关于Lebesgue积分中几个定理的简明证法

侯双印

（数学教研室）

提　　要

设E是n维空间中的可测点集，即 $0\leqslant mE\leqslant+\infty$。本文对Lebesgue积分中几个积分性质（E上的可积函数的和也是E上的可积函数，且和的积分等于积分的和；E上的可积函数乘以常数也是E上的可积函数，且常数可以提到积分符号之外等等）都给出了既简明又严格的证明。

本文所用的实变函数论中的术语及符号均与〔1〕中相同。

为了给出Lebesgue积分中几个定理的既简单又易接受的证明，先证下面的引理：

引理一　设

1)　$mE<+\infty$，

2)　$\psi(x)$为E上的非负可测函数，

3)　$\varphi(x)$为E上的非负可积函数，

4)　$0\leqslant\psi(x)\leqslant\varphi(x)$　P·P·于E，

则　$\psi(x)$为E上的可积函数，且

$$\int_E\psi(x)dx\leqslant\int_E\varphi(x)dx$$

【证明】　因为在测度为零的集合上任何函数都是可积函数，且积分为零。所以不妨假定

$$\psi(x)\leqslant\varphi(x)\qquad(X\in E)。$$

由条件1）及2）知

$$\int_E\psi(x)dx=mG(E;\psi)。$$

由条件1）及3）知

$$\int_E\varphi(x)dx=mG(E;\varphi)<+\infty。$$

由条件4)　知

$$G(E;\psi\subseteq G(E;\varphi)$$

故　$mG(E;\psi)\leqslant mG(E;\varphi)<+\infty$，

即　$\psi(x)$为E上的可积函数，且

$$\int_E\psi(x)dx\leqslant\int_F\varphi(x)dx。$$

定理一 设

1） $mE<+\infty$

2） $f(x)$，$g(x)$都是E上的可积函数，

则 $f(x)+g(x)$也是E上的可积函数，且

$$\int_E [f(x)+g(x)]\,dx=\int_E f(x)dx+\int_E g(x)dx$$

【证明】由条件1)及2)知

$$mE[x;|f(x)|=+\infty]=mE[x;|g(x)|=+\infty]=0。$$

因在一个测度为零的集合上改变函数值，既不影响函数的可积性也不影响它的积分值，所以不妨假定

$$|f(x)|<+\infty,\ |g(x)|<+\infty\quad (X\in E)。$$

1° 当$f(x)\geqslant 0$，$g(x)\geqslant 0$时

∵ $f(x)$，$g(x)$为E上的非负可积函数，

∴ $f(x)$，$g(x)$为E上的非负可测函数，

故 $f(x)+g(x)$在E上也非负可测；

于是 $\{f(x)+g(x)\}_n$，$\{f(x)+g(x)\}_{2n}$在E上均为有界可测函数。

又 $mE<+\infty$

∴ $\{f(x)+g(x)\}_n$，$\{f(x)+g(x)\}_{2n}$在E上均为有界可积函数。

而 $\{f(x)+g(x)\}_n\leqslant\{f(x)\}_n+\{g(x)\}_n\leqslant\{f(x)+g(x)\}_{2n}$

∴ $$\int_E\{f(x)+g(x)\}_n dx\leqslant\int_E\{f(x)\}_n dx+\int_E\{g(x)\}_n dx$$
$$\leqslant\int_E\{f(x)+g(x)\}_{2n}dx$$

令 $n\to\infty$得

$$\int_E\{f(x)+g(x)\}dx\leqslant\int_E f(x)dx+\int_E g(x)dx$$
$$\leqslant\int_E\{f(x)+g(x)\}dx$$

∴ $f(x)+g(x)$在E上也是可积函数，且

$$\int_E[f(x)+g(x)]dx=\int_E f(x)dx+\int_E g(x)dx$$

2° 当$f(x)$，$g(x)$为E上的一般可积函数时

∵ $f(x)=f^+(x)-f^-(x)\qquad g(x)=g^+(x)-g^-(x)$

∴ $f(x)+g(x)=[f^+(x)+g^+(x)]-[f^-(x)+g^-(x)]$

又由条件1)及2)知

$f^+(x)$，$f^-(x)$，$g^+(x)$，$g^-(x)$

都是E上的非负可积函数。

故由1°知

$f^+(x)+g^+(x)$，$f^-(x)+g^-(x)$

均为E上的非负可积函数，且

$$\int_E [f^+(x)+g^+(x)]dx=\int_E f^+(x)dx+\int_E g^+(x)dx<+\infty,$$

$$\int_E [f^-(x)+g^-(x)]dx=\int_E f^-(x)dx+\int_E g^-(x)dx>+\infty$$

令 $F(x)=f(x)+g(x)$，则

$$f(x)+g(x)=F^+(x)-F^-(x)$$

且由条件1）及2）易知

$$F^+(x),\ F^-(x)$$

均为E上的非负可测函数。

又

$$F^+(x)\leqslant f^+(x)+g^+(x)$$

$$F^-(x)\leqslant f^-(x)+g^-(x)$$

∴ 由引理一知

$$F^+(x),\ F^-(x)$$

都是E上的可积函数。

于是 $F(x)=f(x)+g(x)$也是E上的可积函数，且

$$\int_E F(x)dx=\int_E [f(x)+g(x)]dx=\int_E {}^+(x)dx-\int_E F^-(x)dx。$$

∵ $f(x)+g(x)=F^+(x)-F^-(x)=[f^+(x)+g^+(x)]-[f^-(x)+g^-(x)]$

∴ $F^+(x)+[f^-(x)+g^-(x)]=F^-(x)+[f^+(x)+g^+(x)]$

故由1°得

$$\int_E F^+(x)dx+\int_E [f^-(x)+g^-(x)]dx=\int_E F^-(x)dx+\int_E [f^+(x)+g^+(x)]dx$$

于是

$$\int_E fF^+(x)dx-\int_E F^-(x)dx=\int_E [f^+(x)+g^+(x)]dx-\int_E [f^-(x)+g^-(x)]dx$$

$$=\int_E {}^+(x)dx+\int_E g^+(x)dx-\int_E f^-(x)dx-\int_E g^-(x)dx$$

$$=\int_E f(x)dx+\int_E g(x)dx$$

即 $\int_E [f(x)+g(x)]dx=\int_E f(x)dx+\int_E g(x)dx$。

定理二 设

1） $mE<+\infty$,

2） $f(x)$为E上的可积函数，

则 $f(x)$为E上的可积函数的充要条件是

$$|f(x)|$$

在E上为可积函数。

【证明】 1° 必要性

由条件1)及$f(x)$为E上的可积函数知

$$f^+(x),\ f^-(x)$$

均为E上的可积函数。

而 $|f(x)|=f^+(x)+f^-(x)$

∴ 由定理一知$|f(x)|$为E上的可积函数，且

$$\int_E |f(x)|dx=\int_E f^+(x)dx+\int_E f^-(x)dx。$$

2° 充分性

由2）知$f^+(x)$，$f^-(x)$均为E上的可测函数。

又 $mE<+\infty$

$f^+(x)\leqslant|f(x)|$

$f^-(x)\leqslant|f(x)|$

且 $|f(x)|$为E上的可积函数。

∴ 由引理一知

$f^+(x)$，$f^-(x)$

均为E上的可积函数。

于是$f(x)$为E上的可积函数。

定理三 设

1）$mE<+\infty$，

2）$f(x)$为E上的可积函数，

3）C为一常数，

则$cf(x)$在E上也是可积函数，且

$$\int_E cf(x)dx=c\int_E f(x)dx$$

【证明】 由条件1）2）及定理二知

$|f(x)|$

为E上的可积函数。

故由定理一知

$n|f(x)|$ （$n=2, 3, 4, \cdots$）

均是E上的可积函数。

又由2）知$f(x)$为E上的可测函数，所以

$|cf(x)|$

也是E上的可测函数。

又有自然数N，使

$|cf(x)|\leqslant N|f(x)|$

∴ 由引理一知

$|cf(x)|$

也是E上的可积函数。

故 由定理二知

$cf(x)$

为E上的可积函数。

下面证明：

$$\int_E cf(x)\,dx = c\int_E f(x)\,dx。$$

（1） 当$c=0$时，显然成立。

（2） 当$c>0$时

① $c=n$ （$n=2,3,\cdots$）

由定理一知

$$\int_E nf(x)\,dx = n\int_E f(x)\,dx。$$

② c为正有理数 $\frac{n}{m}$时

$$\because\quad \int_E nf(x)\,dx = n\int_E f(x)\,dx$$

$$\therefore\quad \int_E m\left\{\frac{n}{m}f(x)\right\}dx = n\int_E f(x)\,dx$$

而由定理一知

$$\int_E m\left\{\frac{n}{m}f(x)\right\}dx = m\int_E \frac{n}{m}f(x)\,dx$$

$$\therefore \int_E \frac{n}{m}f(x)\,dx = \frac{n}{m}\int_E f(x)\,dx$$

③ c为正无理数时

因c为正无理数，所以存在正有理数数列$\{r_n\}$、$\{R_n\}$满足：

i） $0<r_n<c<R_n$，　　（$n=1,2,\cdots\cdots$），

ii） 当$n\to\infty$时，$r_n\to c$，$R_n\to c$。

又 $r_nf^+(x)\leqslant cf^+(x)\leqslant R_nf^+(x)$

$r_nf^-(x)\leqslant cf^-(x)\leqslant R_nf^-(x)$

且$r_nf^+(x)$，$cf^+(x)$，$R_nf^+(x)$，$r_nf^-(x)$，$cf^-(x)$，$R_nf^-(x)$在E上均为可积函数。

故由引理知

$$\int_E r_nf^+(x)\,dx\leqslant\int_E cf^+(x)\,dx\leqslant\int_E R_nf^+(x)\,dx$$

$$\int_E r_nf^-(x)\,dx\leqslant\int_E cf^-(x)\,dx\leqslant\int_E R_nf^-(x)\,dx$$

又由②得

$$r_n\int_E f^+(x)\,dx\leqslant\int_E cf^+(x)\,dx\leqslant R_n\int_E f^+(x)\,dx$$

$$r_n\int_E f^-(x)\,dx\leqslant\int_E cf^-(x)\,dx\leqslant R_n\int_E f^-(x)\,dx$$

令$n\to\infty$得

$$\int_E cf^+(x)\,dx = c\int_E f^+(x)\,dx \qquad (\bullet)$$

$$\int_E cf^-(x)\,dx = c\int_E f^-(x)\,dx \qquad (\bullet\,\bullet)$$

（•）－（••）得

$$\int_E cf^+(x)\,dx-\int_E cf^-(x)\,dx=c\int_E f(x)\,dx$$

又由c＞0 知

$$\{cf(x)\}^+=cf^+(x)$$

$$\{cf(x)\}^-=cf^-(x)$$

$$\therefore\quad \int_E cf(x)\,dx=c\int_E f(x)\,dx。$$

（3） 当c＜0 时

＜证法一＞ 因为当c＜0时

$$\{cf(x)\}^+=-cf^-(x),\ \{cf(x)\}^-=-cf^+(x)$$

且 $\{cf(x)\}^+$，$\{cf(x)^-$，$f^+(x)$，$f^-(x)$在E上均为可积函数，所以由（2）知

$$\int_E\{cf(x)\}^-dx=\int_E -cf^-(x)\,dx=-c\int_E f^-(x)\,dx$$

$$\int_E\{cf(x)\}^-dx=\int_E -cf^+(x)\,dx=-c\int_E f^+(x)\,dx$$

两式相减得

$$\int_E cf(x)\,dx=c\int_E f(x)\,dx。$$

＜证法二＞ 由（2）知

$$\int -cf(x)\,dx=-c\int f(x)\,dx$$

$$\therefore\quad \int_E cf(x)\,dx-\int_E cf(x)\,dx=\int_E cf(x)\,dx+\int_E -cf(x)\,dx$$

又由定理一知

$$\int_E cf(x)\,dx+\int_E -cf(x)\,dx=\int_E[cf(x)+(-c)f(x)]\,dx=0$$

$$\therefore\quad \int_E cf(x)\,dx-c\int_E f(x)\,dx=0$$

即 $$\int_E cf(x)\,dx=c\int_E f(x)\,dx。$$

定理四 设

1） $mE<+\infty$,

2） $f(x)$为E上的可测函数，

3）$g(x)$为E上的非负可积函数，

4） $|f(x)|\leqslant g(x)$ P•P•于E，

则 $f(x)$也是E上的可积函数。

【证明】 由条件2）知$|f(x)|$为E上的可测函数。

又由条件1）3）4）及$|f(x)|$为E上的可测函数知（由引理知）$|f(x)|$为E上的可积函数。

所以由定理二知$f(x)$也是E上的可积函数。

以上对集合E的测度为有限时，证明了Lebesgue积分中的几个定理。下面讨论E的测度为

$+\infty$时几个类似的定理：

引理二　设

1） $mE=+\infty$，

2） $\psi(x)$为E上的非负可测函数，

3） $\varphi(x)$为E上的非负可积函数，

4） $0\leqslant\psi(x)\leqslant\varphi(x)$，

则 $\psi(x)$为E上的可积函数，且

$$\int_E \psi(x)dx\leqslant\int_E \varphi(x)dx。$$

因证明与引理一类似，故略。

定理五　设

1） $mE=+\infty$，

2） $f(x)$，$g(x)$都是E上的可积函数，

则 $f(x)+g(x)$也是E上的可积函数，且

$$\int_E [f(x)+g(x)]dx=\int_E f(x)dx+\int_E g(x)dx。$$

【证明】　设R_k（$k=1,2,3,\cdots$）均为n维区间，R为n维空间，且满足：

（1）$R_1\subseteq R_2\subseteq R_3\subseteq\cdots\subseteq R_k\subseteq\cdots$，

（2） $R=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}R_k$.

令 $E_k=E\cap R_k$，则E_k（$k=1,2,\cdots$）均为可测集，且

$mE_k<+\infty$，$E_k\subseteq E_{k+1}$　（$k=1,2,\cdots$）

及 $E=\lim\limits_{k\to\infty}E_k$

1° 当$f(x)\geqslant0$，$g(x)\geqslant0$时，

∵ $mE_k<+\infty$，且$f(x)$，$g(x)$在E_k上均为可积函数，

∴ 由定理一得

$$\int_{E_k}[f(x)+g(x)]dx=\int_{E_k}f(x)dx+\int_{E_k}g(x)dx\ (k=1,2,\cdots)$$

且当 $k\to\infty$时，有

$$\int_E [f(x)+g(x)]dx=\int_E f(x)dx+\int_E g(x)dx<+\infty$$

2° $f(x)$，$g(x)$为E上的一般可积函数时，

∵ $f^+(x)$，$f^-(x)$，$g^+(x)$，$g^-(x)$都是E上的非负可积函数，

∴ 由1°得

$$\int_E [f^+(x)+g^+(x)]dx=\int_E f^+(x)dx+\int_E g^+(x)dx<+\infty$$

$$\int_E [f^+(x)+g^-(x)]dx=\int_E f^-(x)dx+\int_E g^-(x)dx<+\infty$$

令 $F(x)=f(x)+g(x)$， 则

$F(x)+g(x)=F^+(x)-F^-(x)$

由条件1）2）及引理二知

$$F^{+}(x),\ F^{-}(x)$$

都是E上的非负可积函数。

于是$F(x)=f(x)+g(x)$也是E上的可积函数，且

$$\int_E F(x)dx=\int_E [f(x)+g(x)]dx$$

$$=\int_E F^{+}(x)dx-\int_E F^{-}(x)dx$$

$$\because\quad f(x)+g(x)=F^{+}(x)=F^{-}(x)$$

$$f(x)+g(x)=[f^{+}(x)+g^{+}(x)]-[f^{-}(x)+g^{-}(x)]$$

$$\therefore\quad F^{+}(x)+[f^{-}(x)+g^{-}(x)]=F^{-}(x)+[f^{+}(x)+g^{+}(x)]$$

故 由1°得

$$\int_E F^{+}(x)dx+\int_E [f^{-}(x)+g^{-}(x)]dx$$

$$=\int_E F^{-}(x)dx+\int_E [f^{+}(x)+g^{+}(x)]dx$$

$$\therefore\quad \int_E [f(x)+g(x)]dx=\int_E f(x)dx+\int_E g(x)dx。$$

定理六 设

1） $mE=+\infty$,

2） $f(x)$为E上的可积函数，

则 $f(x)$为E上的可积函数的充要条件是

$$|f(x)|$$

在E上为可积函数。

此定理的证明与定理二类似。

定理七 设

1） $mE=+\infty$,

2） $f(x)$为E上的可积函数，

3） c为一常数，

则$cf(x)$在E上为可积函数，且

$$\int_E cf(x)dx=c\int_E f(x)dx。$$

【证明】 由条件1）2）及定理六知

$$|f(x)|$$

为E上的可积函数。

故由定理五知

$$n|f(x)|\qquad (n=2,3,\cdots)$$

都是E上的可积函数。

又由2）知$f(x)$为E上的可测函数，所以

$$|cf(x)|$$

也是E上的可测函数。

又有自然数N，使

$$|cf(x)|\leqslant N|f(x)|$$

∴ 由引理二知

$$|cf(x)|$$

也是E上的可积函数。

故由定理六知

$$cf(x)$$

为E上的可积函数。

下面证明：

$$\int_E cf(x)dx=c\int_E f(x)dx$$

1° 当$c\geqslant 0$时

∵ $\{cf(x)\}^+=cf^+(x)$

$\{cf(x)\}^-=cf^-(x)$

∴ $\int_{E_k}\{cf(x)\}^+dx=\int_{E_k}cf^+(x)dx=c\int_{E_k}f^+(x)dx$

$\int_{E_k}\{cf(x)\}^-dx=\int_{E_k}cf^-(x)dx=c\int_{E_k}f^-(x)dx$

其中E_k（$k=1,2,\cdots$）与定理五中的相同。

令$k\to\infty$得

$$\int_E\{cf(x)\}^+dx=c\int_E f^+(x)dx$$

$$\int_E\{cf(x)\}^-dx=c\int_E f^-(x)dx$$

两式相减得

$$\int_E cf(x)dx=c\int_E f(x)dx$$

2° 当$c<0$时

∵ $\{cf(x)\}^+=-cf^-(x)$

$\{cf(x)\}^-=-cf^+(x)$

∴ 由1°得

$$\int_E\{cf(x)\}^+dx=\int_E -cf^-(x)dx=-c\int_E f^-(x)dx$$

$$\int_E\{cf(x)\}^-dx=\int_E -cf^+(x)dx=-c\int_E f^+(x)dx$$

两式相减得

$$\int_E cf(x)dx=c\int_E f(x)dx。$$

显然也可用定理三的证法二证明。

定理八 设

1） $mE=+\infty$，

2）f（x）为E上的可测函数，

3）g(x)为E上的非负可积函数，

4）$|f(x)|\leqslant g(x)$，

则　f（x）也是E上的可积函数。

证明与定理四的证明类似。

参　考　文　献

〔1〕　实变函数论　江泽坚　吴智泉合编　人民教育出版社　1961版。