由此可得：

$$\{\psi\}_s^T[M]\{\psi\}_r=0$$

$$\{\psi\}_s^T[K]\{\psi\}_r=0$$

$$\{\psi\}_s^T[C]\{\psi\}_r=0$$

前两个正交条件是实模态正交条件，对于复模态来说，又多了一个关于阻尼矩阵[C]的正交条件。

五．自由振动：

$$A\{\dot{y}\}+B\{y\}=0$$

设其解为$y=\{\psi\}e^{rt}$

有2n个特征值r_1，r_2，……，r_n，r_1^*，r_2^*……r_n^*对应的特征矢量$\{\psi\}_1$，$\{\psi\}_2$，…$\{\psi\}_n$，$\{\psi_1\}^*$…$\{\psi_1\}_n^*$其解可写为：

$$\{y\}_i=C_i^{(1)}\{\psi\}_ie^{r_it}+C^{i(2)}\{\psi\}_i^*e^{r_i^*t}$$

而　　$\{y\}_i=\{y_1,y_2,\cdots,y_{2n}\}^T$

其中$|\psi_{1i}|$和$|\psi_{1i}|^*$是ψ_{1i}和ψ_{1i}^*的模，ψ_i为复角由于ψ_{1i}与ψ_{1i}^*为共轭复数，所以其模相等。

令ω + ᵢ－ ＝ᵢωξ2jᵢdᵢₙ

其中ω_{ni}为相应无阻尼系统的第i阶固有频率，ζ_i为待定系数。

$$y_{1i}=C_i^{(1)}\,|\psi_{1i}|\,e^{-2\xi_i\omega_{ni}t+j\omega_{di}t+j\varphi_i}+C_i^{(2)}\,|\psi_{1i}|\,e^{-2\xi_i\omega_{ni}t-j\omega_{di}t-j\varphi_i}$$
$$=|\psi_{1i}|\,e^{-2\xi_i\omega_{ni}t}\left(C_i^{(1)}e^{j(\omega_{di}t+\varphi_i)}+C_i^{(2)}e^{-j(\omega_{di}t+\varphi_i)}\right)$$
$$=|\psi_{1i}|\,e^{-2\xi_i\omega_{ni}t}\left(e_i^{(1)}+C_i^{(2)}\cos(\omega dit+\varphi_i)\right.$$
$$\left.+c^{(1)}{}_i-C^{(2)}{}_i\sin(\omega dit+\varphi_i)\right)$$

∵r_i与r_i^*共轭，$C_i^{(1)}+C_i^{(2)}$与$C_i^{(1)}-C_i^{(2)}$共轭

∴上述方程可写为：

$\{y\}_i=C_i\{\psi\}_i e^{r_it}+[e_i\{\psi\}_i]^*e^{r_i^*t}$

其全解为：

$$\{y\}=\sum_{i=1}^{n}\{y\}_i=\sum_{i=1}^{n}\left(c_i\{\psi\}_ie^{r_it}+c_i^*\{\psi\}_i^*e^{r_i^*t}\right)$$

由初始条件：$\{y\}=\begin{pmatrix}\{\dot q\}\\\{q\}\end{pmatrix}_{2n\times1}$

来决定2n个C值。

由此可知，具有一般粘性阻尼系统，自由振动的解，仍是指数衰减形式。特征值的实部$(-2\xi_i\omega_{ni})$表示阻尼，$e^{-2\delta_i\omega_{ni}t}$是衰减因子，而特征值的虚部$(\omega_{di})$即表示各阶主振动的频率，因而特征值$r_i$的多项式方程不能称频率方程，只能称为特征值方程。

六. 强迫振动及其模态分析：

系统的强迫振动方程为：

$$[M]\{\ddot q\}+[C]\{\dot q\}+[K]\{q\}=\{Q(t)\}$$

(1)特征值、特征矢量：

特征值：r_1，r_2，……，r_n，r_{n+1}^*，r_{n+2}^*，……r_{2n}^*

模态矩阵：$[\psi]=[\{\psi\}_1\{\psi\}_2\cdots\cdots\{\psi\}_n,\ \{\psi\}_1^*\{\psi\}_2^*\cdots\cdots\{\psi\}_n^*]$

(2)用模态矩阵$[\psi]$将状态方程解耦，为此引入新的状态参量：

令$\{Y\}=[\psi]\{Z\}$

状态方程为：$A[\psi]\{\dot z\}+B[\psi]\{Z\}=\{E(t)\}$

左乘$[\psi]^T$：$[\psi]^TA[\psi]\{\dot z\}+[\psi]^TB[\psi]\{Z\}=[\psi]^T\{E(t)\}$

得：$[\diagdown A\diagdown]\{\dot z\}+[\diagdown B\diagdown]\{Z\}=\{N(t)\}$

其中：$[\diagdown A\diagdown]=\begin{pmatrix}a_{11}&&&\\&a_{22}&&o\\&&\cdots&\\&o&&a_{nn}\end{pmatrix}$ $[\diagdown B\diagdown]=\begin{pmatrix}b_{11}&&o&\\&b_{22}&&\\&&\cdots&\\&o&&b_{2n2n}\end{pmatrix}$

$\{N(t)\}=[\psi]^T\{E(t)\}$—称模态激振力。

则得到2n个非耦合的一阶微分方程组：

$$a_{ii}\dot z_i+b_{ii}Z_i=N_i(t)\quad(i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ 2n)$$

或表示为：$\dot z_i+\dfrac{b_{ii}}{a_{ii}}Z_i\quad\dfrac{N_i(t)}{a_{ii}}$

由前知：$r_i A\{\psi\}_i + B\{\psi\}_i = 0$

左乘$\{\psi\}_i^T$ $\quad r_i\{\psi\}_i^T \Delta A_s\{\psi\}_i + \{\psi\}_i^T B\{\psi\}_i = 0$

得：
$$r_i = \frac{-\{\psi\}^T{}_i B\{\psi\}_i}{\{\psi\}^T{}_i A\{\psi\}_i} = -\frac{b_{ii}}{a_{ii}}$$

$$\therefore \quad \dot{z}_i - r_i Z_i = \frac{1}{a_{ii}} N_i(t) \qquad (i=1,2,\cdots,2n)$$

对初始条件进行变换：

则：
$$\{y_{(0)}\} = \{y_0\} = [\psi]\{z_{(0)}\}$$
$$\{z_{(0)}\} = [\psi]^{-1}\{y_0\} = \{z_0\}$$

(3)解2n个无耦合的一阶微分方程组

$$\begin{cases} \dot{z}_i - r_i Z_i = \dfrac{1}{a_{ii}} N_i(t) \\ Z_i(0) = Z_{i0} \end{cases} \qquad (i=1,2,\cdots,2n)$$

该非齐次微分方程的解可用DUhamel积分求解：

$$Z_i = \frac{1}{a_{ii}}\int_0^t Ni(\tau)e^{ri(t-z)}dz$$

方程对应齐次方程的通解为：

$$Z_{i0}e^{rit}$$

故全解为：

$$Z_i = Z_{i0}e^{rit} + \frac{1}{a_{ii}}\int_0^t Ni(z)e^{ri(t-\tau)}dz$$

(4)将上述结果变换到状态矢量中去：

$$\{z\} \to \{y\}$$
$$\{y\} \to [\psi]\{z\}$$

(5)再由状态矢量还原到原来的物理座标中去：

$$\{y\} \to \{q\}$$

$$\because \{y\} = \begin{pmatrix} \{\dot{q}\} \\ \{q\} \end{pmatrix} = [\psi]\{z\} = \begin{pmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} \\ \psi_{21} & \psi_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

其中ψ_{11}、ψ_{12}、ψ_{21}、ψ_{22}均为$n \times n$阶子阵。

$$\therefore \{q\} = [\psi_{21}]\{Z_1\} + [\psi_{22}]\{Z_2\}$$

当然，这种解是形式上的，具体数值解需要用计算机方法。但是，我们这样的讨论无疑地对于解决一般粘性阻尼系统的振动问题，将提供极大的方便，简化了计算程序。

参　考　文　献

(1) Meirovitch, Elememt's of vibration Analysis. P166—170

(2) S.Tjmoshenko D.H young. w. Weaver. Jr Vibration problems in engineering 4th ed.
〔工程中的振动问题. 胡人礼译　杜庆等校　1978〕 P230—233

(3) W. T. Thomson Theory of vibratiom with application
〔振动理论及其应用　胡宗武等译 1980〕 P180—183

(4) 胡海昌 多自由度线性阻尼系统的振动问题，固体力学学报，1980试刊，P12—18.

(5) 方同，多自由线性阻尼系统的模态分析法，固体力学学报，1981 第3期，P312—316.