

# 结构矩阵分析中的逆步变换

寿楠椿

(土建系)

## 提 要

本文简要综述了结构矩阵分析中的一个重要的变换关系——逆步变换,对几个应用实例作了讨论和分析,文中最后介绍了在解决实际结构计算问题时,藉助逆步变换而导出的一个过渡单元——墩柱单元的刚度分析公式。

在结构矩阵分析理论中,逆步变换(contragredient transformation)是一个简单而极为重要的矩阵变换。实际上结构的单元分析和整体分析都要依靠这个变换关系来实现。下面分四个部分讨论这一问题。

## 一、逆步变换的表述

首先,我们采用形式化的方式来表述逆步变换关系。假设结构上作用了广义力向量

$$\{p\} = [p_1 p_2 \cdots p_1 \cdots p_n]^T \quad (1)$$

相应地有广义位移向量

$$\{u\} = [u_1 u_2 \cdots u_1 \cdots u_n]^T \quad (2)$$

两者的阶数相同。这里广义力向量 $\{p\}$ 被理解为用来确定结构上的外力或者内力或者应力的一组参数,而广义位移向量 $\{u\}$ 则是用来描述结构位移或者应变的一组参数,它与广义力向量应当构成下列形式的功的表达式

$$W = \{u\}^T \{P\} = \{P\}^T \{u\} \quad (3)$$

即

$$W = P_1 u_1 + P_2 u_2 + \cdots + P_1 u_1 + \cdots + P_n u_n \quad (3a)$$

显然,功的表达式(3)成立的条件是:当 $\{u\}$ 中任一广义位移分量 $u_i \neq 0$ ,其它的位移分量 $u_j = 0$  ( $j=1, 2, \cdots, n, j \neq i$ )时,在 $\{P\}$ 中仅广义分量 $p_i$ 做功 $p_i u_i$ ,其它的广义力分量不做功。或者,当 $\{p\}$ 中任一广义力分量 $p_i \neq 0$ ,其它的广义力分量 $p_j = 0$  ( $j=1, 2, \cdots, n, j \neq i$ )时, $p_i$ 的功为 $p_i u_i$ 。这样的一对广义力向量 $\{p\}$ 和广义位移向量 $\{u\}$ 就称为共轭的向量(Conjugated vectors)。<sup>[1, 6, 11]</sup>例如当两个力 $[p_1 p_2]^T$ 沿着直角坐标轴 $x, y$ 方向,位移 $[u_1 u_2]^T$ 也沿着 $x, y$ 轴方向时,功的表达式(3)成立,即有

$$W = P_1 u_1 + P_2 u_2$$

所以这一对向量是共轭的。但是如果两个力 $[p_1 p_2]^T$ 的夹角不是直角,而是成任意一个角度 $\theta$ ,若设位移 $[u_1 u_2]^T$ 沿上述两个力的方向,如图1所示,功的表达式(3)不会成立。即

$$W = p_1 u_1 + p_2 u_2$$

这是因为 $p_1$ 既在位移 $u_1$ 上做功,也在位移 $u_2$ 上做功, $p_2$ 亦然。所以,这样定义的向量 $\{p\} = [p_1 p_2]^T$ 和 $\{u\} = [u_1 u_2]^T$ 不是共轭的。为了使力和位移相互共轭,一个最常用的方法是将力和位移沿三个互相垂直的坐标轴方向分解,即定义

$$\{p\} = [P_{1x} P_{1y} P_{1z} P_{2x} P_{2y} P_{2z}]^T \quad (4)$$

$$\{u\} = [u_{1x} u_{1y} u_{1z} u_{2x} u_{2y} u_{2z}]^T \quad (5)$$

上式中 $p_{1x}, p_{1y}, p_{1z}$ 和 $u_{1x}, u_{1y}, u_{1z}$ 是力 $p_1$ 和位移 $u_1$  ( $i=1, 2$ )沿三个坐标轴方向的分量。可见功的表达式(3)成立,即有

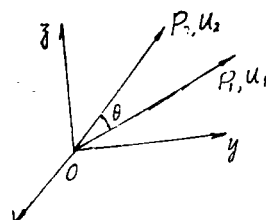


图1

$$W = \sum_{i=1}^2 (p_{1x} u_{1x} + p_{1y} u_{1y} + p_{1z} u_{1z})$$

$$= \{P\}^T \{u\}$$

所以,按照式(4)、(5)的方式定义的向量 $\{P\}$ 和 $\{u\}$ 是共轭的向量。

在广义力向量 $\{P\}$ 和广义位移向量 $\{u\}$ 互为共轭的约定之下,我们有下列两个定理:

**定理1** 设结构上有广义力向量 $\{P\}_{nx_1}$ ,  $\{\bar{P}\}_{mx_1}$ 和广义位移向量 $\{u\}_{nx_1}$ ,

$\{\bar{u}\}_{mx_1}$ 。其中向量 $\{P\}$ 与 $\{u\}$ 共轭,向量 $\{\bar{P}\}$ 与 $\{\bar{u}\}$ 共轭。如果存在一个线性变换

$$\{\bar{u}\}_{mx_1} = [A]_{m \times n} \{u\}_{nx_1} \quad (6)$$

并且功的表达式

$$\{u\}^T \{P\} = \{\bar{u}\}^T \{\bar{P}\} \quad (7)$$

对于任意的 $\{u\}$ 成立,则下列变换关系成立

$$\{P\} = [A]^T \{\bar{P}\} \quad (8)$$

**证明** 将式(6)代入(7)得到

$$\{u\}^T \{P\} = \{u\}^T [A]^T \{\bar{P}\}$$

由于 $\{u\}$ 的任意性,故有

$$\{P\} = [A]^T \{\bar{P}\}$$

**定理2** 设广义力向量 $\{p\}_{nx_1}$ ,  $\{\bar{p}\}_{mx_1}$ 分别与广义位移向量 $\{u\}_{nx_1}$ ,  $\{\bar{u}\}_{mx_1}$ 共轭。如果存在一个线性变换

$$\{\bar{p}\}_{mx_1} = [H]_{m \times n} \{p\}_{nx_1} \quad (9)$$

并且功的表达式

$$\{p\}^T \{u\} = \{\bar{p}\}^T \{\bar{u}\} \quad (10)$$

对于任意的 $\{p\}$ 成立,则下列变换关系成立

$$\{u\} = [H]^T \{\bar{u}\} \quad (11)$$

**证明** 将式(9)代入(10)得到

$$\{p\}^T \{u\} = \{p\}^T [H]^T \{\bar{u}\}$$

由于 $\{p\}$ 的任意性,故有

$$\{u\} = [H]^T \{\bar{u}\}$$

从上面定理的证明可见:

1. 向量 $\{p\}$ 与共轭的 $\{u\}$ 同阶, $\{\bar{p}\}$ 与共轭的 $\{\bar{u}\}$ 同阶,但 $\{p\}$ 、 $\{u\}$ 与 $\{\bar{p}\}$ 、 $\{\bar{u}\}$ 阶的数可以不同。即参照某一坐标系或节点自由度的一组力和位移变换为参照另一坐标系或节点自由度的一组力和位移,变换的自由度数可以不同。

2. 定理中的条件,即式(7)或(10)纯粹是一个数学表达式,它表示功的不变性,并不要求物体处于静力平衡状态,所以一般地它不是虚功原理的表达式。但可以认为虚功方程是式(7)或(10)的一个特殊情况。下面可以看到,在某些情况下式(7)或(10)是虚功方程,而在另一些情况下是应变能不变性的表达式,等等。

3. 定理未涉及到材料的性质。

4. 由式(6)可知, $\{\bar{u}\}$ 与 $\{u\}$ 之间只能是线性关系,同理 $\{\bar{p}\}$ 与 $\{p\}$ 之间也只能是线性关系。

定理1说明如果以位移 $\{u\}$ 线性表出位移 $\{\bar{u}\}$ 的变换矩阵为 $[A]$ ,则以力 $\{\bar{p}\}$ 线性表出力 $\{p\}$ 的矩阵为转置矩阵 $[A]^T$ 。而定理2说明,如果以力 $\{p\}$ 线性表出力 $\{\bar{p}\}$ 的变换矩阵为 $[H]$ ,则以位移 $\{\bar{u}\}$ 线性表出 $\{u\}$ 的矩阵为转置矩阵 $[H]^T$ 。力和位移的这种变换关系称为逆步变换<sup>[1,6,10,11,12,13]</sup>可以用下图来表示:

而定理能够成立的关键在于功的不变性,即式(7)或(10)的成立。定理1多用于刚度法分析,而定理2多用于柔度法分析。本文着重讨论前者的应用。当 $[A]$ 或 $[H]$ 为非奇异的方阵时,显然有

$$[A]^T = [H]^{-1} \text{ 或者 } [A]^{-1} = [H]^T$$

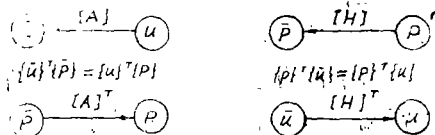


图 2

只要稍为留意观察,就可以看到,在结构矩阵分析中,涉及到力之间或者位移之间的各种线性变换在一定条件下都遵循逆步变换的规律。弄清楚这个简单而又重要的变换规律,不仅有助于系统地理解和记忆有关的公式;而且重要的是在进行单元分析和整体分析时,它是一个有力的工具。例如,当力的变换关系,根据物理的考虑很容易求得,而位移的变换关系不易看出时,我们即可由前者求出后者。反之亦然。<sup>[6, 11]</sup>

利用逆步变换很容易得出刚度矩阵和柔度矩阵的变换公式。例如,设参照某一坐标系或节点自由度的力 $\{\bar{p}\}$ 和位移 $\{\bar{u}\}$ 由刚度矩阵 $[K]$ 联系在一起,即有

$$\{\bar{p}\} = [K] \{\bar{u}\} \quad (12)$$

而参照另一坐标系或节点自由度的力 $\{p\}$ 和位移 $\{u\}$ 由刚度矩阵 $[K]$ 联系在一起,即

$$\{p\} = [K] \{u\} \quad (13)$$

如果位移按下式变换

$$\{\bar{u}\} = [A] \{u\} \quad (6)$$

并且设定理1的条件满足,则有

$$\{p\} = [A]^T \{\bar{p}\} \quad (8)$$

将式(12)代入上式得到

$$\{p\} = [A]^T [K] \{\bar{u}\} = [A]^T [K] [A] \{u\}$$

将上式与式(13)比较可见, 刚度矩阵的变换关系为

$$[K] = [A]^T [\bar{K}] [A] \quad (14)$$

当已知 $[\bar{K}]$ 和 $[A]$ 时, 即可按上式求出式(13)中的 $[K]$ 。如所周知, 在矩阵位移法中, 这是一个普遍应用的公式。在单元分析中进行坐标变换或者节点自由度的变换, 在整体分析中进行单元组装, 都要应用上述公式。实际上它只是通过简单的逐步变换而导出。定理1、2和公式(14)是本文下面讨论问题的基础。公式(14)所表示的变换属于相合变换 (congruent transformation),  $^{[8, 9, 11]}$  对称的方阵 $[\bar{K}]$ 经过这样的变换以后, 得到的方阵 $[K]$ 仍然是对称的。

## 二、常见的逆步变换实例

下面列举一些结构矩阵分析中经常遇到的逆步变换实例, 加以讨论。其中有的可能未被注意。

### 1. 坐标轴旋转时力和位移, 应力和应变的变换

在杆系结构分析中, 需要将对应于局部坐标系的杆端力和杆端位移变换为对应于结构坐标系 (整体坐标系) 的杆端力和杆端位移。这是所熟知的力和位移的坐标变换。

为了说明逆步的关系, 仅须以平面桁架的杆件单元为例。设局部坐标系和整体坐标系中的杆端力和杆端位移向量分别为

$$\{\bar{P}\} = [\bar{X}_i \bar{Y}_i \bar{X}_j \bar{Y}_j]^T$$

$$\{\bar{u}\} = [\bar{u}_i \bar{v}_i \bar{u}_j \bar{v}_j]^T$$

以及

$$\{P\} = [X_i Y_i X_j Y_j]^T$$

$$\{u\} = [u_i v_i u_j v_j]^T$$

如图3所示。显然可见, 杆端位移的变换关系

$$\text{为 } \{\bar{u}\} = [A] \{u\}$$

式中

$$[A] = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \quad (15)$$

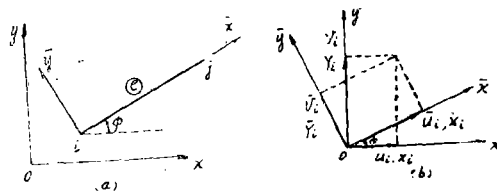


图3

由于本例满足定理1的条件, 所以

$$\{P\} = [A]^T \{\bar{P}\} \quad (8)$$

另一方面, 直接由图3知杆端力之间的变换关系与式(6)相同, 即

$$\{\bar{P}\} = [A] \{P\} \quad (16)$$

可知现在变换矩阵 $[A]$ 是一个正交矩阵, 即

$$[A]^{-1} = [A]^T$$

这是坐标轴旋转变换的结果。在这个特殊情况下, 单元刚度矩阵的变换为正交变换<sup>[16]</sup>

$$[K]^* = [A]^T [K] [A] = [A]^{-1} [K] [A]$$

在弹性力学中, 属于正交曲线坐标系的应力分量和应变分量的坐标变换也满足逆步关系。为了书写的简便, 也仅以平面问题为例。如图4所示, 作用在从O点取出的微小三棱柱体各侧面上的应力分量之间的关系为<sup>[14]</sup>

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & 2\cos\theta\sin\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & -2\cos\theta\sin\theta \\ -\cos\theta\sin\theta & \cos\theta\sin\theta & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (17)$$

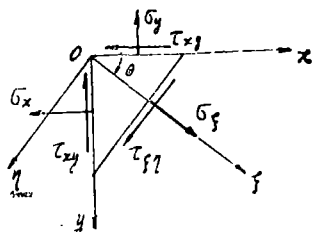


图4

简记为

$$\{\bar{\sigma}\} = [H] \{\sigma\} \quad (18)$$

设与应力分量 $\{\bar{\sigma}\} = (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})^T$ 共轭的应变分量为 $\{\bar{\epsilon}\} = (\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy})^T$ 。而与应力分量 $\{\sigma\} = (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})^T$ 共轭的应变分量为 $\{\epsilon\} = (\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy})^T$ 。因为不论在那个坐标系之下, 应变能密度不变, 故有<sup>[10]</sup>  $\frac{1}{2} \{\bar{\sigma}\}^T \{\bar{\epsilon}\} = \frac{1}{2} \{\sigma\}^T \{\epsilon\}$ 。现在功的不变性的表达式(10)是以应力和应变的乘积来表示的。由定理2知

$$\{\epsilon\} = [H]^T \{\bar{\epsilon}\} \quad (19)$$

弹性力学应变分析的结果, 证实了上式的正确。

## 2. 刚体上的力和位移的变换<sup>[1, 9, 12, 13]</sup>

仍然以平面力系为例, 设在刚体上的j点作用了力系 $\{P\} = (X_j, Y_j, M_j)^T$ , j点的坐标为 $x_j, y_j$ 。我们将这个力系向j<sub>1</sub>点简化, 设简化以后的力系为 $\{\bar{P}\} = (X_{j1}, Y_{j1}, M_{j1})^T$ , j<sub>1</sub>点的坐标为 $x_{j1}, y_{j1}$ 如图5所示。令与力 $\{P\}$ 共轭的位移为 $\{u\} = (u_j, v_j, \theta_j)^T$ , 与力 $\{\bar{P}\}$ 共轭的位移为 $\{\bar{u}\} = (u_{j1}, v_{j1}, \theta_{j1})^T$ 。设位移 $\{u\}$ 和 $\{\bar{u}\}$ 很微小, 则由刚体平面运动的几何关系可得下列的变换式

$$\begin{Bmatrix} u_{j1} \\ v_{j1} \\ \theta_{j1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -Dy_j \\ 0 & 1 & Dx_j \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_j \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} \quad (20)$$

式中  $Dx = x_{j1} - x_j$ ,  $Dy = y_{j1} - y_j$

式(20)简记为

$$\{\bar{u}\} = [A] \{u\} \quad (6)$$

由于功的不变性

$$\{u\}^T \{P\} = \{\bar{u}\}^T \{\bar{P}\}$$

而有

$$\{P\} = [A]^T \{\bar{P}\} \quad (8)$$

直接应用力的平移法则, 由图5可以看出式(8)是正确的。

如果平面杆系的杆件单元两端带有刚域, 如图6所示。可以选择刚域中的某两点i, j为“主节点”, 杆件与刚域的交点i<sub>1</sub>, j<sub>1</sub>为“从节点”, 利用上面公式(20)中的变换矩阵和式(14), 将对应于杆件弹性部份的单元刚度矩阵(即表示从节点的杆端位移与杆端力之间关

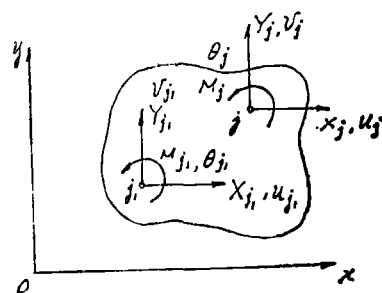


图5

系的单元刚度矩阵)变换为表示主节点上的位移与力的关系的单元刚度矩阵。同时作用在从节点上的等效节点荷载,按照式(8)可以方便地变换到主节点上。现在的变换矩阵 $[A]$ 为:

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -Dy_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & Dxi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -Dy_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & Dxi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

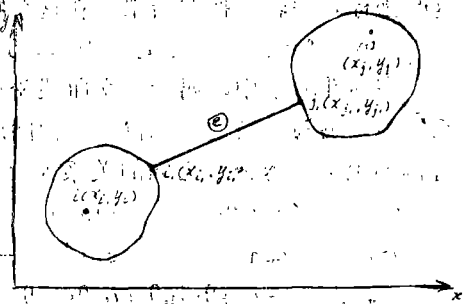


图 6

式中:  $Dxi = X_{j1} - X_{i1}$ ,  $Dyi = Y_{j1} - Y_{i1}$   
 $Dxj = X_{i1} - X_{j1}$ ,  $Dyj = Y_{i1} - Y_{j1}$

### 3. 外力 and 内力之间的变换

我们考虑杆系结构。设结构的节点位移向量为 $\{u\}$ ,由全部单元的节点位移向量,依单元编号的顺序组成的节点位移向量为 $\{\bar{u}\}$ 。根据变形连续性条件有下列关系存在:

$$\{\bar{u}\} = [A]\{u\} \quad (6)$$

这里 $[A]$ 一般不是方阵,设与 $\{u\}$ 共轭的结构上的节点荷载向量为 $\{P\}$ ,与 $\{\bar{u}\}$ 共轭的全部单元的节点力(现在是内力)为 $\{\bar{P}\}$ 。如果结构处于平衡状态,由虚功原理,对于任意的虚位移 $\{u\}$ 下面的虚功方程式成立:

$$\{u\}^T \{P\} = \{\bar{u}\}^T \{\bar{P}\}$$

这里功的不变性的表达式(7)表现为虚功方程。由定理1可得

$$\{P\} = [A]^T \{\bar{P}\}$$

现在得到的这个式子就是结构上的节点荷载(外力)与单元节点力(捩端内力)的平衡方程式。在前面和以后所讨论的几个例子中,或者在一般情况下,逆步变换关系的成立并不要求结构处于平衡状态。但这里在研究结构上的外力与内力的关系时,则是从平衡状态出发的。所以,现在是定理一的一个特殊情况。

如果将全部的单元刚度矩阵排列成拟对角阵 $[K]$ ,即未装配的整体刚度矩阵,则由式(14)就得结构的整体刚度矩阵。由这个式子可以推导出直接刚度法<sup>[2]</sup>。

### 4. 荷载向节点移置——等效节点荷载

无论对于杆件单元或者连续体的有限单元,当荷载向量 $\{P\}$ (现在先假设为集中荷载)作用在单元内的某一点时,实际上也是采用逆步变换将这些非节点荷载移置到结构的节点上,构成等效节点荷载的<sup>[2]</sup>。

设单元内部各点的位移模式为<sup>[3]</sup>:

$$\{f\} = [N]\{\delta\} \quad (21)$$

式中 $\{\delta\}$ 是单元的节点位移向量, $[N]$ 为形函数, $\{f\}$ 为单元内任意一点的位移。例如

对于平面问题  $\{f\} = [u, v]^T$ , 此处  $u, v$  为坐标  $x, y$  的函数。令等效节点荷载为  $\{R\}$ , 要求这个荷载  $\{R\}$  在任意的节点位移上的虚功与原荷载  $\{P\}$  在其作用点相应的位移上的虚功相等, 即要求下式成立

$$\{f\}^T \{P\} = \{\delta\}^T \{R\}$$

由定理1就得到

$$\{R\} = [N]^T \{P\} \quad (22)$$

当单元内受分布荷载的作用时, 利用上式作积分, 仍能得到相应的等效节点荷载。

式(22)适用于各种有限单元。对于杆件单元, 式(21)中的形函数  $[N]$  是精确的表达式, 故由式(22)求得的等效节点荷载是精确的。

### 5. 多自由度体系强迫振动的振型分解法

为书写简便, 只考虑无阻尼强迫振动。如所熟知, 多自由度体系强迫振动的微分方程式为<sup>[5]</sup>

$$[M] \{\ddot{X}\} + [K] \{X\} = \{P\} \quad (23)$$

式中  $[M]$ ,  $[K]$  分别为质量矩阵和刚度矩阵,  $\{X\}$  为节点位移, 它是时间  $t$  的函数。 $\{\ddot{X}\}$  为  $\{X\}$  对于时间  $t$  的二阶导数, 即加速度。设体系的固有频率以及相应的主振型都已求出, 将后者规格化以后排列成为振型矩阵  $[A_N]$ 。利用这个矩阵将体系原来的坐标  $\{x\}$  通过一组新的广义坐标  $\{X_N\}$ , 即正则坐标线性表出:

$$\{x\} = [A_N] \{X_N\} \quad (24)$$

$$\text{而 } \{\ddot{X}\} = [A_N] \{\ddot{X}_N\} \quad (24a)$$

设与正则坐标——广义位移  $\{X_N\}$  共轭的广义力为  $\{P_N\}$ , 对于任意的位移  $\{X_N\}$  要求虚功相等, 即  $\{X_N\}^T \{P_N\} = \{X\}^T \{P\}$

由定理1可得

$$\{P_N\} = [A_N]^T \{P\} \quad (25)$$

将式(23)代入上式得到

$$\{P_N\} = [A_N]^T [M] \{\ddot{X}\} + [A_N]^T [K] \{X\}$$

再将式(24), (24a)代入上式得到

$\{P_N\} = [A_N]^T [M] [A_N] \{\ddot{X}_N\} + [A_N]^T [K] [A_N] \{X_N\}$  由于振型向量的正交性, 上式最后成为

$$\{\ddot{X}_N\} + [K_N] \{X_N\} = \{P_N\} \quad (26)$$

这里

$$[A_N]^T [M] [A_N] = [I]$$

$$[A_N]^T [K] [A_N] = [K_N]$$

式中  $[I]$  为单位矩阵而  $[K_N]$  为对角矩阵。现在式(26)成为非耦合的了。

由上面的推导可见, 通常的强迫振动的振型分解法与逆步变换是密切相关的。虽然一般教科书上不是这样推导的, 实际上式(26)中的  $\{P_N\}$  满足式(25)的逆步关系。

### 三、逆步变换中的问题

当采用式(6)首先进行位移变换, 然后再按式(8)进行力的变换时, 由于实际问题的

复杂性,为了简化计算,有时在几何关系的表达式(6)中引入近似性。例如上面所引用的式(21);对于连续体的有限单元来说,就是一个近似的表达式。下面我们讨论一个富有启发性的例子。

静凝聚方法<sup>[4]</sup>常常用来消去刚度方程式中某些从节点或内部节点的位移,而只保留主节点或外部节点的位移,以减少方程式中的节点位移未知量。其做法是将节点位移 $\{\delta\}$ 分为两部分<sup>[10]</sup>,即令

$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} \delta_s \\ \delta_m \end{Bmatrix} \quad (27)$$

其中 $\{\delta_s\}$ 为欲消去的从节点位移,而 $\{\delta_m\}$ 为主节点位移。相应地将荷载向量和刚度矩阵亦进行分块,即将式 $[K]\{\delta\}=\{F\}$ 按下述形式分块:

$$\begin{bmatrix} K_{ss} & K_{sm} \\ K_{ms} & K_{mm} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_s \\ \delta_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_s \\ F_m \end{Bmatrix} \quad (28)$$

为简单计,设 $\{F_s\}=\{0\}$ ,由上式得到

$$[K_{ss}]\{\delta_s\} + [K_{sm}]\{\delta_m\} = \{0\} \quad (28a)$$

∴  $\{\delta_s\} = -[K_{ss}]^{-1}[K_{sm}]\{\delta_m\}$

代入式(27)得

$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} \delta_s \\ \delta_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -K_{ss}^{-1}K_{sm} \\ I \end{Bmatrix} \{\delta_m\} \quad (29)$$

或简记为

$$\{\delta\} = [T]\{\delta_m\} \quad (29a)$$

式中变换矩阵 $[T]$ 为

$$[T] = \begin{bmatrix} -K_{ss}^{-1}K_{sm} \\ I \end{bmatrix} \quad (30)$$

设与 $\{\delta_m\}$ 共轭的荷载向量为 $\{F^*\}$ ,要求功的表达式

$$\{\delta_m\}^T \{F^*\} = \{\delta\}^T \{F\}$$

对于任意的位移 $\{\delta_m\}$ 成立,由定理1得

$$\{F^*\} = [T]^T \{F\} \quad (31)$$

最后刚度方程式(28)缩减为

$$[K^*]\{\delta_m\} = \{F^*\} \quad (32)$$

式中凝聚后的刚度矩阵为

$$[K^*] = [T]^T [K] [T] \quad (32a)$$

上述的变换对于静力计算来说是完全正确的<sup>[6]</sup>。在动力学中,为了减轻特征值问题计算的巨大工作量,常常采用“特征值节约子”来消去问题中的许多或者大多数自由度,<sup>[7] 8, 9, 10]</sup>即近似地用式(30)和(29a)进行凝聚或者变换。

设我们已经得到广义特征值问题的方程式<sup>[8]</sup>

$$[K]\{\phi\} = \lambda [M]\{\phi\} \quad (33)$$

与上述过程相仿,将振型向量 $\{\phi\}$ 分为主、从两块,同时刚度矩阵 $[K]$ 与质量矩阵 $[M]$



亦相应地分块, 这时式 (33) 成为

$$\begin{Bmatrix} K_{,,} & K_{,m} \\ K_{m,} & K_{mm} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_{,} \\ \phi_m \end{Bmatrix} = \lambda \begin{Bmatrix} M_{,,} & M_{,m} \\ M_{m,} & M_{mm} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_{,} \\ \phi_m \end{Bmatrix} \quad (34)$$

若将上式等号右边的向量看作荷载向量  $\{F\}$ , 采用静凝聚的公式 (29a)、(30)、(31) 进行变换, 消去从节点位移自由度  $\{\phi_{,}\}$ , 最后可得

$$[K^*] \{\phi_m\} = \lambda [M^*] \{\phi_m\} \quad (35)$$

式中

$$[K^*] = [T]^T [K] [T] \quad (32a)$$

$$[M^*] = [T]^T [M] [T] \quad (35a)$$

这里将式 (35) 等号右边的向量看作荷载向量  $\{F^*\}$ , 而逆步变换的基本条件 (7) 式是成立的, 即有下列关系:

$$\{\phi_m\}^T \{F^*\} = \{\phi_{,}\}^T \{F\}$$

也就是式

$$\lambda \{\phi_m\}^T [M^*] \{\phi_m\} = \lambda \{\phi_{,}\}^T [M] \{\phi_{,}\}$$

成立。从逆步变换的角度看, 上面由式 (34) 列式 (35) 的变换完全符合要求, 但这恰恰是一个近似的变换。这是因为将静力问题的变换公式 (29a)、(30) 用于特征值问题的表达式 (34) 时是近似的

实际上, 式 (30) 所表示的变换矩阵  $[T]$  是在条件 (28a), 即

$$[K_{,,}] \{\phi_{,}\} + [K_{,m}] \{\phi_m\} = \{0\}$$

成立的情况下得出的、而由式 (34) 可见,  $\{\phi_{,}\}$  与  $\{\phi_m\}$  之间正确的关系式应为

$$[K_{,,} - \lambda M_{,,}] \{\phi_{,}\} + [K_{,m} - \lambda M_{,m}] \{\phi_m\} = \{0\}$$

$$\therefore \{\phi_{,}\} = -[K_{,,} - \lambda M_{,,}]^{-1} [K_{,m} - \lambda M_{,m}] \{\phi_m\}$$

即正确的变换式应为

$$\begin{Bmatrix} \phi_{,} \\ \phi_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -[K_{,,} - \lambda M_{,,}]^{-1} [K_{,m} - \lambda M_{,m}] \\ I \end{Bmatrix} \{\phi_m\} \quad (36)$$

或者简记为

$$\begin{Bmatrix} \phi_{,} \\ \phi_m \end{Bmatrix} = [T_1] \{\phi_m\} \quad (36a)$$

这里由于变换矩阵  $[T_1]$  中包含了特征值  $\lambda$ , 实际计算是非常困难的, 采用迭代法<sup>[6]</sup>工作量很巨大。因此, 通常采用静凝聚的公式 (29a)、(30) 作近似的变换, 当适当选择主节点自由度时, 计算结果仍然良好。

最后, 当质量矩阵中的子矩阵

$$[M_{,,}] = [0], [M_{,m}] = [0]$$

时, 即质量矩阵具有下列形状时

$$[M] = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_{mm} \end{Bmatrix}$$

式 (36) 化为式 (29), 所以此时前面的变换式 (29) 用于特征值问题是正确的, 而没有引入近似性。

由上面的讨论可见, 定理1或定理2只是说明力的变换和位移的变换之间并不是各自独立无关, 而是遵循逆步规律的。但是这并不能保证满足定理条件的变换本身是正确的。只有当

我们假设的位移的变换或者力的变换是正确的时候, 由逆步规律而得到的力的变换或者位移的变换关系才是正确的。

#### 四、一个过渡单元——墩柱单元

在桥梁结构中, 有时会遇到一个墩柱顶上安置两根铰支梁的情况, 例如多跨简支桥梁和国内近几年出现的刚架拱桥, 其纵梁与墩柱的连结就属于这种情况, 如图 7 所示。为了考虑杆件结构的这种实际连结情况, 进行平面内的整体计算, 而且限于采用杆件单元, 我们引入了一个过渡单元, 称为墩柱单元。应用逆步变换能够容易地导出有关刚度分析的公式。

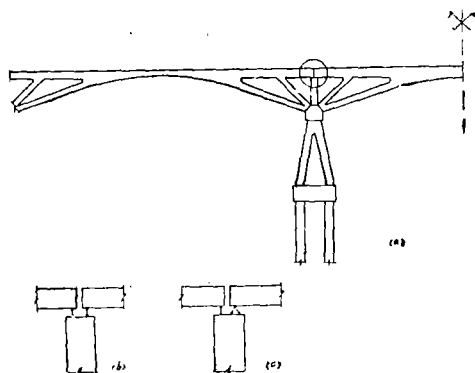


图 7

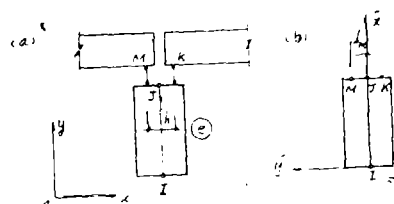


图 8

如图 8b 所示, 规定墩柱单元有四个节点 I, J, K, M。在整体坐标系  $oxy$  中, 对于柱的上端只取节点 J 的水平位移  $u_j$  和节点 K、M 的竖向位移  $v_k, v_m$  为这些节点的位移自由度。对于下端节点 I 则象通常的杆件单元一样取水平位移  $u_i$ , 竖向位移  $v_i$  和截面转角  $\theta_i$  为其位移自由度。这样一来, 只要令上端节点的位移  $v_k, v_m$  分别等于柱头上纵梁相应节点的竖向位移就体现了图 8a 所示的连结情况。如果节点 M 或 K 为图 7c 所示的固定铰支座, 则只须再令水平位移  $u_j$  与纵梁有关节点的水平位移相等即可。若采用引入节点位移编号数组的先处理方式编程序, <sup>[10]</sup> 这种相关信息很容易处理。

将墩柱看作一根杆件单元时, 其单元刚度方程式为

$$[K] \{\delta\}^e = \{F\}^e \quad (37)$$

上式在整体坐标系  $Oxy$  中定义, I, J 为此单元的两个节点, 式中

$$\{\delta\}^e = [u_i, v_i, \theta_i, u_j, v_j, v_m]^T$$

$$\{F\}^e = [X_i, Y_i, M_i, X_j, Y_j, M_j]^T$$

另一方面, 将墩柱看作是一个四节点的“墩柱单元”。在整体坐标系  $oxy$  中, 设其刚度方程式为  $[K] \{\delta\}^e = \{F\}^e$  (38) 式中

$$\{\delta\}^e = [u_i, v_i, \theta_i, u_j, v_j, v_m]^T$$

$$\{F\}^e = [X_i, Y_i, M_i, X_j, Y_j, M_j]^T$$

如图 9 所示, 根据平面假定, 柱上端截面的位移图亦绘在图 9 中。显然可以得到下列关系:

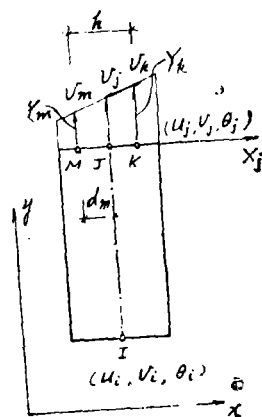


图 9

$$v_j = v_m + \frac{v_k - v_m}{h} d_m$$

$$\theta_j = \frac{v_k - v_m}{h}$$

这样就可以用节点K和M的竖向位移 $v_k$ 和 $v_m$ 来表示杆件单元节点J的竖向位移 $v_j$ 以及转角 $\theta_j$ 。用矩阵表示这些变换关系如下:

$$\begin{Bmatrix} u_j \\ v_j \\ \theta_j \\ u_j \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{d_m}{h} & -\frac{d_m}{h} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{h}{1} & -\frac{1}{h} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_j \\ v_k \\ v_m \end{Bmatrix} \quad (39)$$

这就是单元节点位移向量的变换关系, 即

$$\{\delta\}^e = [A] \{\delta\}^e \quad (39a)$$

由逆步变换的规则, 立即可得单元节点力向量的变换为

$$\{F\}^e = [A]^T \{F\}^e \quad (40)$$

所以式(37)与(38)中的单元刚度矩阵的变换关系为

$$[K]^e = [A]^T [K] [A] \quad (41)$$

这就是四节点墩柱单元的刚度矩阵。写出为

$$[K]^e = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{l^3} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} S_1 & -\frac{6EI}{l^2} S_4 \\ 0 & \frac{EA}{1} & 0 & 0 & -\frac{EA}{1} S_2 & -\frac{EA}{1} S_3 \\ -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{4EI}{1} & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{1} S_1 & \frac{2EI}{1} S_4 \\ -\frac{12EI}{l^3} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} S_1 & -\frac{6EI}{l^2} S_4 \\ -\frac{6EI}{l^2} S_1 & \frac{EA}{1} S_2 & \frac{2EI}{1} S_1 & -\frac{6EI}{l^2} S_1 & \frac{EA}{1} S_2^2 + \frac{4EI}{1} S_1^2 & \frac{EA}{1} S_2 S_3 + \frac{4EI}{1} S_1 S_4 \\ -\frac{6EI}{l^2} S_4 & -\frac{EA}{1} S_3 & \frac{2EI}{1} S_4 & -\frac{6EI}{l^2} S_4 & \frac{EA}{1} S_2 S_3 + \frac{4EI}{1} S_1 S_4 & \frac{EA}{1} S_3^2 + \frac{4EI}{1} S_4^2 \end{bmatrix}$$

$$\text{式中 } S_1 = \frac{1}{h}, \quad S_2 = \frac{d_m}{h}, \quad S_3 = 1 - \frac{d_m}{h}, \quad S_4 = -\frac{1}{h}$$

其它记号不赘述。

根据上述公式编制了计算程序, 并计算了几个实际问题, 表明效果良好。对于多跨简支梁桥沿桥纵轴方向的振动计算, 采用这种过渡单元来反映桥墩与纵梁的连结情况看来将是合理的。

文中错误缺点可能很多, 请批评指正。

## 参 考 文 献

- [1] A. S. 哈尔, A. P. 凯培拉著, 赵超斐等译, 结构分析原理, 中国建筑工业出版社, 1981。
- [2] J. S. 普齐米尼斯基著, 王德荣等译, 矩阵结构分析理论, 国防工业出版社, 1974。
- [3] 华东水利学院, 弹性力学问题的有限单元法修订版, 水利电力出版社, 1978。
- [4] C. S. 德赛等著, 江伯南等译, 有限元素法引论, 科学出版社, 1978。
- [5] 清华大学工程力学系, 机械振动(上册), 机械工业出版社, 1980。
- [6] R. H. Gallagher, Finite Element Analysis Fundamentals, 1975。
- [7] G. B. Warburton, The Dynamical Behaviour of structures, second edition, 1976, 附录5。
- [8] K. J. Bathe, E. L. Wilson, Numerical Methods in Finite Element Analysis, 1976。
- [9] R. D. Cook, Concepts and Applications of Finite Element Analysis, 1974。
- [10] O. C. Zienkiewicz, The Finite Element Method, 1977。
- [11] W. McGuire, R. H. Gallagher, Matrix structural Analysis, 1979。
- [12] W. M. Jenkins, Matrix and Digital computer Methods in Structural Analysis, 1969。
- [13] R. K. Livesly, Matrix Methods of structural Analysis, 1964。
- [14] W. Flügge, Handbook of Engineering Mechanics 1962, 第33章。
- [15] F. B. Hildebrand, Methods of Applied Mathematics, 1960。
- [16] 寿楠椿, 杆系结构中局部间断的程序处理, 中国建筑学会结构委员会有限元计算法学术会议论文集, 第二集, 1979年11月。

---

(上接73页)

## 参考文献

1. R. PARK and T. PAULAY "Reinforced, concrete Structure" 1975年。
2. 《钢筋混凝土偏心受压构件正截面强度问题试验研究报告》钢筋混凝土结构设计规范偏压专题小组, 1976年。
3. 《钢筋混凝土偏心受压构件正截面强度问题试验研究报告》附件二, 钢筋混凝土结构设计规范偏压专题小组, 1976年。