再论二项式$(1+x)^m$级数

侯双印

（数学教研室）

提　　要

本文对下面两个结果都给出最简明的证法。

（一）二项式（1+x）级数

$$1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+\cdots \qquad (1)$$

（$m\neq0$，1，2，……）在$|x|=1$处的敛散性。

（二）当$x=1$且$m>-1$时，级数(1)的和为$(1+1)^m=2^m$；当$x=-1$且$m>0$时，级数（1）的和为$(1-1)^m=0$。

一　级数（1）在$|X|=1$处的敛散性

我们知道$f(x)=(1+x)^m$的泰乐级数为：

$$1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+\cdots \qquad (1)$$

其中$m\neq0$，1，2，…。

令　$a_n=\dfrac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}$，则由

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{m-n}\right|=1$$

知级数（1）当$|x|<1$时收敛；当$|x|>1$时级数（1）发散。此外又知

$$f(x)=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+\cdots(|x|<1)。(*)$$

当$|x|=1$时，级数（1）的敛散情况见下表：

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$x=1$	$m>0$	绝对收敛
	$0>m>-1$	条件收敛
	$m\leqslant -1$	发　　散
$x=-1$	$m>0$	绝对收敛
	$m<0$	发　　散

在〔1〕中此表是作为高斯超越几何级数特殊情况而得来的，在〔2〕中是由交错级数的一个定理而得来的。下面给出一个比〔1〕、〔2〕中的证法更简明的证法。为此分两种情形进行讨论：

Ⅰ、当$x=-1$ 时，级数（1）变为：

$$1-m+\frac{m(m-1)}{2!}+\cdots+(-1)^n\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}+\cdots \qquad (2)$$

当给定m时，级数（2）从某一项开始以后为同号级数，所以由

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}-1\right)=1+m \qquad (3)$$

知级数（2）当$m>0$时绝对收敛；当$m<0$时级数（2）发散。

Ⅱ、当$x=1$时，级数（1）变为：

$$1+m+\frac{m(m-1)}{2!}+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}+\cdots \qquad (4)$$

当给定m时，级数（4）从某一项开始以后为交错级数。下面对m的值分三种情形进行讨论：

1° 当$m>0$时，由（3）式知级数（4）绝对收敛。

2° 当$-1<m<0$时

$$\because\quad \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=\left|\frac{n+1}{m-n}\right|>1$$

$$\therefore\quad |a_n|>|a_{n+1}| \qquad (5)$$

又因$0<1+m<1$，所以对给定的m，存在自然数k_0使$k_0(1+m)>1$。

而 $$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{|a_n^{k_0}|}{|a_{n+1}^{k_0}|}-1\right)=\lim_{n\to\infty} n\frac{(n+1)^{k_0}-(n-m)^{k_0}}{(n-m)^{k_0}}$$

$$=k_0+k_0m=k_0(1+m)$$

$$\therefore \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{k_0}\text{收敛}$$

故 $$\lim_{n\to\infty} a_n^{k_0}=0$$

从而可知 $$\lim_{n\to\infty} a_n=0 \qquad (6)$$

由（5）式及（6）式知级数（4）收敛，又由（3）式知此收敛为条件收敛。

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

3° 当$m\leqslant -1$时，$\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=\left|\frac{n+1}{m-n}\right|\leqslant 1$，所以当$n\to\infty$时，$a_n \nrightarrow 0$。故当$m\leqslant -1$时，级数（4）发散。

由Ⅰ与Ⅱ中所述即得二项式级数在$|x|=1$处的上述敛散情况表。

二　级数（1）在$|x|=1$处的和

我们知道一个函数的泰乐级数收敛时，不一定收敛到函数本 身。当（*）式右端级数于$x=\pm 1$收敛时，其和等于$f(\pm 1)$。在〔1〕中是用亚伯尔定理证明的，在〔2〕中是利用函数可展性的充要条件证明的。我们现在仍利用函数可展性的充要条件来证明其结果。

先证（i）　当$m>-1$（$m\neq 0, 1, 2, \cdots$）时，

$$2^m=1+m+\frac{m(m-1)}{2!}+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}+\cdots$$

在拉格朗日余项

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}\quad(0<\theta<1)$$

中，令$x=1$得

$$R_n(1)=\frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}=\frac{m(m-1)\cdots(m-n)}{(n+1)!}\;\frac{1}{(1+\theta)^{n+1-m}}$$

由级数（4）收敛知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{m(m-1)\cdots(m-n)}{(n+1)!}=0$$

故$\lim\limits_{n\to\infty}R_n(1)=0$

次证（ii）　当$m>0$（$m\neq 1, 2, \cdots$）时，

$$(1-1)^m=1-m+\frac{m(m-1)}{2!}+\cdots+(-1)^n\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}+\cdots$$

在洛希及施辽密赫余项

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\theta)}{n!\,P}(1-\theta)^{n+1-p}x^{n+1}\quad(0<\theta<1, P>0)$$

中，令$x=-1$　得

$$R_n(-1)=(-1)^{n+1}\frac{m(m-1)\cdots(m-n)}{n!\,P}(1-\theta)^{n+1-p}\;\frac{1}{(1-\theta)^{n+1-m}}$$

取$P=m$，得到

$$R_n(-1)=(-1)^{n+1}\frac{m(m-1)\cdots(m-n)}{n!\,m}$$

因$m>0$，所以对给定的m，存在自然数k_1使$k_1m>1$。

而　$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{|[R_n(-1)]^{k_1}|}{|[R_{n+1}(-1)]^{k_1}|}-1\right)=\lim_{n\to\infty}n\left(\left|\frac{n+1}{m-n-1}\right|^{k_1}-1\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}n\frac{(n+1)^{k_1}-(n+1-m)^{k_1}}{(n+1-m)^{k_1}}=k_1m$$

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

变截面及等截面框架通用程序

黄振国

（土建系）

提　　要

本文导出了楔形变截面杆的刚度矩阵。并根据有限元位移法原理，采用扩展BASIC语言编制了可计算带有楔形变截面杆的钢筋混凝土框架计算程序。该程序可计算具有任何几何形式和支承方式的框架。在计算机上输出：①各结点线位移及转角，②各杆端内力（N、Q、M），③梁、柱截面配筋。

该程序已用于实际工程设计中。

一、简　　介

在工程实际中常遇到一些变截面杆件，如门式刚架的梁和柱均为变截面杆，其截面高度按直线变化，而带加腋梁的框架和连续梁均带有楔形变截面杆。在很多情况下，采用变截面杆则为了适应内力分布需要。如在弯矩和剪力较大的截面上增加截面高度，可减少钢筋用量，增加抗剪能力等。同时也使结点处钢筋的布置比较方便。为了解决这类工程结构的计算，编制了带楔形直杆的钢筋混凝土框架通用程序。本程序是在DJS—130机上用BASIC语言编制成的。

该程序已用于某大学物理楼及某些多层多跨工业厂房，带楔形变截面梁的框架设计中。实践证明：采用该程序计算速度快，精确可靠，使用简便。

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}[R_n(-1)]^{k_1}$收敛

故$\lim_{n\to\infty}[R_n(-1)]^{k_1}=0$

从而可知$\lim_{n\to\infty}R_n(-1)=0$

由（i）与（ii）我们得到下面的结论：

当等式（*）右端的级数在$|x|=1$处收敛时，等式（*）也成立。

参　考　文　献

〔1〕Г.М. 菲赫金哥尔茨著：微积分学教程，一卷一分册，二卷二分册。

〔2〕侯双印，二项式$(1+x)^m$级数，郑州大学学报，（1963）NO.2，5.

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net