试论一阶线性电路的“三要素法”

王俊鵾

（电工教研室）

提　　要

本文推导出用“三要素法”求解一阶线性电路在任意激励作用下全响应的一般公式，并给出了应用“三要素法”求解一阶线性电路在阶跃激励、正弦激励、指数函数激励、冲击激励作用下全响应的六个实例

一阶电路是指只包含一个或者经化简后只剩下一个独立储能元件的电路，即该电路依据基尔霍夫定律列出的方程是一阶的常微分方程。一阶电路在工程实际中经常遇到，所以希望找到一种能迅速而准确确定一阶线性电路在任意激励作用下的全响应的经典解法，然而一般国内外“电路”教材中提出的“三要素法”只适用于求解一阶线性电路在阶跃激励下的全响应。本文将论证“三要素法”对任意激励作用下的一阶线性电路是完全适用的，并将给出应用“三要素法”求解一阶线性电路在阶跃激励、正弦激励、指数函数激励、冲击激励作用下全响应的实例。

我们知道由RC或RL构成的一阶电路，激励和响应之间的关系可概括为下列形式：

$$\frac{dy(t)}{dt}+ay(t)=f(t) \tag{1}$$

$$y(0^+)=y_0 \tag{2}$$

式中：

$f(t)$ ——任意激励函数；

$y(t)$ ——电路中任一响应函数（电压或电流）；

$y(_0{}^+)$——初始条件；

a——由电路的结构与参数决定的常数。

在式（1）中 $\frac{dy(t)}{dt}$ 的系数为1，这并不影响普遍性，若有 $a_1\frac{dy(t)}{dt}+a_0y(t)=f_1(t)$，总可将式子两边除以$a_1$化成式（1）的形式。

为了求出式（1）的通解以积分因子e^{at}乘该式的两端得：

$$e^{at}\left[\frac{dy(t)}{dt}+ay(t)\right]=e^{at}f(t)$$

即

$$\frac{d}{dt}\left[e^{at}y(t)\right]=e^{at}f(t)$$

上式两端积分得

$$e^{at}\cdot y(t)=\int e^{at}f(t)dt+c$$

所以

$$y(t)=e^{-at}\int e^{at}f(t)dt+ce^{-at}=\underbrace{y_p(t)}_{\text{稳态响应}}+\underbrace{y_h(t)}_{\text{暂态响应}} \qquad (3)$$

式中：

$y_p(t)=e^{-at}\int e^{at}f(t)dt$为电路的稳态响应，它和激励函数$f(t)$具有相同的形式，它就是非齐次微分方程式（1）的特解；

$y_h(t)=ce^{-at}$为电路的暂态响应，它就是式（1）所对应的齐次微分方程的通解，该齐次微分方程的特征方程为$s+a=0$，所以特征根 $s=-a=-\frac{1}{\tau}$， 其中τ为一阶电路的时间常数，仅与电路的结构与参数有关，而与外施激励无关。这样电路的暂态响应可写为

$$y_h(t)=ce^{-t/\tau}$$

而电路的全响应为

$$y(t)=y_p(t)+ce^{-t/\tau} \qquad (4)$$

式中c为由初始条件决定的积分常数。

对$t=0^+$将式（2）代入式（4）中得

$$y(0^+)=y_p(0^+)+c$$

所以

$$c=y(0^+)-y_p(0^+)$$

把c代入式（4）中得

$$y(t)=y_p(t)+[y(0^+)-y_p(0^+)]e^{-t/\tau} \qquad (5)$$

这就是一阶线性电路在任意激励作用下，决定电路全响应的一般公式。其中$y(0^+)$、$y_p(t)$、$y_p(0^+)$、τ分别代表响应的初始值、稳态值、稳态初始值和电路的时间常数，而$y(0^+)$、$y_p(t)$、τ称为一阶电路的“三要素”，只要求得了这三个要素，就可以根据式(5)直接写出电路全响应的函数式。

对阶跃激励而言有

$$y_p(t)=y_p(0^+)=y(\infty)$$

式（5）变为

$$y(t)=y(\infty)+[y(0^+)-y(\infty)]e^{-t/\tau} \qquad (6)$$

从而得到了一般“电路”教材中给出的求解一阶线性电路在阶跃激励作用下全响应的“三要素法”的一般公式。

一阶电路的稳态响应$y_p(t)$可用下式算出：

$$y_p(t)=e^{-at}\int e^{at}f(t)dt=e^{at}\int e^{-at}f(t)dt \qquad (7)$$

特别是对于阶跃激励的稳态响应可用直流电路解法求得；对于正弦激励的稳态响应可用复数符号法求得；对于指数函数激励Ae^{pt}的稳态响应，若$P \neq S$（S为一阶电路特征方程的根），则可设$y_p(t)=ke^{pt}$；若$P=S$，则可设$y_p(t)=kte^{pt}$，然后代入一阶电路的微分方程式用待定系数法求解；对于冲激激励$\delta(t)$的稳态响应，由于$t>0$时$\delta(t)=0$，故$y_p(t)=0$。

为了求出一阶电路全响应的初始值$y(0^+)$，应先求出电容上电压初始值$\mu_c(0^+)$和电感中电流初始值$i_L(0^+)$，对于通常遇到的电路，它们可由换路定律确定：

$$\mu_c(0^+)=\mu_c(0^-) \tag{8}$$

$$i_L(0^+)=i_L(0^-) \tag{9}$$

对于当电容上电压值$\mu_c(0^-)$和电感中电流值$i_L(0^-)$与换路后的电路结构不相容的情况，即是说电压值$\mu_c(0^-)$和电流值$i_L(0^-)$不满足换路后的电路方程时，会出现$\mu_c(0^+) \neq \mu_c(0^-)$、$i_L(0^+) \neq i_L(0^-)$，也就是强迫跃变的情况，这时可用下列两条原则来定$\mu_c(0^+)$及$i_L(0^+)$：

（1）在换路后的初始时刻，联接于每一节点（不包括有恒压源的节点）上的电容的总电荷应等于换路前终了时刻这些电容上的总电荷，即

$$\Sigma q_k(0^+)=\Sigma q_k(0^-)$$

或

$$\Sigma C_k \mu_{ck}(0^+)=\Sigma C_k \mu_{ck}(0^-) \tag{10}$$

（2）在换路后的初始时刻，每一回路（不包括有恒流源构成的回路）中电感的总磁链应等于换路前终了时刻这些电感的总磁链值，即

$$\Sigma \psi_k(0^+)=\Sigma \psi_k(0^-)$$

或

$$\Sigma L_k i_{Lk}(0^+)=\Sigma L_k i_{Lk}(0^-) \tag{11}$$

当求出了电容上电压初始值$\mu c(0^+)$和电感中电流初始值$i_L(0^+)$后，根据基尔霍夫两个定律可算出换路后电路中其他电压或电流的初始值。计算时，根据补偿定理可用电动势等于电容上电压初始值的恒压源代替电容，用电激流等于电感中电流初始值的恒流源代替电感。

为了运用方便起见，现将阶跃激励和冲激激励时一阶电路的初始条件归纳为下列几种情况：

（1）各储能元件与单位阶跃电压源或单位冲激电压源相并联，则各该元件上分别具有初始电压$\mu(0^+)=1$或$\mu(0)=\delta(t)$。例如图1(a)示单位阶跃电压源$1(t)$与电容元件C相并联，则$\mu_c(0^+)=1$，$i_c(0)=c\delta(t)$；图1(b)示单位冲激电压源$\delta(t)$与电感元件L相并联，则$\mu_L(0)=\delta(t)$，$i_L(0^+)=\frac{1}{L}\int_{0^-}^{0^+}\mu_L(0)dt=\frac{1}{L}$。

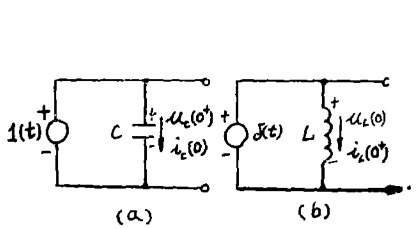

图1

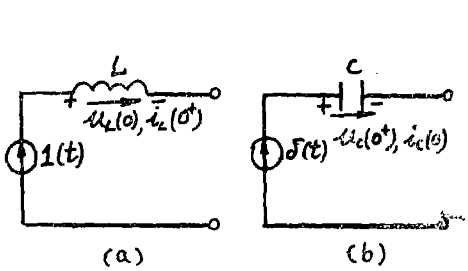

图 2

（2）各储能元件与单位阶跃电流源或单位冲激电流源相串联，则各该元件中分别具有初始电流$i(0^+)=1$或$i(0)=\delta(t)$。例如图2(a)示单位阶跃电流源与电感元件L相串联，则$i_L(0^+)=1$，$\mu_L(0)=L\delta(t)$；图2(b)示单位冲激电流源与电容元件C相串联，则 $i_C(0)=\delta(t)$，

$$\mu_C(0^+)=\frac{1}{c}\int_{0^-}^{0^+}i_C(0)dt=\frac{1}{c}。$$

(3)电阻与电感（或电容）串联后接于单位阶跃电压源或电位冲激电压源，则在$t=0$时，电感相当于开路，电容相当于短路，电压源的电压按分压比加在各串联元件上，这些元件上分配到的电压分别是各元件的初始电压。例如图3(a)示单位冲激电压源加于串联的RL电路上，因为在$t=0$时，电感相当于开路，电源电压全部加于电感上，所以$\mu_L(0)=\delta(t)$，

$i_L(0^+)=\frac{1}{L}\int_{0^-}^{0^+}\mu_L(0)dt=\frac{1}{L}$；图3(b)示单位冲激电压源加于串联的RC电路上，因为$t=0$时，电容相当于短路，电源电压全部加于电阻上，所以 $\mu_R(0)=\delta(t)$，$i_R(0)=i_c(0)$

$=\frac{1}{R}\delta(t)$，$\mu_c(0^+)=\frac{1}{C}\int_{0^-}^{0^+}i_c(0)dt=\frac{1}{RC}$

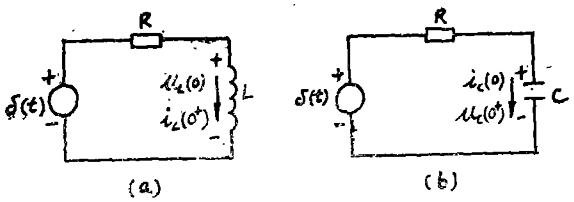

图3

（4）电阻与电容（或电感）并联后接于单位阶跃电流源或单位冲激电流源，则在$t=0$时，电感相当于开路，电容相当于短路，电流源的电流按分流比通过各并联元件中，这些元件中分配到的电流分别是各元件的初始电流。例如图4(a)示单位冲激电流源加于并联的RC电路上，则因$t=0$时，电容相当于短路，所以通过电容的电流$i_c(0)=\delta(t)$，$\mu_c(0^+)$

$=\frac{1}{C}\int_{0^-}^{0^+}i_c(0)dt=\frac{1}{C}$，图4(b)示单位冲激电流源加于并联的RL电路上，则因$t=0$时，电感相当于开路，所以通过电阻的电流$i_R(0)=\delta(t)$，$\mu_R(0)=\mu_L(0)=R\delta(t)$，

$i_L(0^+)=\frac{1}{L}\int_{0^-}^{0^+}\mu_L(0)dt=\frac{R}{L}$。

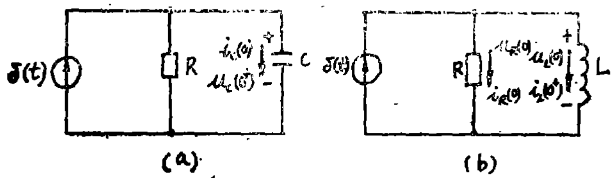

图4

至于一阶电路时间常数τ的求法，在一般“电路”教材中都有详细的叙述，这里不 再重复。

最后举几个应用“三要素法”的例子。

例1 计算图5所示的分压电路中在开关闭合后输出电压$\mu_{c2}(t)$，

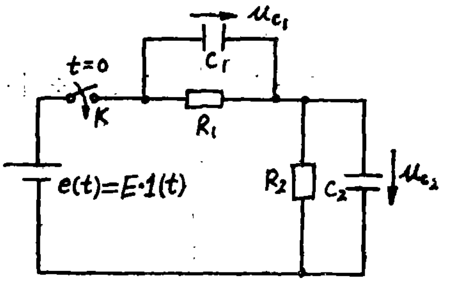

图5

解：开关闭合前$\mu_{c1}(0^-)=\mu_{c2}(0^-)=0$

开关闭合后，当$t=0^+$时，按照基尔霍夫第二定律应有

$$\mu_{c1}(0^+)+\mu_{c2}(0^+)=E\cdot 1(t)$$

故$t=0^-$时的电容电压值不满足换路后的电路方程式，因而出现电容电压强迫突变的 情况。

由式（10）得

$C_1\mu_{c1}(0^+)-C_2\mu_{c2}(0^+)=C_1\mu_{c1}(0^-)-C_2\mu_{c2}(0^-)=0$ 把它和上述的$\mu_{C1}(0^+)+\mu_{C2}(0^+)=E\cdot 1(t)$联立可解出

$$\mu_{C1}(0^+)=\frac{C_2}{C_1+C_2}E$$

$$\mu_{C2}(0^+)=\frac{C_1}{C_1+C_2}E$$

电路到达稳态后，C_1和C_2相当于开路，则有

$$\mu_{C1}(\infty)=\frac{R_1}{R_1+R_2}E$$

$$\mu_{C2}(\infty)=\frac{R_2}{R_1+R_2}E$$

可见$t=0^+$时，电压分配取决于电容；而当电路稳定后，电压分配则取决于电阻。

求电路的时间常数时，可令外加电源为零，这样R_1与R_2并联，C_1与C_2也并联，故

$$\tau=RC=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}(C_1+C_2)$$

由式（6），即得输出电压

$$\mu_{C2}(t)=\frac{R_2}{R_1+R_2}E+\left(\frac{C_1}{C_1+C_2}E-\frac{R_2}{R_1+R_2}E\right)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

当$\frac{C_1}{C_1+C_2}=\frac{R_2}{R_1+R_2}$，这时$R_1C_1=R_2C_2$，即$\mu_{C2}(0^+)=\mu_{C2}(\infty)$，输出电压的 暂态 响应为零，换路后电路立即达到稳态

$$\mu_{C2}(t)=\mu_{C2}(\infty)=\frac{R_2}{R_1+R_2}E$$

则输出电压与输入电压波形完全一致，仅幅度减小了一些，从而起到无失真的分压作用。

例二图6示电路R_1、L_1为输电线的电阻和电感，R_2、L_2为负载的等效参数，电源电 压

$\mu(t)=U_m\sin(\omega t+\psi)$。求开关闭合（相当于负载短路）后输电线和负载的电流。

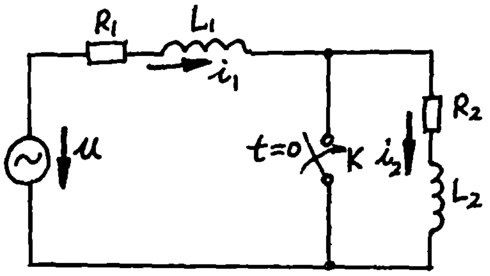

图6

解：计算换路前电路的稳态以确定 $i_1(0^-)=i_2(0^-)$。显然有

$$i_1=i_2=\frac{U_m}{Z}\sin(\omega t+\psi-\phi$$

式中 $Z=\sqrt{(R_1+R_2)^2+(\omega L_1+\omega L_2)^2}$

$$tg^{-1}\phi=\frac{\omega(L_1+L_2)}{R_1+R_2}$$

所以

$$i_1(0^-)=i_2(0^-)=\frac{U_m}{Z}\sin(\psi-\phi)$$

由换路定律即式（9）有

$$i_1(0^+)=i_2(0^+)=\frac{U_m}{Z}\sin(\psi-\varphi)$$

开关闭合后分成了二个独立电路，它们的时间常数分别为

$$\tau_1=\frac{L_1}{R_1}, \quad \tau_2=\frac{L_2}{R_2}$$

计算换路后二独立电路的稳态以确定$i_{1p}(t)$与$i_{2p}(t)$。显然有

$$i_{1p}(t)=\frac{U_m}{Z'}\sin(\omega t+\psi-\varphi')$$

式中$Z'=\sqrt{R_1^2+(\omega L_1)^2}$，$tg^{-1}\varphi'=\frac{\omega L_1}{R_1}$

所以

$$i_{1p}(0^+)=\frac{U_m}{Z'}\sin(\psi-\varphi')$$

而

$$i2p(t)=0; \quad i2p(0^+)=0$$

由式（5）可分别得到

$$i_1(t)=\frac{U_m}{Z'}\sin(\omega t+\psi-\varphi')+\left\{\frac{U_m}{Z}\sin(\psi-\varphi)-\frac{U_m}{Z'}\sin(\psi-\varphi')\right\}e^{-\frac{t}{\tau_1}}$$

与

$$i_2(t)=\frac{U_m}{Z}\sin(\psi-\varphi)e^{-\frac{t}{\tau_2}}$$

例三设有零具初始条件的R、C串联电路接通到电动势为$e(t)=Ee^{-\frac{t}{T}}$且$T\neq RC$的电源，求电容上的过渡电压$\mu_C(t)$

解：根据换路定律即式（8）有

$$\mu_C(0^+)=\mu_C(0^-)=0$$

电路的时间常数$\tau = RC$。

为了决定电路的稳态响应，先列出电路的微分方程式

$$RC\frac{d\mu_c}{dt} + \mu_c = e(t) = Ee^{-\frac{t}{T}}$$

令$\mu_{cp}(t) = Ae^{-\frac{t}{T}}$，并代入上式得

$$-RC\frac{1}{T}Ae^{-\frac{t}{T}} + Ae^{-\frac{t}{T}} = Ee^{-\frac{t}{T}}$$

解得 $A = \frac{ET}{T - RC}$

所以

$$\mu_{cp}(t) = \frac{ET}{T - RC}e^{-\frac{t}{T}}$$

$$\mu_{cp}(0) = \frac{ET}{T - RC}$$

由式（5）得

$$\mu_c(t) = \frac{ET}{T - RC}\left\{e^{-\frac{t}{T}} - e^{-\frac{t}{\tau}}\right\}$$

例四图7示R、C并联电路$\mu_c(0^-) = U_0$接通到电激流为$i_s(t) = Ie^{-\frac{t}{T}}$且$T = RC$的电流源，求电容上的过渡电压$\mu_c(t)$

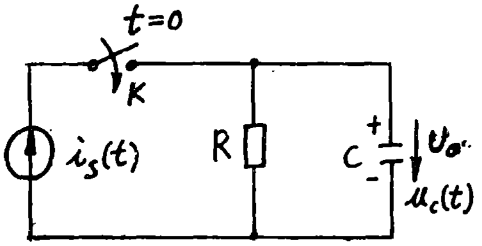

图7

解：根据换路定律即式（8）有

$$\mu_c(0^+) + \mu_c(0^-) = U_0$$

电路的时间常数

$$\tau = RC = T$$

为了决定电路的稳态响应，先列出电路的微分方程式

$$C\frac{d\mu_c}{dt} + \frac{\mu_c}{R} = i_s(t) = Ie^{-\frac{t}{T}}$$

即

$$RC\frac{d\mu_c}{dt} + \mu_c = RIe^{-\frac{t}{T}}$$

由于$T = \tau = RC$，应令$\mu_{cp}(t) = Ate^{-\frac{t}{T}}$，并代入上式得

$$RCAe^{-\frac{t}{T}}-RC\frac{1}{T}Ate^{-\frac{t}{T}}+Ate^{-\frac{t}{T}}=RIe^{-\frac{t}{T}}$$

解得

$$A=\frac{I}{C}$$

所以

$$\mu_{cp}(t)=\frac{I}{C}te^{-\frac{t}{T}}$$

$$\mu_{cp}(0^+)=0$$

$\mu_{cp}(t)$亦可由式（7）算出，为此将电路的微分方程式化为式（1）的标准形式，即

$$\frac{d\mu_c}{dt}+\frac{1}{RC}\mu_c=\frac{I}{C}e^{-\frac{t}{T}}$$

与式（1）比较$a=\frac{1}{RC}$，　$f(t)=\frac{I}{Ce}^{-\frac{t}{T}}$，将它们代入（7）式得

$$\mu_{cp}(t)=e^{-at}\int e^{at}f(t)\,dt=e^{-\frac{1}{RC}t}\int e^{\frac{1}{RC}t}\frac{I}{C}e^{-\frac{t}{T}}dt$$

$$=\frac{I}{C}te^{-\frac{1}{RC}t}=\frac{I}{C}te^{-\frac{t}{T}}$$

与用待定系数法求得的结果相同。

最后由式（5）得

$$\mu_c(t)=\frac{I}{C}te^{-\frac{t}{T}}+U_0e^{-\frac{t}{\tau}}=\left(\frac{I}{c}t+U_0\right)e^{-\frac{t}{T}}$$

例五　设有零具初始条件的R、C串联电路接通至单位冲激电压源$e(t)=\delta(t)$〔见图3(b)〕，求过渡电量$\mu_c(t)$及$i(t)$。

解：先决定$\mu_c(0^+)$，由于$t=0$时电容相当于短路，电压源的电压全部加在电阻上，故$i(0)=\frac{1}{R}\delta(t)$，从而

$$\mu_c(0^+)=\frac{1}{C}\int_{0^-}^{0^+}i(0)\,dt=\frac{1}{RC}。$$

电路的时间常数

$$\tau=RC$$

又由于$t>0$时，$e(t)=\delta(t)=0$，故电容电压的稳态响应

$$\mu_{cp}(t)=\mu_{cp}(0^+)=0。$$

由式（5)求得

$$\mu_c(t)=\frac{1}{RC}e^{-\frac{t}{\tau}}=\frac{1}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}$$

电路电流的全响应为

$$i(t)=\frac{1}{R}\left[\delta(t)-\mu_c(t)\right]=\frac{1}{R}\delta(t)-\frac{1}{R^2C}e^{-\frac{t}{RC}}$$

这个电流也可由下式求出

$$i(t)=C\frac{d\mu_c}{dt}=C\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}\cdot 1(t)\right]$$

$$=\frac{1}{R}e^{-\frac{t}{RC}}\frac{d1(t)}{dt}-\frac{1}{R^2C}e^{-\frac{t}{RC}}\cdot 1(t)$$

$$=\frac{1}{R}e^{-\frac{t}{RC}}\delta(t)-\frac{1}{R^2C}e^{-\frac{t}{RC}}\cdot 1(t)\qquad t\geqslant 0$$

因为

$$e^{-\frac{t}{RC}}\cdot\delta(t)=\begin{cases}\delta(t) & t=0\\ 0 & t\neq 0\end{cases}$$

所以

$$i(t)=\frac{1}{R}\delta(t)-\frac{1}{R^2C}e^{-\frac{t}{RC}}\cdot 1(t)\qquad t\geqslant 0$$

$$=\frac{1}{R}\delta(t)-\frac{1}{R^2C}e^{-\frac{t}{RC}}$$

例六　图7示R、C并联电路，$\mu_c(0^-)=U_0$，接通到单位冲激电流源$i_s(t)=\delta(t)$，求电容上的过渡电压$\mu_c(t)$。

解：先决定$\mu_c(0^+)$，为此可列出电路的微分方程式

$$C\frac{d\mu_c}{dt}+\frac{\mu_c}{R}=is(t)=\delta(t)$$

对上式两边从$t=0^-$至$t=0^+$积分得

$$c\left[\mu_c(0^+)-\mu_c(0^-)\right]+\frac{1}{R}\int_{0^-}^{0^+}\mu_c(t)dt=\int_{0^-}^{0^+}\delta(t)dt=1$$

因为$\mu_c(t)$为有限值，所以$\frac{1}{R}\int_{0^-}^{0^+}\mu_c(t)dt=0$，又$\mu_c(0^-)=U_0$，故有

$$\mu_c(0^+)=U_0+\frac{1}{C}$$

电路的时间常数

$\tau=RC$。

由于$t>0$，$i_s(t)=\delta(t)=0$，故电容电压的稳态响应

$\mu_{cp}(t)=0$

$\mu_{cp}(0^+)=0$

最后由公式(5)得全响应为

$$\mu_c(t)=\left(U_0+\frac{1}{C}\right)d^{-\frac{t}{RC}}。$$

（下转143页）

（2）指导以论文为主的研究生，每年工作量为200小时×人数；

（3） 指导进修教师，每年工作量：70×人数。

13、教学法研究〈包括观摩教学、教研室业务会议、业务接待〉的工作量，每位教师每年100小时，计入教学工作量。

14、经批准兼任党政工作教师的工作量：

（1）系 主 任
总支书记>400——450小时

付系主任、付总支书记350——400小时

（2）教研室主任：300——350小时（高限需经教研组成员评议）

教研室付主任：250——300小时（同上）

（3）系教学秘书：200小时

系实验主任：200小时

（4）系资料室主任　150小时

系科研秘书　150小时

（5）教研室实验主任100小时

（6）10人以上的教学组长100小时

身兼二职的工作量，除按高职务补贴外，低职务也予适当补贴，但所得总补贴工作量不得超过相应的正职的工作量。

以上工作量计入教师工作量，并减少相应的教学工作量。

15、教师从事各项教学法资料（包括指导书、习题卡、设计卡、现场教学指导书及补充讲义、课外科技活动指导材料等）的编写工作，电化教学及其他教具，模型、演示设备、教学用挂图、表及幻灯片的绘制等工作量计入教师工作量。

16、专职和主要从事科研、生产、实验室（实验室建设及准备新实验）等工作量，每学年应有明确的目的和要求及具体的计划，实行上班制，每日以八小时计入教师工作量。

17、对于体弱多病的教师经医生证明，在患病期间可减少部分或全部工作量；老年教师，可根据他们的具体情况，减少部分教师工作量；对于态度不好，不服从安排，完不成教师工作量的教师，应进行批评，以至予以纪律处分。

（上接137页）

参考文献

〔1〕电路原理 下册 江泽佳主编 1980年5月

〔2〕电路分析基础 上册 李瀚荪编 1978年12月

〔3〕线性系统分析 郑钧著 毛培法译 1979年3月

〔4〕现代电路分析导论D·A卡拉汉A·B·麦克尼E·L·麦克马洪著

方孝慈等合译 1980年2月