

# 空间杆系结构的 子空间迭代动力分析和抗震计算

许琪楼

(土建系)

随着结构振动研究和抗震计算的日益深入,寻求一种比较有效的动力分析方法是十分需要的。对于自由度数目很大的空间杆系结构的动力计算,子空间迭代提供了一种有效的计算方法。为此本文着重介绍子空间迭代法的计算原理和它在空间杆系结构抗震计算中的应用。

## 一、概 述

空间杆系结构动力分析较精确的计算简图是采用空间杆系模型,结构质量集中在空间杆系的各个节点上形成空间多质点系。当略去阻尼影响时,结构的动力方程为:

$$[M]\{\ddot{X}\} + [K]\{X\} = 0 \quad (1)$$

式中:  $[M]$  是质量矩阵,  $[K]$  是刚度矩阵,  $\{X\}$  是位移向量。

在线性范围内,结构的动力方程可以变换成特征值问题的标准形式,通过求解特征值及相应的特征向量便可得到结构的自振周期及相应振型。空间杆系结构由于刚度矩阵的阶数很大,而通常我们仅需要计算结构的前几个或前十几个振型,因此空间杆系结构的动力计算实质上就是求解一个大型特征值问题的低阶特征对。解决这类问题目前常采用迭代法,在迭代时根据迭代方式的差异一般有下列三种形式:

**第一: 迭代—滤频法。**每次迭代使用一个迭代向量。当求出第一振型所对应的特征对后,将第一振型从动力方程中消去,即进行滤频。再求第二振型所对应的特征对,再滤频。如此反复多次,便可以得到所需要的前几个特征对。

**第二: 同时迭代法。**同时迭代法是同时使用  $q$  个向量进行迭代。为了保证数值的稳定性,在每次迭代循环时必须对迭代向量进行正交化和正则化处理。

**第三: 子空间迭代法。**子空间迭代法也是同时使用  $q$  个向量进行迭代。在每次迭代循环中它利用瑞利—立兹分析方法,求出特征对的最佳近似值。它不再需要进行正交化和正则化处理,而且收敛速度较快。

子空间迭代的含义是:

考虑特征值问题  $[K]\{\phi\} = \lambda[M]\{\phi\}$ , 设  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  是它的特征值,  $\{\phi_1\}, \{\phi_2\}, \dots, \{\phi_n\}$  是相应的特征向量。这些特征向量都是线性无关的,它们构成了一个  $n$  维的向量空间  $V_n$ 。对应于前  $q$  个最小特征值的特征向量  $\{\phi_1\}, \{\phi_2\}, \dots, \{\phi_q\}$  也构成了一个  $q$  维的子空间  $V_q$ 。我们求解前  $q$  个低阶特征对本质上就是寻找这个包含在  $n$  维空间  $V_n$  之中的子空间  $V_q$ 。为此,子空间迭代法就是首先在  $n$  维空间  $V_n$  之中初选一个  $q$  维子空间

$V_q^1$ , 设  $\{\varphi_1^1\}$ ,  $\{\varphi_2^1 \sim \dots \varphi_q^1\}$  是它的一组基 (称为立兹向量), 以这组基为基础使用瑞利—立兹分析方法在该子空间中找出最佳逼近  $\{\phi_1\}$ ,  $\{\phi_2\} \dots \{\phi_q\}$  的一组向量  $\{\bar{\phi}_1\}$ ,  $\{\bar{\phi}_2\} \dots \{\bar{\phi}_q\}$ 。然后用这组向量通过逆迭代得到一组新基  $\{\varphi_1^2\}$ ,  $\{\varphi_2^2\}$ ,  $\dots$ ,  $\{\varphi_q^2\}$  即重新组成另一个新的子空间  $V_q^2$ 。这样循环往复就可以使  $V_q$  族逐渐趋于  $V_q$ 。

子空间迭代法是逆迭代和瑞利—立兹方法的结合。它的理论基础是瑞利商数和特征值的极值性质。根据极限性质我们便可以在每次迭代循环中得到特征值的最佳近似值。

## 二、特征值的性质和瑞利—立兹方法

### 1、瑞利商数和特征值的极值性质

考虑特征值问题  $[K]\{\phi\} = \lambda[M]\{\phi\}$ , 设  $[K]$  和  $[M]$  均为  $n$  阶正定矩阵, 任意的  $n$  维向量  $\{\phi\}$  的瑞利商数定义为:

$$\rho(\{\phi\}) = \frac{\{\phi\}^T [K] \{\phi\}}{\{\phi\}^T [M] \{\phi\}} \quad (2)$$

瑞利商数  $\rho(\{\phi\})$  有下列性质:

$$\lambda_1 \leq \rho(\{\phi\}) \leq \lambda_n \quad (3)$$

即对于任意的向量  $\{\phi\}$  有:

$$\lambda_1 = \min \rho(\{\phi\}) \quad (4)$$

且当  $\{\phi\} = \{\phi_1\}$  时,  $\rho(\{\phi\})$  取极小值:  $\lambda_1 = \rho(\{\phi_1\})$ 。

现给定一个  $n$  维向量  $\{W\}$ , 对于满足条件  $\{\phi\}^T [M] \{W\} = 0$  的任意向量  $\{\phi\}$ , 计算其瑞利商数  $\rho(\{\phi\})$ , 并取其极小值, 若改变条件向量  $\{W\}$  后, 则又可得另一极小值。当条件向量  $\{W\}$  任意变动时, 这无数个极小值的最大值即为  $\lambda_2$ 。

$$\lambda_2 = \max \left( \min \frac{\{\phi\}^T [K] \{\phi\}}{\{\phi\}^T [M] \{\phi\}} \right) \quad (5)$$

式中  $\{\phi\}$  是满足条件  $\{\phi\}^T [M] \{W\} = 0$  的任意向量, 其中条件向量  $\{W\}$  也是任意的。可以证明当:  $\{W\} = \{\phi_1\}$  时,  $\rho(\{\phi\})$  的极小值为最大。即:

$$\lambda_2 = \min \frac{\{\phi\}^T [K] \{\phi\}}{\{\phi\}^T [M] \{\phi\}} = \min \rho(\{\phi\}) \quad (6)$$

式中  $\{\phi\}$  是满足条件:  $\{\phi\}^T [M] \{\phi_1\} = 0$  的向量。一般来讲, 对于  $\lambda_q$  有:

$$\lambda_q = \max \left( \min \frac{\{\phi\}^T [K] \{\phi\}}{\{\phi\}^T [M] \{\phi\}} \right) \quad (7)$$

式中  $\{\phi\}$  要满足条件:  $\{\phi\}^T [M] \{W_i\} = 0 (i=1, 2, \dots, q-1)$ 。其中的  $\{W_i\}$  是任意向量。如果我们选择  $\{W_i\} = \{\phi_i\}$  时,  $\rho(\{\phi\})$  的极小值为最大。即

$$\lambda_q = \min \frac{\{\phi\}^T [K] \{\phi\}}{\{\phi\}^T [M] \{\phi\}} = \min \rho(\{\phi\}) \quad (8)$$

式中  $\{\phi\}$  要满足约束条件:  $\{\phi\}^T [M] \{\phi_i\} = 0 (i=1, 2, \dots, q-1)$ 。

上述性质就是特征值的极值特性。可见特征值问题  $[K]\{\phi\} = \lambda[M]\{\phi\}$  的特征值  $\lambda_i$  是满足  $(i-1)$  个约束条件的向量  $\{\phi\}$  的瑞利商数的极小值之中的最大值。如果这  $(i-1)$  个约束条件向量  $\{W\}$  正好是特征值问题的前  $(i-1)$  个特征值所对应的特征向量时,  $\lambda_i$  就是向量  $\{\phi\}$  的瑞利商数的极小值。

## 2、瑞利—立兹方法

特征值的极值性质适用于  $[K] \{ \phi \} = \lambda [M] \{ \phi \}$  的  $n$  个特征向量所构成的  $n$  维空间中, 现在我们将此原理引入子空间  $\bar{V}_q$  中。设  $\{ \psi_1 \}, \{ \psi_2 \} \dots \{ \psi_q \}$  是  $\bar{V}_q$  的一组基, 则  $\bar{V}_q$  中的任一向量  $\{ \bar{\phi} \}$  可以表示成:

$$\{ \bar{\phi} \} = \sum_{i=1}^q X_i \{ \psi_i \} \quad (9)$$

向量  $\{ \bar{\phi} \}$  的瑞利商数为:

$$\rho(\{ \bar{\phi} \}) = \frac{\{ \bar{\phi} \}^T [K] \{ \bar{\phi} \}}{\{ \bar{\phi} \}^T [M] \{ \bar{\phi} \}} = \frac{\sum_{j=1}^q \sum_{i=1}^q X_i X_j \tilde{K}_{ij}}{\sum_{j=1}^q \sum_{i=1}^q X_i X_j \tilde{m}_{ij}} = \frac{\bar{K}}{\bar{M}} \quad (10)$$

$$\text{其中: } \tilde{K}_{ij} = \{ \psi_i \}^T [K] \{ \psi_j \} \quad (11)$$

$$\tilde{m}_{ij} = \{ \psi_i \}^T [M] \{ \psi_j \} \quad (12)$$

设  $\{ \bar{\phi} \} = \{ \bar{\phi}_1 \}$  时, 向量  $\{ \bar{\phi} \}$  的瑞利商数  $\rho(\{ \bar{\phi} \})$  取极小值  $\rho_1$ , 即

$$\rho_1 = \min \rho(\{ \bar{\phi} \}) = \rho(\{ \bar{\phi}_1 \}) \quad (13)$$

类似特征值极值原理, 设:

$$\rho_2 = \min \rho(\{ \bar{\phi} \}) = \rho(\{ \bar{\phi}_2 \}) \quad (14)$$

式中: 向量  $\{ \bar{\phi} \}$  要满足约束条件  $\{ \bar{\phi} \}^T [M] \{ \bar{\phi}_1 \} = 0$  且  $\{ \bar{\phi} \} = \{ \bar{\phi}_2 \}$  时取极小值。显然  $\{ \bar{\phi}_2 \}^T [M] \{ \bar{\phi}_1 \} = 0$ 。

$$\rho_q = \min \rho(\{ \bar{\phi} \}) = \rho(\{ \bar{\phi}_q \}) \quad (15)$$

式中: 向量  $\{ \bar{\phi} \}$  要满足约束条件  $\{ \bar{\phi} \}^T [M] \{ \bar{\phi}_i \} = 0 (i=1, 2 \dots q-1)$ , 且  $\{ \bar{\phi} \} = \{ \bar{\phi}_q \}$  时取极小值。显然  $\{ \bar{\phi}_q \}$  与约束条件向量分别正交。

因为子空间  $\bar{V}_q$  是包含在  $n$  维空间  $V_n$  之中, 数学上可以证明  $\rho_1 > \lambda_1, \rho_2 > \rho_2 \dots \rho_q > \lambda_q$  随着子空间族  $\bar{V}_q$  逐渐趋于  $V_n$ , 而使  $\rho_1 \rightarrow \lambda_1, \rho_2 \rightarrow \lambda_2 \dots \rho_q \rightarrow \lambda_q$ 。可见  $\rho_1, \rho_2 \dots \rho_q$  及其对应的  $\{ \bar{\phi}_1 \}, \{ \bar{\phi}_2 \} \dots \{ \bar{\phi}_q \}$ 。是最佳逼近  $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_q$  及相应的  $\{ \bar{\phi}_1 \}, \{ \bar{\phi}_2 \}, \dots \{ \bar{\phi}_q \}$ 。而求  $\rho_1, \rho_2 \dots \rho_q$  和相应  $\{ \bar{\phi}_1 \}, \{ \bar{\phi}_2 \} \dots \{ \bar{\phi}_q \}$  的方法是求  $\rho(\{ \bar{\phi} \})$  的极小值。极小值的必要条件是:

$$\frac{\partial \rho(\{ \bar{\phi} \})}{\partial X_i} = 0, (i=1, 2 \dots q) \quad (16)$$

将(10)式代入整理后得:

$$\sum_{j=1}^q X_j (\tilde{K}_{ij} - \rho \tilde{m}_{ij}) = 0 (i=1, 2 \dots q) \quad (17)$$

把这  $q$  个方程写成矩阵形式, 便得到一个新的特征值问题:

$$[\tilde{K}] \{ X \} = \rho [\tilde{M}] \{ X \} \quad (18)$$

式中:  $[\tilde{K}]$ ,  $[\tilde{M}]$  是  $q \times q$  阶矩阵, 其元素可以由(11)、(12)式分别求得。解之可求出

$q$ 个特征值 $\rho_1, \rho_2 \cdots \rho_q$ 和相应的特征向量 $\{X_1\}, \{X_2\} \cdots \{X_q\}$ 。代入(9)式后便可得到最佳逼近 $\{\bar{\phi}_i\} (i=1, 2 \cdots q)$ 的向量 $\{\bar{\phi}_i\} (i=1, 2 \cdots q)$ 。

$$\{\bar{\phi}_i\} = \sum_{j=1}^q X_j^i \{\psi_j\} \quad (i=1, 2 \cdots q) \quad (19)$$

式中 $X_j^i$ 是表示特征向量 $\{X_j\}$ 中的第 $j$ 个元素。可见瑞利—立兹分析就是在子空间 $\bar{V}_q$ 中求向量 $\{\bar{\phi}\}$ 的瑞利商数的极小值。

### 三、子空间迭代法

#### 1、基本方法:

子空间迭代法是按下列五式循环迭代,直至所需要的精确度:

$$[K] [\bar{X}_{K+1}] = [M] [X_K] \quad (20)$$

$$[K_{K+1}] = [\bar{X}_{K+1}]^T [K] [\bar{X}_{K+1}] \quad (21)$$

$$[M_{K+1}] = [\bar{X}_{K+1}]^T [M] [\bar{X}_{K+1}] \quad (22)$$

$$[K_{K+1}] [Q_{K+1}] = [M_{K+1}] [Q_{K+1}] [\wedge_{K+1}] \quad (23)$$

$$[X_{K+1}] = [\bar{X}_{K+1}] [Q_{K+1}] \quad (24)$$

随着下标 $K \rightarrow \infty$ ,由 $[\wedge_{K+1}]$ 和 $[X_{K+1}]$ 便可得到前 $q$ 个低阶特征对。式(20)实质上就是逆迭代,式(21), (22), (23), (24)是瑞利—立兹方法,它们分别是式(11), (12), (18) (19)的矩阵表达式。

子空间迭代法是求解大型特征值问题低阶特征对的一种有效方法。在迭代时, $q$ 个迭代向量是作为一个子空间整体参加运算的。由于使用瑞利—立兹方法,正交化的条件得到满足,从而保证了数值的稳定性。再之因每次迭代都是求特征向量的最佳近似值,所以收敛速度较快。特别是当初始迭代向量恰好是寻求的特征向量的线性组合时,仅需要一次迭代便可收敛。子空间迭代法的方便还在于:确定一个趋于 $V_q$ 的初始子空间比寻找 $q$ 个分别趋于不同的特征向量的初始迭代向量更容易一些。子空间迭代法的迭代次数是取决于初始子空间 $\bar{V}_q$ 与由特征量 $\{\phi_1\}, \{\phi_2\} \cdots \{\phi_q\}$ 所构成的子空间 $V_q$ 的接近程度,而不取决于每个初始向量是否接近各自所趋向的特征向量。

#### 2、子空间迭代法的具体步骤

##### (1) 确定初始迭代向量。

当需要计算前 $P$ 个低阶特征对时,为了加快收敛速度,常使用 $q$ 个迭代向量。 $q = \min \{2p, p+8\}$ 。根据经验这 $q$ 个初始迭代向量可按以下方法确定:设 $[M] [X_1] = [Y_1]$ , 矩阵 $[Y_1]$ 中第一列元素是质量矩阵 $[M]$ 中的对角线元素。其余各列均是单位向量 $\{e\}$ , 单位向量 $\{e\}$ 中数“1”所在的位置是依次对应于比值 $K_{1j}/M_{1j}$ 最小的行数。另外为使初始迭代向量的数值大致处于同一数量级水平,还需对质量矩阵 $[M]$ 中的元素的大小进行适当调整。

##### (2) 进行具体迭代运算。

为了节省计算机内存,程序中是根据下列各式进行迭代的:

$$[K] [\bar{X}_{k+1}] = [y_k] \quad (25)$$

$$[K_{k+1}] = [\bar{X}_{k+1}]^T [y_k] \quad (26)$$

$$[\bar{y}_{k+1}] = [M] [\bar{X}_{k+1}] \quad (27)$$

$$[M_{k+1}] = [\bar{X}_{k+1}]^T [\bar{y}_{k+1}] \quad (28)$$

$$[K_{k+1}] [Q_{k+1}] = [M_{k+1}] [Q_{k+1}] [\lambda_{k+1}] \quad (29)$$

$$[y_{k+1}] = [\bar{y}_{k+1}] [Q_{k+1}] \quad (30)$$

且当满足条件:

$$\frac{|\lambda_i^{k+1} - \lambda_i^k|}{\lambda_i^{k+1}} \leq 10^{-5} \quad (i=1, 2, \dots, p) \quad (31)$$

即表示迭代收敛。在子空间迭代中,  $q$  个向量参加迭代运算, 但在检查收敛时, 仅对我们需要的前  $p$  个最小特征值进行检查。

(3) 迭代收敛后, 利用 STURM 序列性质即特征值分离性质校核所求出的  $P$  个特征对正是我们所需的前  $P$  个低阶特征对。由特征值的分离性质我们可以推出: 考虑特征值问题  $[K] \{\phi\} = \lambda [M] \{\phi\}$ , 当矩阵  $[K - \mu M]$  分解为  $[L] [D] [L]^T$  乘积形式时 (其中  $[L]$  是对角线元素为 1 的下三角矩阵,  $[D]$  是对角矩阵) 则在矩阵  $[D]$  中负元素的数目等于“小于  $\mu$  的特征值数目”。为此, 我们取  $\mu$  值略大于  $\lambda_p$ , 并将矩阵  $[K - \mu M]$  分解成  $[L] [D] [L]^T$  的形式, 检查矩阵  $[D]$  中负元素数目是否等于  $P$  值。在实际运算中, 由于我们求得特征值是一个近似值, 与精确值有一定的误差。为了确定一个合适的  $\mu$  值, 可以用下式来估计精确值的范围。

$$0.99\lambda_i^{(l+1)} < \lambda_i < 1.01\lambda_i^{(l+1)} \quad (32)$$

式中:  $l$  表示最后一次迭代

### 3. 广义雅可比法

在子空间迭代循环中, 式 (29) 又是一个特征值问题, 其刚度矩阵  $[K_{k+1}]$  和质量矩阵  $[M_{k+1}]$  是  $q \times q$  阶, 但  $[M_{k+1}]$  不是对角阵而是个满阵。要全部求出它的  $q$  个特征对可以通过变换的办法将其转换成标准的特征值问题, 使用雅可比法。但是在下面程序中没有进行这种变换, 而是通过同时对  $[K_{k+1}]$  和  $[M_{k+1}]$  进行对角化运算来解决。这种方法称为广义雅可比法, 其计算原理如下:

考虑特征值问题  $[K] \{\phi\} = \lambda [M] \{\phi\}$ , 其中  $[M]$  为一满阵。设  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q$  是其特征值,  $\{\bar{\phi}_1\}, \{\bar{\phi}_2\}, \dots, \{\bar{\phi}_q\}$  是相应的未对  $[M]$  归一化的特征向量,  $\{\phi_1\}, \{\phi_2\}, \dots, \{\phi_q\}$  是相应的对  $[M]$  归一化的特征向量。设特征值矩阵为  $[\Lambda]$ , 模态矩阵为:

$$[\bar{\phi}] = [\{\bar{\phi}_1\} \{\bar{\phi}_2\} \dots \{\bar{\phi}_q\}] \quad (33)$$

$$[\phi] = [\{\phi_1\} \{\phi_2\} \dots \{\phi_q\}] \quad (34)$$

由特征值, 特征向量性质:

$$[\bar{\phi}]^T [K] [\bar{\phi}] = [K_p] \quad (35)$$

$$[\bar{\phi}]^T [K] [\bar{\phi}] = [M_p] \quad (36)$$

$$[\bar{\phi}]^T [K] [\bar{\phi}] = [\Lambda] \quad (37)$$

$$[\bar{\phi}]^T [M] [\bar{\phi}] = [I] \quad (38)$$

式中:  $[K_p]$ 、 $[M_p]$  为  $q$  阶的对称矩阵, 分别称为主刚度矩阵和主质量矩阵。

因为  $[K][\bar{\phi}] = [M][\bar{\phi}][\Lambda]$ , 用  $[\bar{\phi}]^T$  左乘方程式两端并应用关系式 (35), (36) 得到:

$$[K_p] = [M_p][\Lambda] \quad (39)$$

由式 (39) 可得:

$$\lambda_i = K_{p,i}/M_{p,i} \quad (i=1, 2, \dots, q) \quad (40)$$

现令  $\{\phi_i\} = \{\bar{\phi}_i\}/C_i$  ( $i=1, 2, \dots, q$ ), 即有  $\{\bar{\phi}_i\} = C_i \{\phi_i\}$ , 代入 (36) 式得

$$C_i^2 \{\phi_i\}^T [M] \{\phi_i\} = M_{p,i} \quad (i=1, 2, \dots, q) \quad (41)$$

由 (38) 式可知:  $\{\phi_i\}^T [M] \{\phi_i\} = 1$ 。所以:

$$C_i^2 = M_{p,i}, \quad \{\phi_i\} = \{\bar{\phi}_i\}/\sqrt{M_{p,i}} \quad (i=1, 2, \dots, q) \quad (42)$$

广义雅可比法就是同时对  $[K]$  和  $[M]$  进行对角化处理, 首先得到主刚度矩阵  $[K_p]$  和主质量矩阵  $[M_p]$  以及模态矩阵  $[\bar{\phi}]$ 。然后由式 (40), (42) 即可求出特征值  $\lambda_i$  和相应的特征向量  $\{\phi_i\}$ 。

广义雅可比法的具体步骤基本上与标准特征值问题的“过关”雅可比法相同。矩阵  $[K]$  和  $[M]$  同时对角化处理的方法详见参考文献 (一)。

#### 4. 迭代技巧

子空间迭代法的迭代循环是一系列的矩阵运算, 对于空间杆系结构, 其刚度矩阵的阶数很大, 因此必须设法节省计算机内存:

(1) 利用刚度矩阵的对称性和稀疏性, 仅将刚度矩阵中的有效元素存储在一维数组  $\{A\}$  中, 并用数组  $\{MAXA\}$  记下刚度矩阵中对角线元素  $K_{ii}$  在数组  $\{A\}$  中地址。即使用变带存储法。存储方式见下图所示:

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11} & & & & \\ K_{21} & K_{22} & & & \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & & \\ 0 & 0 & K_{43} & K_{44} & \\ 0 & K_{52} & 0 & 0 & K_{55} \end{bmatrix}$$

$$\{A\} = \begin{bmatrix} A(1) & & & & \\ A(3) & A(2) & & & \\ A(6) & A(5) & A(4) & & \\ & & A(8) & A(7) & \\ & A(12) & A(11) & A(10) & A(9) \end{bmatrix} \quad \{MAXA\} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 7 \\ 9 \\ 13 \end{bmatrix}$$

显然对质量矩阵  $[M]$  仅需存储其对角元素。

另外为减小刚度矩阵的阶数, 刚度矩阵不包括位移为 0 的结点所对应的位移分量。刚度矩阵集成之后仅对某些特殊约束才引入支承条件。同样, 对刚度矩阵  $[K]$  和质量矩阵  $[M]$  在子空

(2) 刚度矩阵在参加迭代前首先分解为  $[K] = [L][D][L]^T$  的形式, 分解后的  $[L]$  和  $[D]$  中的有效元素使用刚度矩阵  $[K]$  的存贮地址。这样由式 (25) 的逆迭代得:

在迭代循环时,为避免出现一些不必要的中间矩阵占用宝贵的内存,程序中使用了一个工作向量  $\{T\}$ 。用该向量为媒介,我们可以使矩阵  $\{Y_k\}$  和  $\{\bar{X}_{k+1}\}$  使用同一存储地址。同时也避免直接求出逆阵  $[L]^{-1}$ 、 $[D]^{-1}$ 、 $[L^T]^{-1}$ ,而让它们直接利用矩阵  $[L]$  和  $[D]$  的元素参加 (43) 式的运算。同样,我们也可以用该工作向量使矩阵  $\{\bar{X}_{k+1}\}$ 、 $\{\bar{Y}_{k+1}\}$ 、 $\{Y_{k+1}\}$  使用同一存储地址。大大节省了内存。

具体迭代分框图:

```

graph TD
    Start([E=0, ICONV=0]) --> Eplus[E=E+1]
    Eplus --> Loop{列码丁由1~NC循环}
    Loop --> Load[将矩阵[L]中丁列量调入工作向量{T}中]
    Load --> Loop
    Loop --> Next[ ]
  
```

设刚度矩阵  $[K]$  和质量矩阵  $[M]$  为已知, NC 代表迭代向量个数, E 表示迭代次数, NSMAX1 代表允许最大迭代次数,  $ICONV > 0$  是进行最后一次迭代的标志、子空间迭代法的总框图和进行具体迭代时的分框图如下, 其余步骤和过程的分框图略。

```

graph TD
    A[开始] --> B[输入基本数据]
    B --> C[形成初始迭代向量  
并记入矩阵[R]中]
    C --> D[分解刚度矩阵]
    D --> E[过程: DECOMP, 刚度矩阵分解]
    D --> F[过程: REDBAN, 求逆矩阵]
    E --> G[具体迭代, 输出结果]
    F --> G
    G --> H[误差计算]
    H --> I[过程: MULE, 矩阵与向量相乘]
    I --> H
    H --> J[STURM序列检查]
    J --> K[过程: SCHECK, 求从值]
    K --> J
    J --> L[结束]

```

```

graph TD
    Start([E=0, ICONV=0]) --> Eplus[E=E+1]
    Eplus --> Loop1{列码丁由1~NC循环}
    Loop1 --> Read[将矩阵[R]中丁列向量调入工作向量{rr}中]
    Read --> Redbak[调用REDBAK过程,即按式(26)求{Xrr}中相应向量]
    Redbak --> CalcL[按式(26)计算{Lrr}中上三角部分元素,记入数组{AR}]
    CalcL --> WriteR[将矩阵{Xrr}中列向量记入{R}中]
    WriteR --> Loop2{列码丁由1~NC循环}
    Loop2 --> CalcR[相应{R}中丁列向量按式(27)计算{Zrr}相应向量]
    CalcR --> CalcM[按式(28)计算{Mrr}中上三角元素,记入数组{BR}]
    CalcM --> Iconv1{ICONV>0?}
    Iconv1 -- 是 --> WriteL[将{Zrr}中列向量记入矩阵{L}中]
    Iconv1 -- 否 --> Call[调用广义雅可比过程]
    Call --> Sort[将特征值按顺序排列]
    Sort --> Iconv2{ICONV>0?}
    Iconv2 -- 是 --> Calc24[按式(24)计算]
    Iconv2 -- 否 --> Calc23[按式(23)计算]
    Calc23 --> Cond1{满足(23)收敛条件?}
    Cond1 -- 是 --> Iconv3[ICONV=1]
    Cond1 -- 否 --> Emax{E<N*MAX1?}
    Emax -- 是 --> WriteD[将特征值记入{D}中]
    Emax -- 否 --> Iconv4[ICONV=2]
    Calc24 --> WriteD
    WriteD --> Print[打印结果]
    Iconv3 --> Print
    Iconv4 --> Print

```

## 四、空间杆系结构抗震计算及相应程序

为对一般的空间杆系结构进行动力分析和抗震计算,编制了“空间杆系结构抗震计算程序”。程序中,结构的动力分析采用子空间迭代法,结构抗震计算采用通常的反应谱理论进行:即首先求出结构的振型和频率,应用单质点反应谱计算出对应于各振型的节点地震荷载、地震位移以及各杆件的地震内力,然后根据平方和开平方的方法求出各振型的组合内力。反应谱理论的抗震分析很多资料都有详细论述,本文仅介绍有关程序的几个问题。

1、本程序适用于具有刚性节点,铰接节点,以及混合联接节点的空间杆系结构。对于带有刚性节点的杆件单元要求相互正交,即要求它们沿整体坐标轴方向布置。两端铰接的单元杆件方向可以任意。因此当板墙等构件用当量代换的方法换为杆件时,本程序可以适用于计算单层厂房、框架、网架、塔架等空间结构。

2、本程序可以计算空间杆系结构的动力特征(振型、频率),可以计算在任意地震力作用下地震位移和杆件地震内力。也可以进行空间杆系结构在节点荷载下的静力计算。同时,也适用于平面杆系结构动力、静力计算。

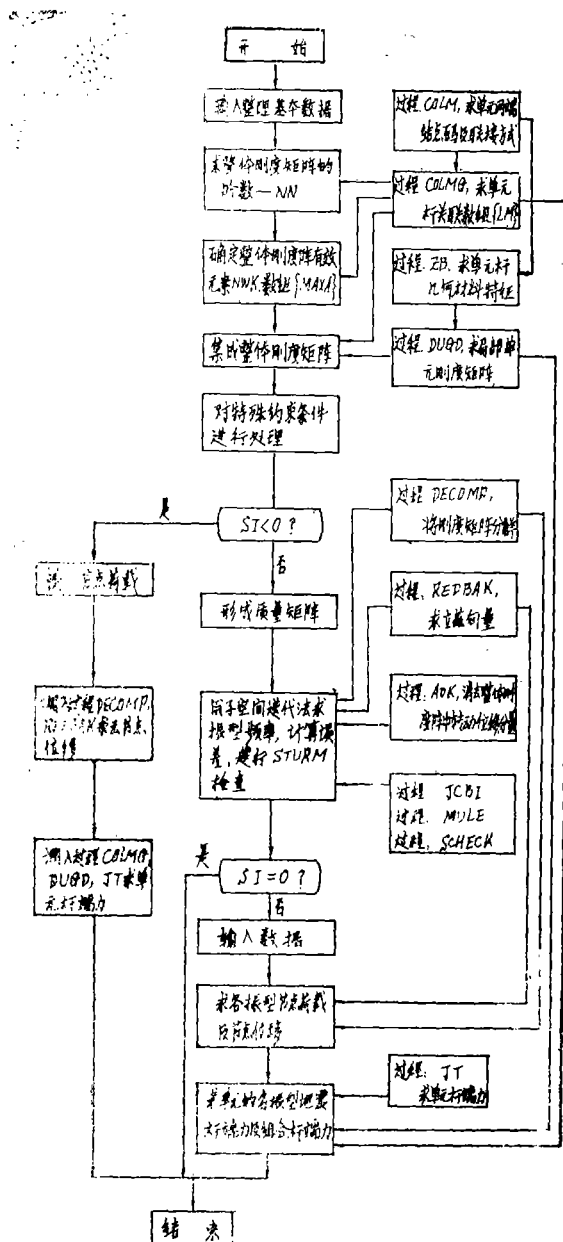
3、程序中使用杆件单元,共考虑了两端铰接,左铰右刚,左刚右铰、及两端刚接四类单元杆。局部座标下的单元刚度阵考虑了杆件的轴向变形,弯曲变形及剪切变形。为了节省内存,利用其对称性,将局部座标下的单元刚度阵上三角元素存贮在一维数组{KE}中。为此单元刚度阵的座标变换及整体刚度集成采用了新的方法。

4.整体刚度采用了变带存贮法将整体刚度矩阵中的有效元素存贮在一维数组A〔1: NWK〕中,并用数组MAXA〔1: NNM〕记下整体刚度矩阵中对角线元素在数组{A}中的地址,(其中NNM=NN+1)。因此在集成整体刚度以前,还必须确定整体刚度矩阵的阶数NN,计算整体刚度阵中有效元素个数NWK,以及确定数组{MAXA}的全部元素。程序中用单元关联数组{LM}来表示单元杆两端在整体座标下的位移分量与整体刚度矩阵中行和列的对应关系。单元杆参加整体刚度矩阵的集成就是根据{LM}进行迭加的。

5.空间杆系结构的抗震分析是按空间多质点系进行的。当略去质点的转动惯量时,每个质点有X、Y、Z三个方向的线位移。因此在进行动力计算之前,必须对整体刚度矩阵进行处理,只保留整体刚度矩阵中与线位移相应的行和列,与转动位移相应的行和列均要消去。

6.程序总框图:设SI=0时表示仅要求计算结构的振型和频率,SI>0时则SI表示计算地震力的组数;SI<0时则SI绝对值表示静力荷载的组数。





## 7. 计算实例

实例一：某一四边形钢塔结构，塔高 65m，塔身对一轴对称，对另一轴不对称。塔架正面桁架和侧面桁架的形式如下图所示：

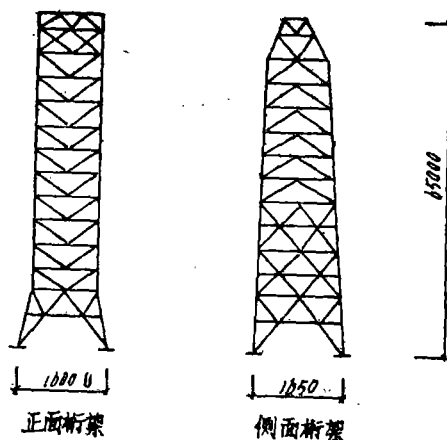


图1

在塔架原型结构上，用激振法和脉动法进行了动力特征的测定。并用“空间杆系结构抗震计算程序”进行动力计算。塔架结构的空间杆系模型共有108个节点，324个自由度，357个杆件单元。在TQ—16机上共用40分钟求出结构的前9个振型，其中有东西振型3个，南北振型3个，扭转振型2个，垂直振型1个。计算和实测结果见下表。

振动方向	方 式	周 期 (秒)		
		第一振型	第二振型	第三振型
南 北 向	激 振	0.77	0.31	0.18
	脉 动	0.75	0.30	
	计 算	0.91	0.36	0.20
东 西 向	激 振	1.02	0.30	0.17
	脉 动	1.0	0.30	
	计 算	1.13	0.37	0.20
扭 转	激 振	0.4	0.19	
	计 算	0.6	0.24	

实例二：二幢内框架试验房屋：一幢为未加固的内框架房屋（称1号房屋），三层，单排柱、四开间；另一幢为加固的内框架房屋（称2号房屋），与1号房屋同样做法，但进行了加固。加固措施为外加壁柱（构造柱），圈梁及包角柱。1号房屋简图如下：（2号房屋略）

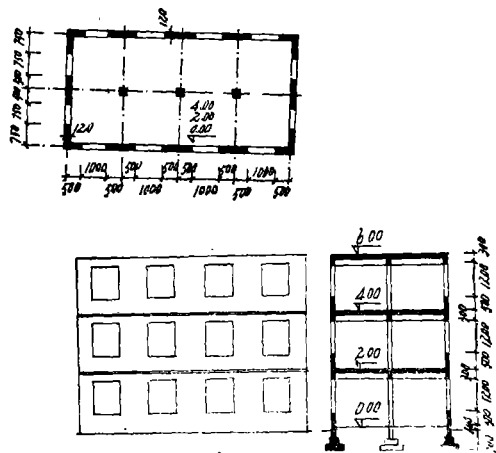


图2 第1号房屋简图

用爆破形成人工地震波的方法对房屋进行了试验。第一次用TNT炸药18.5T，爆心距屋182米；第二次用炸药500T，距离152米。在第一次爆炸之前，对两幢房屋进行了脉动量测，在第一次爆炸时及爆炸后也实测了房屋的振动周期。同时结构按空间体系用子空间迭代法进行了动力计算，各种结果列表如下：

房屋自振周期比较（横向）

房屋 结构 状态	振型	1 号 房 屋		2 号 房 屋	
		第一振型	第二振型	第一振型	第二振型
第一次爆炸前		0.14	0.048	0.12	0.039
第一次爆炸时		0.16		0.15	0.060
第一次爆炸后		0.15	0.052	0.13	0.046
计 算 值		0.17	0.074	0.12	0.052

# 气液垂直上升管流中弹状流向泡沫流的转变

朱士亮 陈明浚

(化工系)

## 提 要

本文讨论了垂直管内气液两相向上流动时弹状流—泡沫流转变关系的研研概况。从工业实用的角度,对空气—水系统的流型转变提出一个简单的关系式,并分析了各种因素对流型转变的影响。

气液两相在垂直管内向上流动时,随着气液流率、气液物性和装置条件的不同,会出现各种不同的流型,如气泡流、弹状流、泡沫流和环雾流等。对于不同的流型,两相流的流体力学、传热和传质规律也不同。因此,研究两相流的流型及其转变就成为两相流研究领域内一个十分重要的问题。

由于两相流现象的复杂性,迄今对流型转变机理的研究还很不成熟,大多采用经验关联的方法来区分流型。适用于任意系统的通用流型图一直是各国研究者和工程技术人员所共同关心的问题。即使对同一对流型之间的转变关系,各研究者的观察结果和关联式也往往有很大差异,有的甚至是矛盾的。〔6〕

考虑到气液两相流在工业生产中的广泛应用,特别是在石油、化工生产中一些很重要的设计参数,如两相流的阻力、传热系数和传质系数等常常与流型密切相关。因此,从工程应用的角度考虑,若能在现有理论分析和经验研究的基础上,对每一对具体的流型转变关系,

---

由上二例可见:空间杆系模型是结构动力计算较精确的计算简图,空间杆系结构子空间迭代的动力分析和抗震计算可以作为工程抗震设计和研究的有力工具。

## 参 考 文 献

- 〔1〕K.J.Bathe, E.L.Wilson:  
Numerical methods in finite element analysis 1976
- 〔2〕威格尔:地震工程学 1978
- 〔3〕铁摩辛柯:工程中的振动问题 1978
- 〔4〕冶研院:空间杆系结构抗震计算 1978
- 〔5〕工业与民用建筑抗震设计规范 TJ11—78
- 〔6〕清华大学土环系:  
四边形塔架结构动力分析 1979  
内框架房屋的地震破坏分析与抗震加固  
——爆炸地震对房屋影响的试验研究—— 1981