

钢筋混凝土整体式肋形板的实测与分析

工程结构教研室 张岐宣

符 号 说 明

- l —梁板的跨度;
 a —板的宽度;
 b —梁的宽度;
 c —1/2板厚处到梁重心轴的距离;
 h —梁的高度;
 δ —板的厚度;
 A —梁的截面面积;
 J —梁的截面惯性矩;
 D —板的抗弯刚度: $D = \frac{E_h \delta^3}{12(1-\mu^2)}$
 E_h —混凝土弹性模量;
 μ —混凝土泊松系数.

一、问题的提出

某三层混合结构办公楼,墙体为一砖半承重砖墙,楼板为钢筋混凝土板。该楼二层和三层四角共有八个大间(图1),中间设置一根肋形梁,梁的截面尺寸为 **$b \times h = 22 \times 40$** 公分,

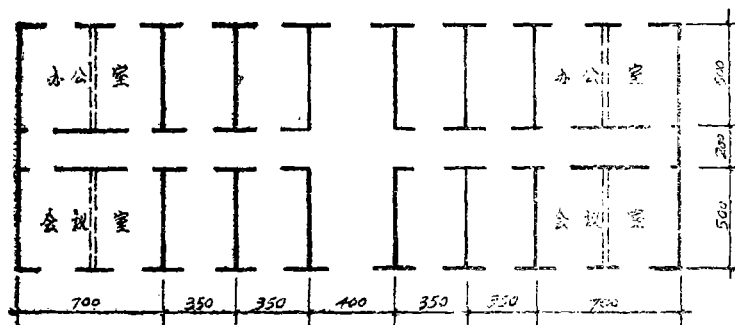


图1 二楼三楼平面图

板的厚度 $\delta=8$ 公分。按原计算,板的恒载为 $q_{\text{恒}}=350$ 公斤/厘米²,板的计算活荷载为 $p_{\text{活}}=280$ 公斤/厘米²,梁的内力计算简图如图2所示,按原钢筋混凝土结构设计规范BJG21-66计算需配5号钢筋 $A_g=7.03$ 厘米²,但由于制图笔误,实际配了5号钢筋 $2\phi 12$,即 $A_g=2.26$ 厘米²。比设计少配三分之二的钢筋。

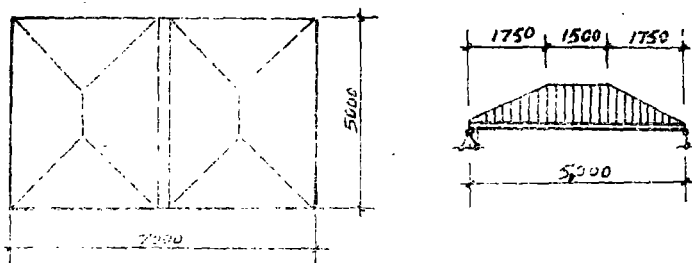


图2 原梁内力计算简图

在未发现问题的以前,工程已交付使用数月,在此时间内,有五六十人在室内开过会(相当活荷载100公斤/米²左右)。发现问题以后,对梁进行了检查,在二楼只发现在梁的跨中有宽度约为0.1毫米的两根裂缝,裂缝伸展至梁高的三分之二。在三楼只发现梁的跨中有宽度约为0.2毫米的一根裂缝,裂缝伸展至板的下边缘,实际情况表明,结构工作正常。因此,这就提出了一个问题,为什么梁内少配三分之二的钢筋仍能正常工作?为了回答这一问题,对实际结构进行了量测和分析研究。

二、实测概况

(一) 实测目的与内容

在实测以前,根据楼盖的构造和使用情况,对梁没有破损现象的原因作了初步分析,认为可能有这些有利因素在原设计中没有考虑,即支座约束、梁板共同作用、楼板面层和填层参加工作、混凝土和钢材实际强度可能超过设计强度和实际荷载小于设计荷载等。因此实测的主要目的;一方面是测定在计算荷载作用下结构的工作状态,从而检查结构是否安全可靠;另一方面测定材料强度及一些参数,为分析支座约束和梁板共同工作提供依据。根据此目的,选定二楼和三楼西南间作重点实测对象。实测内容主要包括梁的混凝土标号、钢筋的强度、梁的反弯点位置、挠度、倾角和钢筋应力,以及裂缝的宽度和分布情况等。

(二) 仪表布置

二楼和三楼西南大间房子量测仪表布置如图3所示。

图中梁和板下的百分表是用来量测梁和板的最大挠度值和挠度曲线。梁两端的倾向仪是用来量测支座转角。梁跨中截面的杠杆仪是用来量测最大弯矩截面的应变和中和轴的位置。梁端的杠杆仪是用来测定反弯点的位置。梁跨中截面钢筋上的应变片用来测定钢筋应变。

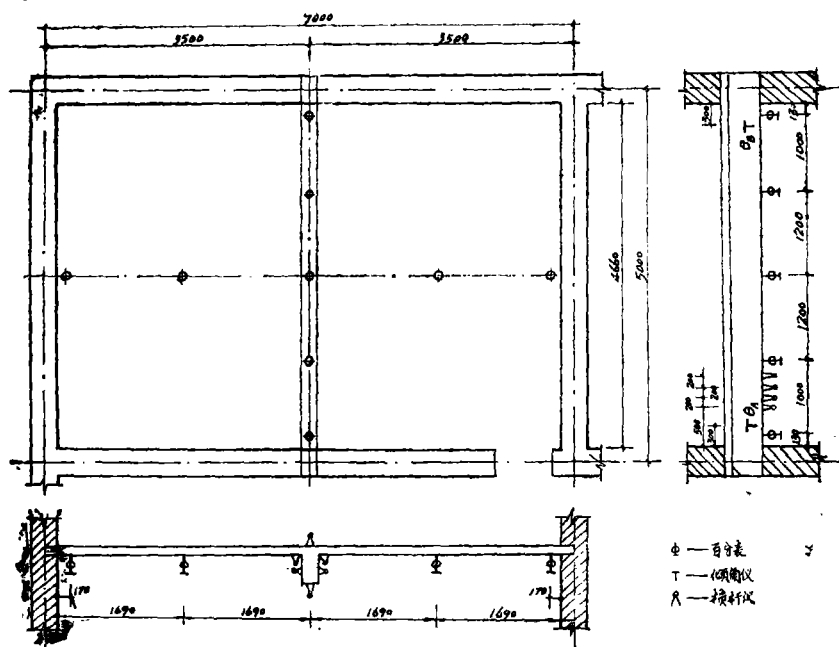


图3 量测仪表布置图

(三) 加载方法

全部采用砖加载。每间作三种荷载的试验：

1、集中荷载试验。荷载集中作用在 90×90 厘米面积上(图4-①),荷载等级为250、500、800和1200公斤。

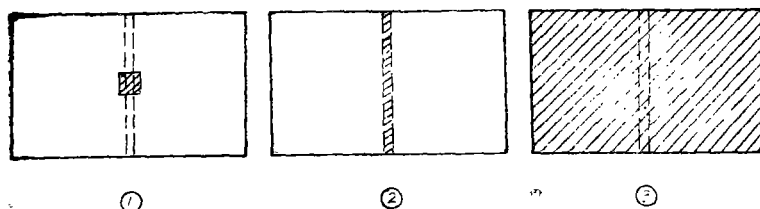


图4 荷载图式

2、条形荷载试验。荷载作用在梁上(图4-②),荷载等级为100、200、300和400公斤/米。

3、均布荷载试验。荷载均匀分布在整個板上(图4-③),荷载等级为50、100、150、200和250公斤/米²。

(四) 量测结果与分析

1、三楼梁的跨中挠度、支座转角和钢筋应变量测结果如图5所示。从图中可见,在设

计荷载作用下, 构件挠度、支座转角及钢筋应变均与荷载基本上成线性关系, 表明构件处于正常使用状态。在构件变形方面: 在设计荷载200公斤/米²作用下, 二楼和三楼梁跨中最大挠度值为0.508厘米和0.53厘米, 其相对挠度值为 $\frac{1}{984}$ 和 $\frac{1}{943}$, 均小于 $\frac{1}{200}$, 由此可见在使用荷载作用下变形满足使用要求。在裂缝展开方面, 二楼西南大间加载至200公斤/米²时, 裂缝宽度维持原先的0.1毫米, 并没有增加。三楼西南大间加载至200公斤/米², 裂缝宽度亦维持原先的0.2毫米, 亦没有增加, 裂缝高度均无变化, 都在允许范围以内。在钢筋应力方面每平方厘米仅达到一千一百多公斤, 若加上自重产生的应力, 亦不可能达到屈服强度。根据上述诸方面量测结果, 结构在使用荷载作用下处于正常工作状态。

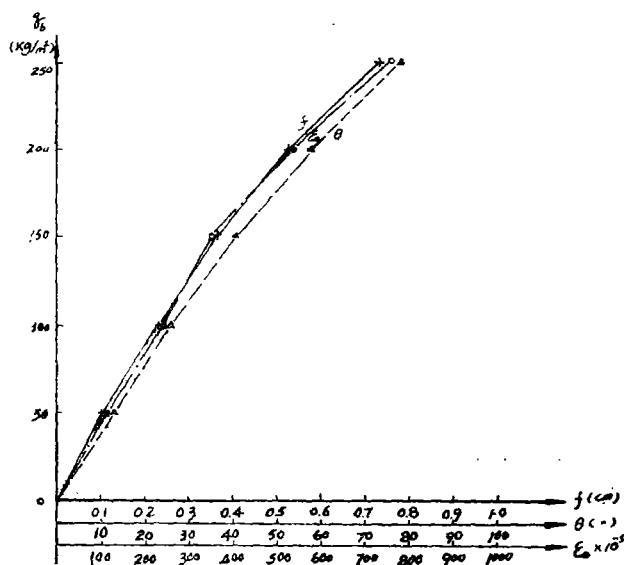


图5 三楼梁跨中挠度、支座转角、钢筋应变与荷载实测曲线

2、支座约束度。所谓支座约束度是指实测的支座平均弯矩和跨中弯矩之比值。实测的支座平均弯矩和跨中弯矩比值, 可以根据实测的支座角位移和跨中挠度换算而得, 其换算公式当为集中荷载时 (图6-①):

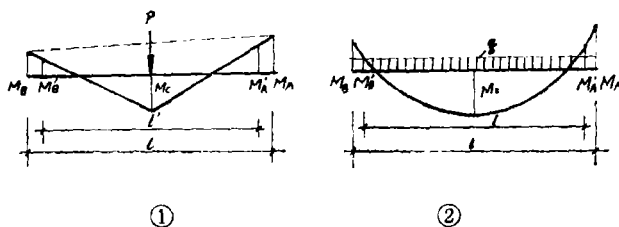


图6 弯矩示意图

$$\frac{M_0}{M_c} = \left[\left(1 + \frac{M_0'}{M_c} \right) \frac{l}{l'} - 1 \right] \quad (1)$$

式中 $M_0 = \frac{1}{2} (M_A + M_B)$

$$\frac{M_{O'}}{M_c} = \frac{1}{2} \left(\frac{M_{a'}}{M_c} + \frac{M_{b'}}{M_c} \right)$$

$$\frac{M_{a'}}{M_c} = -\frac{24fc - l'(7\theta_{a'} + \theta_{b'})}{24fc - 2l'(\theta_{a'} + \theta_{b'})}; \quad \frac{M_{b'}}{M_c} = -\frac{24fc - l'(7\theta_{a'} + \theta_{b'})}{24fc - 2l'(\theta_{a'} + \theta_{b'})}$$

均布荷载 (图 6-②):

$$\frac{M_O}{M_c} = \left[\left(1 + \frac{M_{O'}}{M_c} \right) \left(\frac{l}{l'} \right)^2 - 1 \right] \quad (2)$$

式中 $M_O = \frac{1}{2}(M_a + M_b)$

$$\frac{M_{O'}}{M_c} = \frac{1}{2} \left(\frac{M_{a'}}{M_c} + \frac{M_{b'}}{M_c} \right)$$

$$\frac{M_{a'}}{M_c} = -\frac{32fc - 2l'(\theta_{a'} + 4\theta_{b'})}{16fc - l'(\theta_{a'} + \theta_{b'})}; \quad \frac{M_{b'}}{M_c} = -\frac{32fc - 2l'(4\theta_{a'} + \theta_{b'})}{16fc - l'(\theta_{a'} + \theta_{b'})}$$

二楼和三楼梁的支座约束度, 根据实测的 $fc\theta_{a'}$ 和 $\theta_{b'}$, 按上述换算公式换算结果如表 1 和表 2

二楼和三楼梁的支座约束度还可以根据梁支座附近量测的弯矩零点的位置计算而定。二楼在集中荷载作用下弯矩零点到支座边的距离为 102 公分 (图 7-①), 则支座约束度为 $120/(233-102) = 77.8\%$ 。三楼在集中荷载作用下弯矩零点到支座边的距离为 80 公分 (图 7-②), 则支座约束度为 $80/(233-80) = 52\%$ 。

二楼梁的支座平均约束度

表 1

荷载形式	荷载等级	倾 角		挠度 f_c ($\frac{1}{100}$ cm)	$\frac{M_{O'}}{M_c}$	$\frac{M_O}{M_c}$	平均约束度	
		$\theta_{a'}$	$\theta_{b'}$				单 项	平 均
集中荷载 (kg)	500	7"	8"	9.05	0.58	0.82	82%	75.5%
	800	17.5"	19.5"	17.3	0.465	0.69	69%	
均布荷载 (kg/m ²)	30	4		2.1	0.74	1.28	64%	74.3%
	60	9.5		9.0	0.92	1.53	78%	
	90	16		15.8	0.99	1.61	80.5%	
	120	23		20.6	0.85	1.42	71%	
	150	31		29.4	0.91	1.55	78%	

注 均布荷载作用时, $\theta_{b'}$ 没有量测, 在换算时, 令 $\theta_{b'} = \theta_{a'}$

三樓梁的支座平均約束度

表 2

荷載形式	荷載等級	傾 角		撓度 f_c ($\frac{1}{100}$ cm)	$\frac{M_o'}{M_c}$	$\frac{M_o}{M_c}$	平均約束度	
		$\theta_{a'}$	$\theta_{b'}$				單 項	平均
集中荷載 (kg)	250	4"	6.4"	3.96	0.31	0.503	50.3%	51.8%
	500	8.2"	13"	7.66	0.275	0.464	46.4%	
	800	13.0"	20.7"	12.0	0.361	0.562	56.2%	
	1200	19.5"	31.0"	19.2	0.345	0.544	54.4%	
均布荷載 (kg/m ²)	50	10"	14"	8.89	0.511	0.995	50.9%	58.3%
	100	22"	30"	21.04	0.745	1.29	64.9%	
	150	36"	46"	31.8	0.629	1.15	57.5%	
	200	52"	65"	46.19	0.651	1.16	58%	
	250	72"	86"	64.49	0.713	1.27	63.5	

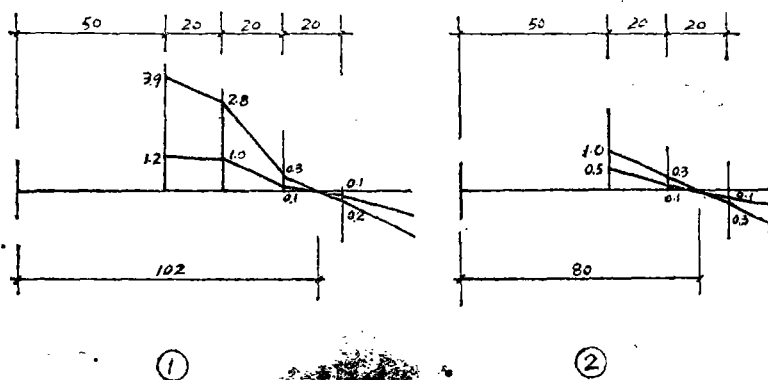


图 7 集中荷載作用下彎矩零點位置

根据上述量測結果，可見二樓平均支座約束度為 $(75.5+74.3+77.8)\% \div 3 = 75.87\%$ ，三樓平均支座約束度 $(58.3+51.8+52)\% \div 3 = 54.03\%$ ，二樓支座約束度比三樓的大，這是因為二樓梁支座上的壓力比三樓大的緣故。一般支座約束度隨構件伸入牆內的長度增加而增加；隨支座上部結構傳來的壓力增大而增加；隨接觸處的局部壓縮變形增加而減少；隨牆體的剛度增加而增加。

三、理論分析

(一) 基本假定和基本體系

在分析钢筋混凝土肋形樓蓋使用階段的內力時，有下列基本假定：

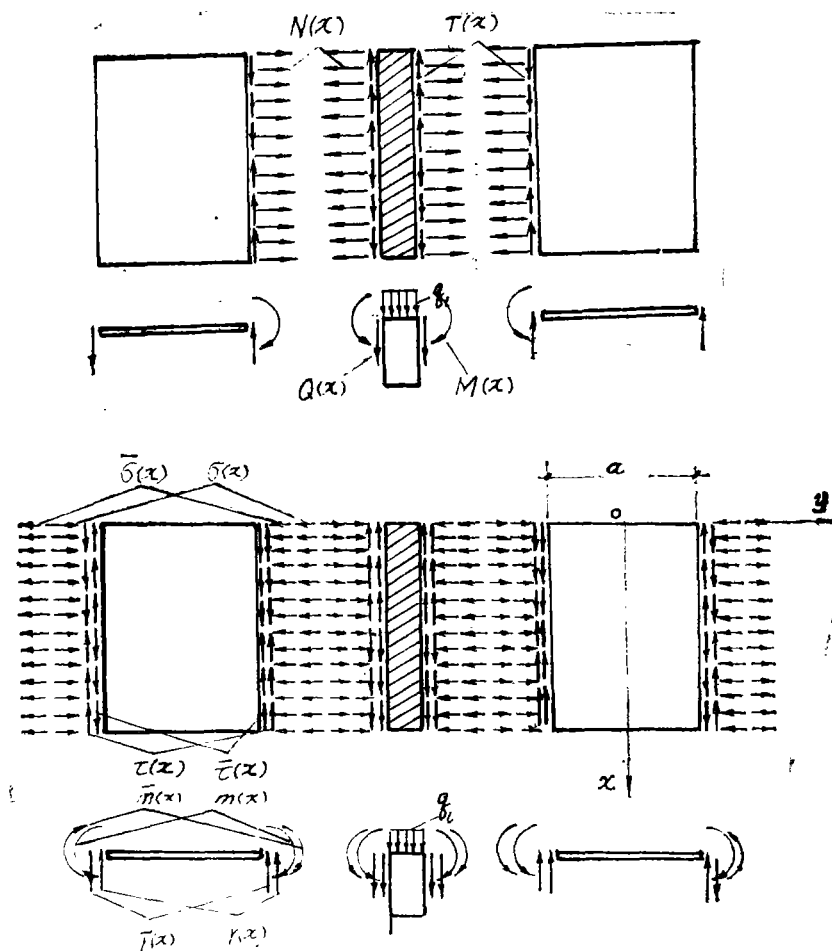


图10 荷载作用在梁上内力计算简图

$$\left. \begin{aligned} T(x) &= \tau(x) \pm \bar{\tau}(x) \\ N(x) &= \sigma(x) \pm \bar{\sigma}(x) \\ Q(x) &= r(x) \pm \bar{r}(x) \\ M(x) &= m(x) \pm \bar{m}(x) \end{aligned} \right\} (3)$$

在梁板交接处取“+”号，在相应的简支支承处取“-”号。由板的边界条件可知 $\tau(x) = \bar{\tau}(x)$ 、 $\sigma(x) = \bar{\sigma}(x)$ 、和 $m(x) = \bar{m}(x)$ ，在梁板的交接处：

$$\left. \begin{aligned} T(x) &= 2\tau(x) \\ N(x) &= 2\sigma(x) \\ Q(x) &= r(x) + \bar{r}(x) \\ M(x) &= 2m(x) \end{aligned} \right\} (3')$$

式中未知内力，以三角级数表示：

$$\left. \begin{aligned} \tau(x) &= \sum_{m=1}^{\infty} \alpha \cos \frac{m\pi x}{l}, & \bar{\tau}(x) &= \sum_{m=1}^{\infty} \bar{\alpha} \cos \frac{m\pi x}{l} \\ \sigma(x) &= \sum_{m=1}^{\infty} \beta \cos \frac{m\pi x}{l}, & \bar{\sigma}(x) &= \sum_{m=1}^{\infty} \bar{\beta} \cos \frac{m\pi x}{l} \\ r(x) &= \sum_{m=1}^{\infty} \xi \sin \frac{m\pi x}{l}, & \bar{r}(x) &= \sum_{m=1}^{\infty} \bar{\xi} \sin \frac{m\pi x}{l} \\ m(x) &= \sum_{m=1}^{\infty} \zeta \sin \frac{m\pi x}{l}, & \bar{m}(x) &= \sum_{m=1}^{\infty} \bar{\zeta} \sin \frac{m\pi x}{l} \end{aligned} \right\} (4)$$

式中 $\alpha = \alpha$, $\beta = \beta$, $\xi \neq \bar{\xi}$ 和 $\zeta = \bar{\zeta}$, 均为待定系数

2. 基本方程。当荷载作用在梁上时, 板的基本方程为:

$$\nabla \nabla \omega = 0 \quad (5)$$

$$\text{式中 } \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

设在对称和反对称弯矩作用下板的挠度方程为:

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{l} + B_m \frac{m\pi y}{l} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{l} + C_m \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{l} + D_m \frac{m\pi y}{l} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{l}) \sin \frac{m\pi x}{l} \quad (6)$$

式中系数 A_m 、 B_m 、 C_m 和 D_m 由下列边界条件确定:

$$y = \frac{a}{2} \quad -D \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right) = \sum_{m=1}^{\infty} 2\zeta \sin \frac{m\pi x}{l} \quad (7)$$

$$D \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + (2-\mu) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right] = \sum_{m=1}^{\infty} (\xi + \bar{\xi}) \sin \frac{m\pi x}{l} \quad (8)$$

$$y = -\frac{a}{2} \quad -D \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right) = 0 \quad (9)$$

$$D \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + (2-\mu) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right] = \sum_{m=1}^{\infty} (-\xi + \bar{\xi}) \sin \frac{m\pi x}{l} \quad (10)$$

将挠度方程(6)代入(7)(8)(9)和(10), 解联立方程求得 A_m 、 B_m 、 C_m 和 D_m , 然后代入(6)式, 则挠度方程为:

$$\begin{aligned} \omega = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{D} \left(\frac{1}{m\pi} \right)^2 & \left\{ \frac{[\operatorname{sh} r_m(1+\mu) - r_m \operatorname{ch} r_m(1-\mu)] \xi + \frac{l}{m\pi} [2 \operatorname{ch} r_m + r_m \operatorname{sh} r_m(1-\mu)] \bar{\xi}}{[\operatorname{sh} 2r_m(\frac{3+\mu}{2}) - r_m(1-\mu)](1-\mu)} \right. \\ & \times \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{l} + \frac{\operatorname{sh} r_m \xi - \frac{l}{m\pi} \operatorname{ch} r_m \bar{\xi}}{\operatorname{sh} 2r_m(\frac{3+\mu}{2}) - r_m(1-\mu)} \frac{m\pi y}{l} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{l} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{[\operatorname{chr}_m(1+\mu) - r_m \operatorname{sh}(1-\mu)] \bar{\xi} + \frac{l}{m\pi} [2\operatorname{shr}_m + r_m \operatorname{ch}(1-\mu)] \bar{\xi}}{[\operatorname{sh} 2r_m(\frac{3+\mu}{2}) + r_m(1-\mu)](1-\mu)} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{l} \\
& + \frac{\operatorname{chr}_m \bar{\xi} - \frac{l}{m\pi} \operatorname{shr}_m \bar{\xi}}{\operatorname{shr}_m(\frac{3+\mu}{2}) + r_m(1-\mu)} \frac{m\pi y \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{l}}{\operatorname{sh} \frac{m\pi y}{l}} \left. \operatorname{Sin} \frac{m\pi x}{l} \right\} \quad (6')
\end{aligned}$$

式中 $r_m = \frac{m\pi a}{2l}$

式中待定系数 $\bar{\xi}$ 、 $\bar{\xi}$ 和 $\bar{\xi}$ 由边界条件求解。

3、板的边界条件和待定系数的计算

①在 $y=a/2$ 处, y 方向的倾角应等于零即:

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=a/2} = 0$$

由公式 (6') 微分而得:

$$\begin{aligned}
& \frac{2\operatorname{sh}^2 r_m \bar{\xi} + \frac{l}{m\pi} [\operatorname{sh} 2r_m(\frac{1+\mu}{2}) - r_m(1-\mu)] \bar{\xi}}{\operatorname{sh} 2r_m(\frac{3+\mu}{2}) - r_m(1-\mu)} \\
& + \frac{2\operatorname{ch}^2 r_m \bar{\xi} + \frac{l}{m\pi} [\operatorname{sh} 2r_m(\frac{1+\mu}{2}) + r_m(1-\mu)] \bar{\xi}}{\operatorname{sh} 2r_m(\frac{3+\mu}{2}) + r_m(1-\mu)} = 0 \quad (11)
\end{aligned}$$

②在 $y=-a/2$ 处, x 方向的曲率应等于零即:

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{y=-a/2} = 0$$

由公式 (6') 微分而得:

$$\begin{aligned}
& \frac{[\operatorname{sh} 2r_m(\frac{1+\mu}{2}) - r_m(1-\mu) \operatorname{ch} 2r_m] \bar{\xi} + \frac{2l}{m\pi} \operatorname{ch}^2 r_m \bar{\xi}}{\operatorname{sh} 2r_m(\frac{3+\mu}{2}) - r_m(1-\mu)} \\
& - \frac{[\operatorname{sh} 2r_m(\frac{1+\mu}{2}) - r_m(1-\mu) \operatorname{ch} 2r_m] \bar{\xi} + \frac{2l}{m\pi} \operatorname{sh}^2 r_m \bar{\xi}}{\operatorname{sh} 2r_m(\frac{3+\mu}{2}) + r_m(1-\mu)} = 0 \quad (12)
\end{aligned}$$

③在 $y=a/2$ 处, 板与梁的纵向应变相等即

$$\varepsilon_{hl} = \varepsilon_{hb}$$

今以交接处板厚一半处的纵向纤维为对象。

板厚一半处梁的纤维应变 ε_{hl} 是由于作用在梁上的荷载 q_l 而产生的弯矩 M 、梁板交接处的水平剪力 $T(x)$ 和垂直剪力 $Q(x)$ 而引起即:

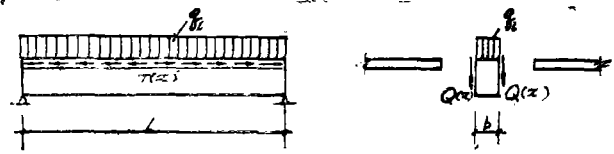


图11 应变计算示意图

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{hl} = & -\frac{Mc}{JE_h} + \frac{2\delta}{E_h} \left(\frac{1}{A} + \frac{c^2}{J} \right) \int_0^x [\tau(x) + \bar{\tau}(x)] dx \\
 & - \frac{2c}{JE_h} \left\{ x \int_0^x [Q(x) + \bar{Q}(x)] dx - \int_0^x x [Q(x) + \bar{Q}(x)] dx \right\} \\
 = & -\frac{Mc}{JE_h} + \frac{2\delta}{E_h} \left(\frac{1}{A} + \frac{c^2}{J} \right) \int_0^x \sum_{m=1}^{\infty} (\alpha + \bar{\alpha}) \cos \frac{m\pi x}{l} dx \\
 & - \frac{2c}{JE_h} \left\{ x \int_0^x \sum_{m=1}^{\infty} (\xi + \bar{\xi}) \sin \frac{m\pi x}{l} dx - \int_0^x x \sum_{m=1}^{\infty} (\xi + \bar{\xi}) \sin \frac{m\pi x}{l} dx \right\}
 \end{aligned}$$

板厚一半处板的纤维变形 ε_{hb} 是由于梁板交接处的水平剪力 $T(x)$ 和法向力 $N(x)$ 的作用而产生的正应力 σ_x 和 σ_y 求得即

$$\varepsilon_{hb} = \frac{1}{E_h} (\sigma_x - \mu \sigma_y) \quad (13)$$

式中正应力 σ_x 和 σ_y 的一般表达式为:

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_x = & - \sum_{m=1}^{\infty} \{ \alpha \theta(m, y) + \beta \eta(m, y) + \bar{\alpha} \bar{\theta}(m, y) + \bar{\beta} \bar{\eta}(m, y) \} \sin \frac{m\pi x}{l} \\
 \sigma_y = & - \sum_{m=1}^{\infty} \{ \alpha \varphi(m, y) + \beta \psi(m, y) + \bar{\alpha} \bar{\varphi}(m, y) + \bar{\beta} \bar{\psi}(m, y) \} \sin \frac{m\pi x}{l}
 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

在梁板交接处 $y=a/2$ 的正应力:

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_x = & - \sum_{m=1}^{\infty} \{ \alpha \theta(m, \frac{a}{2}) + \beta \eta(m, \frac{a}{2}) + \bar{\alpha} \bar{\theta}(m, \frac{a}{2}) + \bar{\beta} \bar{\eta}(m, \frac{a}{2}) \} \sin \frac{m\pi x}{l} \\
 \sigma_y = & - \sum_{m=1}^{\infty} \{ \alpha \varphi(m, \frac{a}{2}) + \beta \psi(m, \frac{a}{2}) + \bar{\alpha} \bar{\varphi}(m, \frac{a}{2}) + \bar{\beta} \bar{\psi}(m, \frac{a}{2}) \} \sin \frac{m\pi x}{l}
 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \text{式中: } \theta(m, \frac{a}{2}) &= \frac{4ch^2 r_m}{sh2r_m + 2r_m} & \bar{\theta}(m, \frac{a}{2}) &= \frac{4ch^2 r_m}{sh2r_m - 2r_m} \\
 \eta(m, \frac{a}{2}) &= \frac{sh2r_m - 2r_m}{sh2r_m + 2r_m} & \bar{\eta}(m, \frac{a}{2}) &= \frac{sh2r_m + 2r_m}{sh2r_m - 2r_m} \\
 \varphi(m, \frac{a}{2}) &= \bar{\varphi}(m, \frac{a}{2}) = 0 \\
 \psi(m, \frac{a}{2}) &= \bar{\psi}(m, \frac{a}{2}) = 1
 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

代入 (13) 式, 整理后得:

$$\varepsilon_{hb} = -\frac{1}{E_h} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\alpha \theta(m, \frac{a}{2}) + \beta \eta(m, \frac{a}{2}) + \bar{\alpha} \bar{\theta}(m, \frac{a}{2}) + \bar{\beta} \bar{\eta}(m, \frac{a}{2}) - \mu(\beta + \bar{\beta}) \right] \sin \frac{m\pi x}{l} \quad (13)$$

由梁板变形协调条件 $\varepsilon_{hl} = \varepsilon_{hb}$, 同时考虑到结构与荷载对称, $\alpha = \bar{\alpha}$, $\beta = \bar{\beta}$, 整理简化得:

$$\alpha \left[\theta(m, \frac{a}{2}) + \bar{\theta}(m, \frac{a}{2}) + \frac{4\delta_l}{m\pi} \left(\frac{1}{A} + \frac{c^2}{J} \right) \right] + \beta \eta(m, \frac{a}{2}) + \eta(m, \frac{a}{2}) - 2\mu \left[-\frac{2c_l^2}{m^2\pi^2 J} (\xi + \bar{\xi}) \right] = f(x) \quad (17)$$

$$\text{式中 } f(x) = \frac{2}{l} \int_0^l \frac{cM}{J} \sin \frac{m\pi x}{l} dx = \frac{2}{l} \int_0^l \frac{c}{J} \frac{q_l}{2} x(1-x) \sin \frac{m\pi x}{l} dx = -\frac{2q_l c_l^2}{m^3 \pi^3 J} (\cos m\pi - 1)$$

④在 $y=a/2$ 处, 板在水平平面内的曲率为零即

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{\partial \varepsilon_{hb}}{\partial y} = 0$$

公式 (13) 和 (14) (13'), 并经整理后得:

$$\alpha \left[\frac{\partial \theta}{\partial y}(m, \frac{a}{2}) + \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y}(m, \frac{a}{2}) + 2\mu \frac{m\pi}{l} \right] + \beta \left[\frac{\partial \eta}{\partial y}(m, \frac{a}{2}) + \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial y}(m, \frac{a}{2}) \right] = 0 \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \text{式中 } \frac{\partial \theta}{\partial y}(m, \frac{a}{2}) &= \frac{m\pi(3\text{sh}2r_m + 2r_m)}{l(\text{sh}2r_m + 2r_m)} \\ \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y}(m, \frac{a}{2}) &= \frac{m\pi(3\text{sh}2r_m - 2r_m)}{l(\text{sh}2r_m - 2r_m)} \\ \frac{\partial \eta}{\partial y}(m, \frac{a}{2}) &= -\frac{4m\pi\text{sh}^2 r_m}{l(\text{sh}2r_m + 2r_m)} \\ \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial y}(m, \frac{a}{2}) &= -\frac{4m\pi\text{sh}^2 r_m}{l(\text{sh}2r_m - 2r_m)} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y}(m, \frac{a}{2}) &= \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y}(m, \frac{a}{2}) = -\frac{m\pi}{2} \\ \frac{\partial \psi}{\partial y}(m, \frac{a}{2}) &= \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial y}(m, \frac{a}{2}) = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

⑤在 $y=a/2$ 处, 在垂直平面内梁板的曲率相等即

$$\frac{1}{\rho_l} = E_h \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right)_{y=\frac{a}{2}}$$

梁的曲率为 $\frac{1}{\rho_l} = \frac{\varepsilon_{hl}}{a}$, 设板的曲率为 $\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right)_{y=\frac{a}{2}} = \frac{1}{E_h} \sum_{m=1}^{\infty} \Omega \sin \frac{m\pi x}{l}$, 根据 ε_{hl} 计算公

式和挠度方程(6')计算, 整理后得:

$$\frac{4\delta l}{m\pi} \left(\frac{1}{Ac} + \frac{c}{J} \right) \alpha - \frac{2l^2}{m^2\pi^2 J} (\xi + \bar{\xi}) - \Omega = f(x) \quad (20)$$

式中 $f(x) = \frac{2}{l} \int_0^l \frac{M}{J} \sin \frac{m\pi x}{l} dx = -\frac{2Q_0 l^2}{m^3 \pi^3 J} (\cos m\pi - 1)$

$$\begin{aligned} \Omega = & \frac{[\operatorname{sh} 2r_m (\frac{1+\mu}{2}) - r_m (1-\mu)] \xi + \frac{l}{m\pi} 2\operatorname{ch}^2 r_m \xi}{\frac{\delta^3}{12(1-\mu^2)} [\operatorname{sh} 2r_m (\frac{3+\mu}{2}) - r_m (1-\mu)] (1-\mu)} \\ & + \frac{[\operatorname{sh} 2r_m (\frac{1+\mu}{2}) + r_m (1-\mu)] \bar{\xi} + \frac{1}{m\pi} 2\operatorname{sh}^2 r_m \bar{\xi}}{\frac{\delta^3}{12(1-\mu^2)} [\operatorname{sh} 2r_m (\frac{3+\mu}{2}) + r_m (1-\mu)] (1-\mu)} \end{aligned} \quad (21)$$

上述五个方程中包括五个未知数 α 、 β 、 ξ 、 $\bar{\xi}$ 和 Ω , 联解求之, 然后代回挠度方程(6')再根据弹性板的内力公式, 即可求出板的内力, 同时亦可求出梁的内力。

(三) 荷载作用在板上时的内力分析

1、计算简图。与荷载作用在梁上时的内力计算简图相似, 荷载作用在板上时的内力计算简图如图 12 所示。

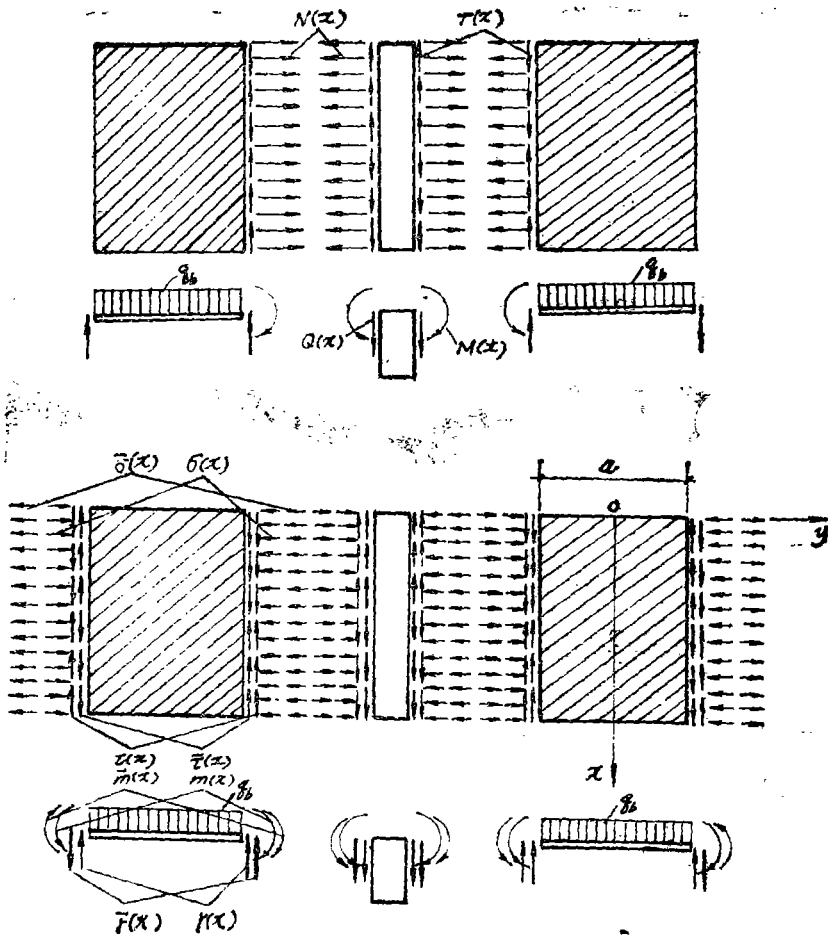


图12 荷载作用在板上时内力计算简图

$$\nabla \nabla \omega = \frac{q}{D} \quad (22)$$

$$\text{式中 } \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

设板在均匀荷载和边界弯矩作用下的挠度方程为:

$$\begin{aligned} \omega = \frac{q l^4}{D} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{4}{m^5 \pi^5} + A_m \operatorname{ch} \frac{m \pi y}{l} + B_m \frac{m \pi y}{l} \operatorname{sh} \frac{m \pi y}{l} + C_m \operatorname{sh} \frac{m \pi y}{l} \right. \\ \left. + D_m \frac{m \pi y}{l} \operatorname{ch} \frac{m \pi y}{l} \right\} \sin \frac{m \pi x}{l} \end{aligned} \quad (23)$$

式中系数 A_m 、 B_m 、 C_m 和 D_m 由下列边界条件确定:

$$y = \frac{a}{2} \quad -D \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right) = \sum_{m=1}^{\infty} 2\xi \sin \frac{m \pi x}{l} \quad (24)$$

$$D \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{\partial y^2}{\partial y^2} + (2-\mu) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right\} = \sum_{m=1}^{\infty} (\xi + \bar{\xi}) \sin \frac{m \pi x}{l} \quad (25)$$

$$y = -\frac{a}{2} - D \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right) = 0 \quad (26)$$

$$D \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + (2-\mu) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right\} = \sum_{m=1}^{\infty} (-\xi + \bar{\xi}) \sin \frac{m \pi x}{l} \quad (27)$$

将挠度方程 (23) 代入 (24) (25) (26) 和 (27) 解联立方程得 A_m 、 B_m 、 C_m 和 D_m , 然后代回 (23) 式, 则得挠度方程为:

$$\begin{aligned} \omega = \frac{q_b l^4}{D} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{4}{m^5 \pi^5} + \right. \\ \left. - \left[\frac{\xi}{q_b l^4} \left(\frac{l}{m \pi} \right)^2 - \frac{4\mu}{m^5 \pi^5} \right] \left[\operatorname{sh} r_m (1+\mu) - r_m \operatorname{ch} (1-\mu) \right] - \frac{\xi}{q_b l^4} \left(\frac{l}{m \pi} \right)^3 \left[2 \operatorname{ch} r_m + r_m \operatorname{sh} r_m (1-\mu) \right] \right. \\ \left. \frac{\left[\operatorname{sh} 2 r_m \left(\frac{3+\mu}{2} \right) - r_m (1-\mu) \right] (1-\mu)}{\operatorname{sh} 2 r_m \left(\frac{3+\mu}{2} \right) - r_m (1-\mu)} \right\} \\ \times \operatorname{ch} \frac{m \pi y}{l} + \frac{- \left[\frac{\xi}{q_b l^4} \left(\frac{l}{m \pi} \right)^2 - \frac{4\mu}{m^5 \pi^5} \right] \operatorname{sh} r_m + \frac{\xi}{q_b l^4} \left(\frac{l}{m \pi} \right)^3 \operatorname{ch} r_m}{\operatorname{sh} 2 r_m \left(\frac{3+\mu}{2} \right) - r_m (1-\mu)} \frac{m \pi y \operatorname{sh} \frac{m \pi y}{l}}{l} \\ + \frac{- \frac{\xi}{q_b l^4} \left(\frac{l}{m \pi} \right)^2 \left[\operatorname{ch} r_m (1+\mu) - \frac{\xi}{q_b l^4} \left(\frac{l}{m \pi} \right)^3 \left[2 \operatorname{sh} r_m + r_m \operatorname{ch} r_m (1-\mu) \right] \right]}{\left[\operatorname{sh} 2 r_m \left(\frac{3+\mu}{2} \right) + r_m (1-\mu) \right] (1-\mu)} \operatorname{sh} \frac{m \pi y}{l} \end{aligned}$$

$$+ \frac{-\frac{\xi}{q_b l^4} (\frac{l}{m\pi})^2 \text{ch} + \frac{\bar{\xi}}{q l^4} (\frac{l}{m\pi})^3 \text{sh} r_m}{\text{sh} 2r_m (\frac{3+\mu}{2}) + r_m (1-\mu)} \frac{m\pi y \text{ch} \frac{m\pi y}{l}}{l} \left\{ \sin \frac{m\pi x}{l} \right. \quad (23')$$

式中待定系数 ξ 、 $\bar{\xi}$ 和 $\bar{\xi}$ 由边界条件求解。

3、板的边界条件和待定系数的计算

$$\textcircled{1} \text{ 在 } y = \frac{a}{2} \text{ 处: } \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \right)_{y=a/2} = 0$$

由公式(23')微分而得

$$\frac{[\xi - \frac{4\mu}{m^5 \pi^5} q_b l^4 (\frac{m\pi}{l})^2] 2\text{sh}^2 r_m + \frac{l}{m\pi} [\text{sh} 2r_m (\frac{1+\mu}{2}) - r_m (1-\mu)] \bar{\xi}}{\text{sh} 2r_m (\frac{3+\mu}{2}) - r_m (1-\mu)} + \frac{2\text{ch}^2 r_m \xi + \frac{l}{m\pi} [\text{sh} 2r_m (\frac{1+\mu}{2}) + r_m (1-\mu)] \bar{\xi}}{\text{sh} 2r_m (\frac{3+\mu}{2}) + r_m (1-\mu)} = 0 \quad (28)$$

$$\textcircled{2} \text{ 在 } y = -\frac{a}{2} \text{ 处: } \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right)_{y=-a/2} = 0$$

$$\frac{4l^2 q_b (1-\mu)}{m^5 \pi^5} - \frac{[\frac{\xi}{l^2} (\frac{l}{m\pi})^2 - \frac{4\mu l^2 q_b}{m^5 \pi^5}] [\text{sh} 2r_m (\frac{1+\mu}{2}) - r_m \text{ch} 2r_m (1-\mu)] + \frac{2\bar{\xi}}{l^2} (\frac{l}{m\pi})^3 \text{ch}^2 r_m}{\text{sh} 2r_m (\frac{3+\mu}{2}) + r_m (1-\mu)} + \frac{\frac{\xi}{l^2} (\frac{l}{m\pi})^2 [\text{sh} 2r_m (\frac{1+\mu}{2}) - r_m \text{ch} 2r_m (1-\mu)] + \frac{2\bar{\xi}}{l^2} (\frac{l}{m\pi})^3 \text{sh}^2 r_m}{\text{sh} 2r_m (\frac{3+\mu}{2}) - r_m (1-\mu)} = 0 \quad (29)$$

$$\textcircled{3} \text{ 在 } y = a/2 \text{ 处: } \varepsilon_{hl} = \varepsilon_{hb}$$

同样以交接处板厚一半处的纤维为对象:

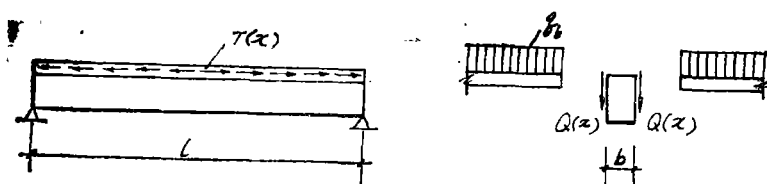


图13 应变计算示意图

$$\varepsilon_{hl} = \frac{2\delta}{E_h} \left(\frac{1}{A} + \frac{c^2}{J} \right) \int_0^x [\tau(x) + \bar{\tau}(x)] dx - \frac{2c}{E_h J} \left\{ x \int_0^x [Q(x) + \bar{Q}(x)] dx - \int_0^x x [Q(x) + \bar{Q}(x)] dx \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2\delta}{E_h} \left(\frac{1}{A} + \frac{c^2}{J} \right) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{l}{m\pi} (\alpha + \bar{\alpha}) \sin \frac{m\pi x}{l} - \frac{2c}{E_h J} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{l^2}{m^2 \pi^2} \\
&\quad \times (\xi + \bar{\xi}) \sin \frac{m\pi x}{l} \\
\varepsilon_{hb} &= -\frac{1}{E_h} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\alpha \theta \left(m, \frac{a}{2} \right) + \beta \eta \left(m, \frac{a}{2} \right) + \bar{\alpha} \bar{\theta} \left(m, \frac{a}{2} \right) \right. \\
&\quad \left. + \bar{\beta} \bar{\eta} \left(m, \frac{a}{2} \right) - \mu (\beta + \bar{\beta}) \right] \sin \frac{m\pi x}{l}
\end{aligned}$$

由 $\varepsilon_{hl} = \varepsilon_{hb}$, 整理后得:

$$\begin{aligned}
&\alpha \left[\theta \left(m, \frac{a}{2} \right) + \bar{\theta} \left(m, \frac{a}{2} \right) + \frac{4\delta l}{m\pi} \left(\frac{1}{A} + \frac{c^2}{J} \right) \right] + \beta \left[\eta \left(m, \frac{a}{2} \right) \right. \\
&\quad \left. + \bar{\eta} \left(m, \frac{a}{2} \right) - 2\mu - \frac{2cl^2}{m^2 \pi^2 J} (\xi + \bar{\xi}) \right] = 0
\end{aligned} \quad (30)$$

④在 $y = \frac{a}{2}$ 处: $\frac{1}{\rho_b} = \frac{\partial \varepsilon_{hb}}{\partial y} = 0$ 同公式 (18) 即:

$$\begin{aligned}
&\alpha \left[\frac{\partial \theta}{\partial y} \left(m, \frac{a}{2} \right) + \frac{\alpha \theta}{\alpha y} \left(m, \frac{a}{2} \right) + 2\mu \frac{m\pi}{l} \right] + \beta \left[\frac{\partial \eta}{\partial y} \left(m, \frac{a}{2} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial y} \left(m, \frac{a}{2} \right) \right] = 0
\end{aligned} \quad (31)$$

⑤在 $y = \frac{a}{2}$ 处: $\frac{1}{\rho_l} = E_h \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right)_{y=\frac{a}{2}}$ 则得

$$\frac{4\delta l}{m\pi} \left(\frac{1}{A_c} + \frac{c}{J} \right) \alpha - \frac{2l^2}{m^2 \pi^2 J} (\xi + \bar{\xi}) - \Omega = 0 \quad (32)$$

式中: $\Omega = \frac{\left[\text{sh} 2r_m \left(\frac{1+\mu}{2} \right) - r_m (1-\mu) \right] \xi + \frac{l}{m\pi} 2\text{ch}^2 r_m \xi}{\frac{\delta^3}{12(1-\mu^2)} \left[\text{sh} 2r_m \left(\frac{3+\mu}{2} \right) - r_m (1-\mu) \right] (1-\mu)}$

$$- \frac{4\delta b l^4}{m^5 \pi^5} \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \left[\text{sh} 2r_m \left(\frac{3+\mu}{2} \right) - r_m (1-\mu) \right]$$

$$\frac{\delta^3}{12(1-\mu^2)} \left[\text{sh} 2r_m \left(\frac{3+\mu}{2} \right) - r_m (1-\mu) \right] (1-\mu)$$

$$+ \frac{[\text{Sh} 2r_m (\frac{1+\mu}{2}) + r_m (1-\mu)] \bar{\xi} + \frac{1}{m\pi} 2\text{sh}^2 r_m \bar{\xi}}{\frac{\delta^3}{12(1-\mu^2)} [\text{sh} 2r_m (\frac{2+\mu}{2}) + r_m (1-\mu)] (1-\mu)} \quad (33)$$

上述五个方程中包括五个未知数 α 、 β 、 ζ 、 ξ 和 $\bar{\xi}$ ，联解求之，然后代回挠度方程(23')，再根据弹性板的内力公式，即可求出板的内力，同时亦可求出梁的内力。

(四) 梁跨中最大弯矩计算

作用在梁上的荷载产生的跨中弯矩(图11)

$$\begin{aligned} M'_{\max} &= \frac{1}{8} q l^2 - 2c\delta \int_0^{l/2} [\tau(x) + \bar{\tau}(x)] dx + \left\{ x \int_0^{l/2} [r(x) + \bar{r}(x)] dx - \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{l/2} x [r(x) + \bar{r}(x)] dx \right\} \\ &= \frac{1}{8} q l^2 - 2c\delta \int_0^{l/2} \sum_{m=1}^{\infty} (\alpha + \bar{\alpha}) \cos \frac{m\pi x}{l} dx + 2 \left\{ x \int_0^{l/2} \sum_{m=1}^{\infty} (\xi + \bar{\xi}) \sin \frac{m\pi x}{l} dx \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{l/2} x (\xi + \bar{\xi}) \sin \frac{m\pi x}{l} dx \right\} \quad (34) \end{aligned}$$

作用在板上的荷载使梁跨中产生的弯矩(图13)

$$\begin{aligned} M''_{\max} &= -2c\delta \int_0^{l/2} [\tau(x) + \bar{\tau}(x)] dx + 2 \left\{ x \int_0^{l/2} [r(x) + \bar{r}(x)] dx \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{l/2} x [r(x) + \bar{r}(x)] dx \right\} \\ &= -2c\delta \int_0^{l/2} \sum_{m=1}^{\infty} (\alpha + \bar{\alpha}) \cos \frac{m\pi x}{l} dx + 2 \left\{ x \int_0^{l/2} \sum_{m=1}^{\infty} (\xi + \bar{\xi}) \sin \frac{m\pi x}{l} dx \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{l/2} x (\xi + \bar{\xi}) \sin \frac{m\pi x}{l} dx \right\} \quad (35) \end{aligned}$$

则梁跨中最大弯矩值为

$$M_{\max} = M'_{\max} + M''_{\max} \quad (36)$$

(五) 实例计算

根据上述理论对实测的肋形板梁中最大弯矩计算如下：

1、参数计算： m 取两项，即 $m=1, 3$ 。

将表中值代入公式(16)和(19)，计算结果列于表(4)

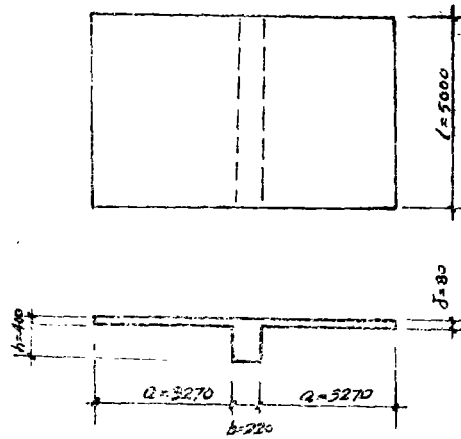


图14 结构尺寸

表 3

m	$r_m = \frac{m\pi a}{2l}$	$\text{sh}^2 r_m$	$\text{ch}^2 r_m$	$\text{sh } 2r_m$	$\text{ch } 2r_m$
1	1.02	1.455	2.45	3.78	3.91
3	3.06	113.5	114.1	227.62	2227.62

表 4

m	r_m	θ	$\bar{\theta}$	η	$\bar{\eta}$	$\frac{\partial y}{\partial \theta} (\frac{m}{l})$	$\frac{\partial \theta}{\partial y} (\frac{m}{l})$	$\frac{\partial \eta}{\partial y} (\frac{m}{l})$	$\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial y} (\frac{m}{l})$
1	1.02	1.686	3.35	0.299	3.36	7.22	16.85	3.15	17.8
3	3.06	1.955	2.04	0.945	1.055	9.25	9.60	6.08	6.495

2、荷载作用在梁上。将上述有关数值代入公式 (11) 至 (21)：

$m = 1$

$$\begin{aligned}
 & \frac{2 \times 1.455 \xi_1 + \frac{500}{1 \times 3.1416} \left[3.78 \times \frac{1+0.167}{2} - 1.02(1-0.167) \right] \xi_1}{3.78 \left(\frac{3+0.167}{2} \right) - 1.02(1-0.167)} \\
 & + \frac{2 \times 2.45 \xi_1 + \frac{500}{1 \times 3.1416} \left[3.78 \left(\frac{1+0.167}{2} \right) + 1.02(1-0.167) \right] \xi_1}{3.78 \left(\frac{3+0.167}{2} \right) + 1.02(1-0.167)} = 0 \\
 & \frac{\left[3.78 \left(\frac{1+0.167}{2} \right) - 1.02(1-0.167) \right] 3.91}{3.78 \left(\frac{3+0.167}{2} \right) - 1.02(1-0.167)} \xi_1 + \frac{2 \times 500}{1 \times 3.1416} \times 2.45 \xi_1
 \end{aligned}$$

$$- \frac{[3.78(\frac{1+0.167}{2}) - 1.02(1-0.167)3.91] \xi_1 + \frac{2 \times 500}{1 \times 3.1416} \times 1.455 \bar{\xi}_1}{3.78(\frac{3+0.167}{2}) + 1.02(1-0.167)} = 0$$

$$\alpha_1 [1.686 + 3.35 + \frac{4 \times 8 \times 500}{1 \times 3.1416} (\frac{1}{22 \times 40} + \frac{1.02 \times 16^2}{1.17 \times 10^5})]$$

$$+ \beta_1 [0.299 + 3.36 - 2 \times 0.167] - \frac{2 \times 16 \times 500^2}{1^2 \times \pi^2 \times 1.17 \times 10^5} (\xi_1 + \bar{\xi}_1) = 0$$

$$\alpha_1 [7.22 + 16.85 + 1.06] + \beta_1 [3.15 + 17.8] = 0$$

$$\frac{4 \times 8 \times 500}{1 \times 3.1416} (\frac{1}{22 \times 40 \times 16} + \frac{16}{1.17 \times 10^5}) \alpha_1 - \frac{2 \times 500^2}{1^2 \times 3.1416^2 \times 1.17 \times 10^5}$$

$$\times (\xi_1 + \bar{\xi}_1) - \Omega = \frac{2 q_l \times 500^2}{1^3 \times \pi^3 \times 1.17 \times 10^5} (\cos \pi - 1)$$

$$\Omega = \frac{[3.78(\frac{1+0.167}{2}) - 1.02(1-0.167)] \xi_1 + \frac{500}{1 \times 3.1416} \times 2 \times 2.45 \bar{\xi}_1}{\frac{8^3}{12(1-0.167^2)} [3.78(\frac{3+0.167}{2}) - 1.02(1-0.167)] (1-0.167)}$$

$$+ \frac{[3.78(\frac{1+0.167}{2}) + 1.02(1-0.167)] \xi_1 + \frac{500}{1 \times 3.1416} \times 2 \times 1.455 \bar{\xi}_1}{\frac{8^3}{12(1-0.167)} [3.78(\frac{3+0.167}{2}) + 1.02(1-0.167)] (1-0.167)}$$

解联立方程得 $m=1$ 时的各项系数, 同样亦可求得 $m=3$ 时的各项系数 (表 5)

表 5

m	$\alpha = \bar{\alpha}$	$\beta = \bar{\beta}$	$\zeta = \bar{\zeta}$	ξ	$\bar{\xi}$
1	$0.2249 q_l$	$-0.2698 q_l$	$2.1964 q_l$	$-0.0211 q_l$	$-0.0271 q_l$
3	$0.0221 q_l$	$-0.0350 q_l$	$0.1620 q_l$	$-0.0053 q_l$	$-0.0051 q_l$

3、荷载作用在板上。将前述有关系数代入公式 (28) 至 (33):

$m=1$

$$\begin{aligned} & \frac{[\xi_1 - \frac{4 \times 0.167}{1 \times 3.1416^5} q_b \times 500^4 (\frac{1 \times 3.1416}{500})^2] 2 \times 1.455}{3.78(\frac{3+0.167}{2}) + 1.02(1-0.167)} \\ & + \frac{\frac{500}{1 \times 3.1416} [3.78(\frac{1+0.167}{2}) - 1.02(1-0.167)] \xi_1}{3.78(\frac{3+0.167}{2}) + 1.02(1-0.167)} \\ & + \frac{2 \times 2.45 \bar{\xi}_1 + \frac{500}{1 \times 3.1416} [3.78(\frac{1+0.167}{2}) + 1.02(1-0.167)] \bar{\xi}_1}{3.78(\frac{3+0.167}{2}) + 1.02(1-0.167)} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{4 \times 500^2 (1-0.167)}{1 \times 3.1416^5} q_b \\
& \frac{\left[\frac{\xi_1}{500^2} \left(\frac{500}{1 \times 3.1416} \right)^2 \frac{4 \times 0.167 \times 500^2}{1 \times 3.1416^5} q_b \right] \left[3.78 \left(\frac{1+0.167}{2} \right) - 1.02 \times 3.91 (1-0.167) \right]}{3.78 \left(\frac{3+0.167}{2} \right) + 1.02 (1-0.167)} \\
& + \frac{\frac{2\xi_1}{500^2} \left(\frac{500}{1 \times 3.1416} \right)^3 2.45}{3.78 \left(\frac{3+0.167}{2} \right) + 1.02 (1-0.167)} \\
& + \frac{\frac{\xi_1}{500^2} \left(\frac{500}{1 \times 3.1416} \right)^2 \left[3.78 \left(\frac{1+0.167}{2} \right) - 1.02 \times 3.91 (1-0.167) \right]}{3.78 \left(\frac{3+0.167}{2} \right) + 1.02 (1-0.167)} \\
& + \frac{\frac{2\xi_1}{500^2} \left(\frac{500}{1 \times 3.1416} \right)^3 1.455}{3.78 \left(\frac{3+0.167}{2} \right) + 1.02 (1-0.167)} = 0 \\
& \alpha_1 \left[1.686 + 3.35 + \frac{4 \times 8 \times 500}{1 \times 3.1416} \left(\frac{1}{22 \times 40} + \frac{1.02 \times 16^2}{1.17 \times 10^5} \right) \right] + \beta_1 [0.299 + 3.36 - 2 \times 0.169] \\
& - \frac{2 \times 16 \times 500^2}{1 \times 3.1416^2 \times 1.17 \times 10^5} (\xi_1 + \bar{\xi}_1) = 0 \\
& \alpha_1 \left[7.22 + 16.85 + 2 \times 0.167 \frac{1 \times 3.1416}{500} \right] + \beta_1 [3.15 + 17.8] = 0 \\
& \frac{4 \times 8 \times 500}{1 \times 3.1416} \left(\frac{1}{22 \times 40 \times 16} + \frac{16}{1.17 \times 10^5} \right) \alpha_1 - \frac{2 \times 500^2}{1 \times 3.1416^2 \times 1.17 \times 10^5} (\xi_1 + \bar{\xi}_1) - \Omega = 0 \\
& \Omega = \frac{\left[3.78 \left(\frac{1+0.167}{2} \right) - 1.02 (1-0.167) \right] \xi_1 + \frac{500}{1 \times 3.1416} \times 2 \times 2.45 \bar{\xi}_1}{\frac{8^3}{12(1-0.167^2)} \left[3.78 \left(\frac{3+0.167}{2} \right) - 1.02 (1-0.167) \right] (1-0.167)} \\
& - \frac{\frac{4 \times q_b \times 500^4}{1 \times 3.1416^5} \left(\frac{1 \times 3.1416}{500} \right)^2 \left[3.78 \left(\frac{3+0.167}{2} \right) - 1.02 (1-0.167) \right]}{\frac{8^3}{12(1-0.167^2)} \left[3.78 \left(\frac{3+0.167}{2} \right) - 1.02 (1-0.167) \right] (1-0.167)} \\
& + \frac{\left[3.78 \left(\frac{1+0.167}{2} \right) + 1.02 (1-0.167) \right] \xi_1 + \frac{500}{1 \times 3.1416} \times 2 \times 1.455 \bar{\xi}_1}{\frac{8^3}{12(1-0.167^2)} \left[3.78 \left(\frac{3+0.167}{2} \right) - 1.02 (1-0.167) \right] (1-0.167)}
\end{aligned}$$

解联立方程得 $m=1$ 时的各项系数, 同样亦可求得 $m=3$ 时的各项系数 (表 6)

表 6

m	$\alpha=\overline{\alpha}$	$\beta=\overline{\beta}$	$\zeta=\overline{\zeta}$	ξ	$\overline{\xi}$
1	$136.3736 q_b$	$-163.5937 q_b$	$11885 q_b$	$205.6239 q_b$	$155.9390 q_b$
3	$3.0713 q_b$	$-4.8910 q_b$	$237.2453 q_b$	$24.9613 q_b$	$3.2800 q_b$

4. 梁跨中弯矩计算:

$$\begin{aligned}
 \text{由 (34) 式 } M'_{\max} &= \frac{1}{8} q_l \times 5^2 - 2 \times 16 \times 8 \int_0^{\frac{l}{2}} 2(0.2249 q_l \cos \frac{\pi x}{l} + 0.0221 q_l \cos \frac{3\pi x}{l}) dx \\
 &+ 2 \left\{ x \int_0^{\frac{l}{2}} [(-0.0211 q_l - 0.0271 q_l) \sin \frac{\pi x}{l} + (-0.0053 q_l - 0.0051 q_l) \sin \frac{3\pi x}{l}] dx \right. \\
 &\left. - \int_0^{\frac{l}{2}} x [(-0.0211 q_l - 0.0271 q_l) \sin \frac{\pi x}{l} + (-0.0053 q_l - 0.0051 q_l) \sin \frac{3\pi x}{l}] dx \right\} \\
 &= 0.9838 q_l
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{由 (35) 式 } M''_{\max} &= -2 \times 16 \times 8 \int_0^{\frac{l}{2}} 2(136.3736 q_b \cos \frac{\pi x}{l} + 3.0713 q_b \cos \frac{3\pi x}{l}) dx \\
 &+ 2 \left\{ x \int_0^{\frac{l}{2}} [(205.6239 q_b + 155.9390 q_b) \sin \frac{\pi x}{l} + (24.9613 q_b \right. \\
 &+ 3.2800 q_b) \sin \frac{3\pi x}{l}] dx - \int_0^{\frac{l}{2}} x [(205.6239 q_b \\
 &+ 155.9390) \sin \frac{\pi x}{l} dx + (24.9613 q_b + 3.2800 q_b) \sin \frac{3\pi x}{l} dx] \right\} \\
 &= 8.354 q_b
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{代入 (36) 式 } M_{\max} &= 0.9838 q_l + 8.354 q_b \\
 &= 0.9838 \times 0.22 q_b + 8.354 q_b = 8.5704 q_b
 \end{aligned}$$

四、综合比较

(一) 理论分析与实测结果比较

用前面考虑梁板共同工作的计算方法和对实测结构计算的结果，梁跨中最大弯矩为 $M=8.5704q_b$ ，与实测结果比较，如图15和16所示。

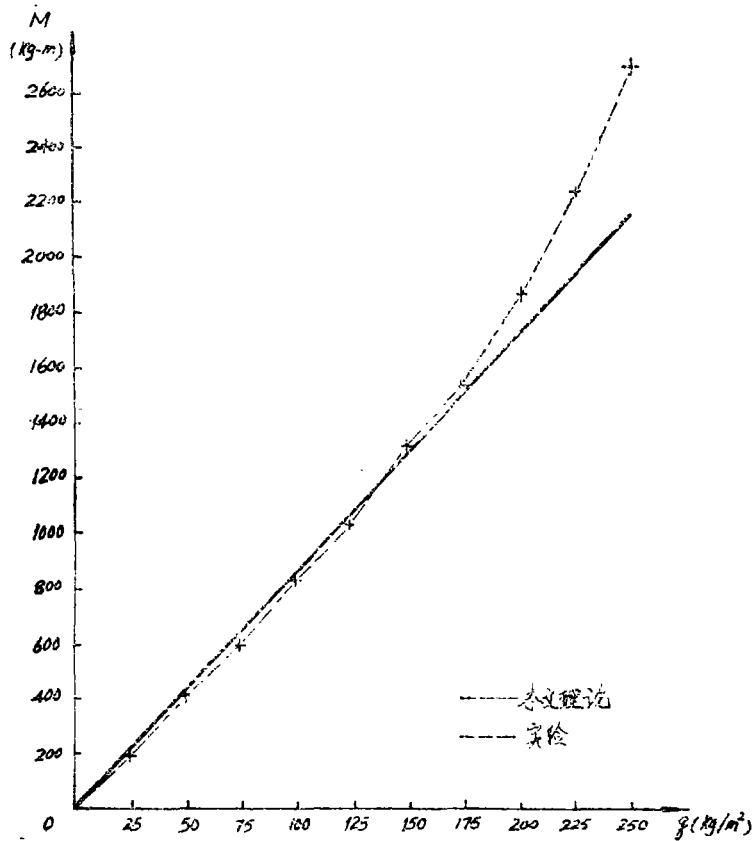


图15 二楼梁跨中弯矩理论值与实测值比较

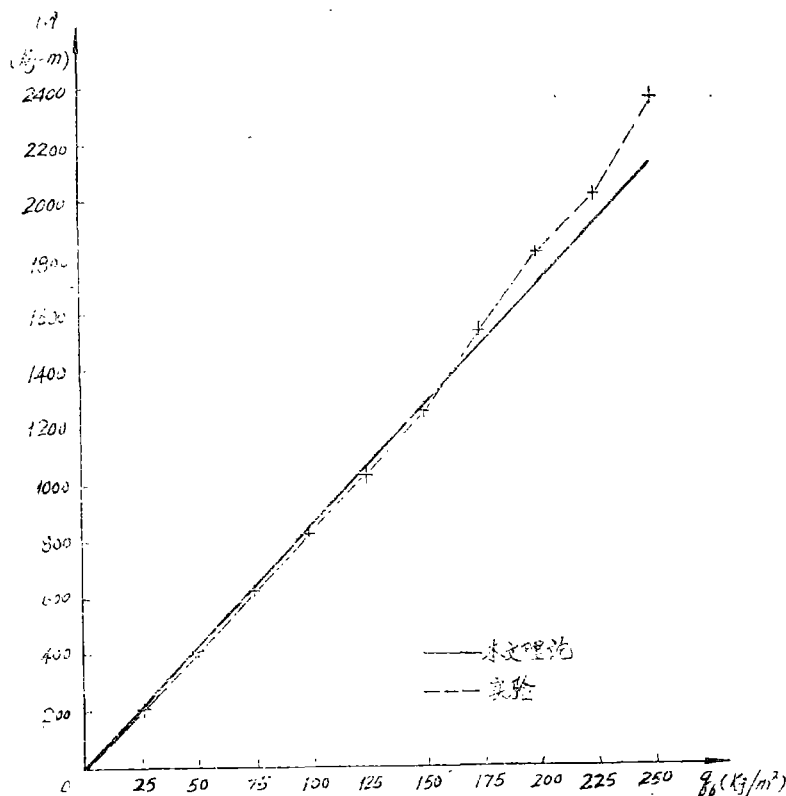


图19 三楼梁跨中弯矩理论值与实测值比较

图中实测部分包括实测的钢筋应力换算的弯矩和平均支座约束弯矩。理论计算值与实测结果基本上是一致的。在荷载 150kg/m^2 以后,误差愈来愈大,尤其是三楼,这主要是由于裂缝的展开和混凝土塑性变形的增加而造成的,因为理论计算是基于弹性理论,未考虑塑性变形的特点。

(二) 原计算理论、本文计算理论和实测弯矩比较

用原设计的理论计算的梁跨中最大弯矩,用本文考虑支座约束和梁板共同作用的理论计算的梁跨中最大弯矩与实测的跨中最大弯矩的比较如图17和图18所示。

图中原理论即按图2所示的计算简图算得的跨中弯矩 $M=9.15q_b$ 。本文理论即按用前面计算的跨中弯矩 $M=8.5704q_b$,再扣除前述平均支座约束弯矩。实测弯矩即根据量测的钢筋应变和中和轴高度而算得的弯矩值。从比较结果来看考虑梁板共同工作和支座约束的计算方法与实测值是很接近的。

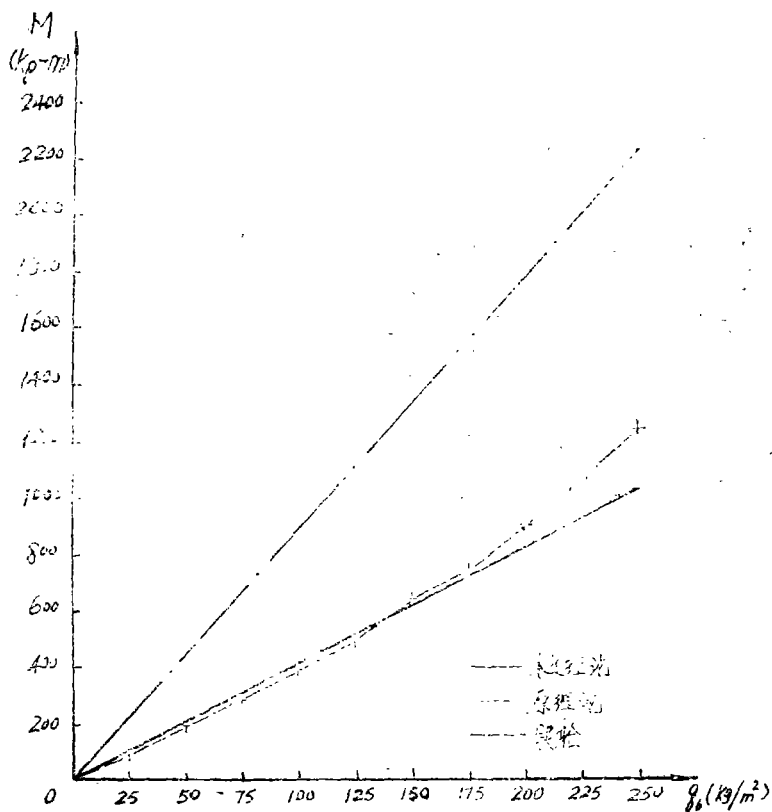
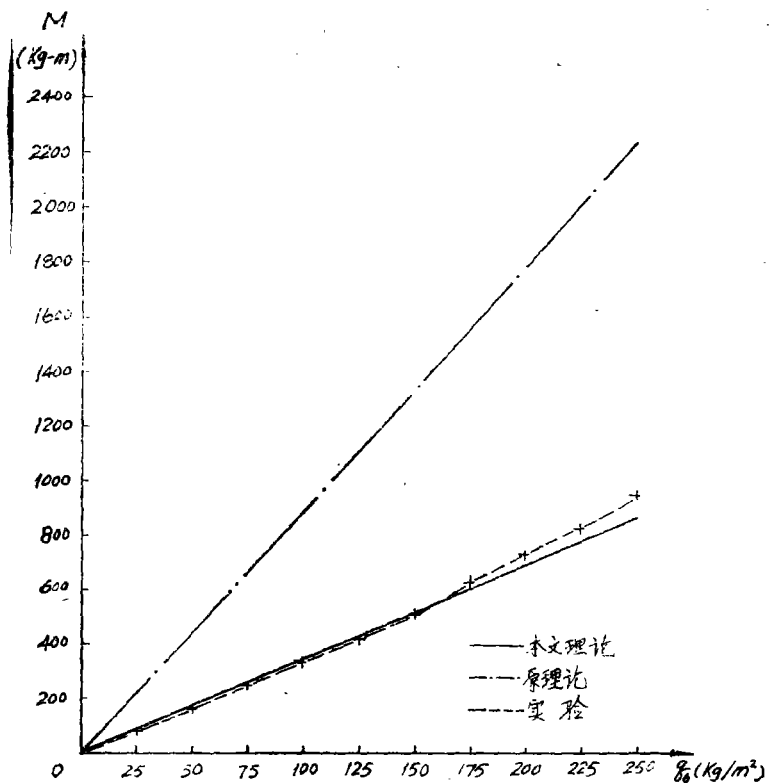


图17 二楼梁跨中最大弯矩理论计算值与实测值比较

图17 三楼梁跨中最大弯矩理论计算值与实测值比较



五、几点意见

经过对钢筋混凝土整体式肋形楼盖的实测和理论分析,提出以下意见供有关方面参考。

1、就该工程而言,从实测的梁的挠度,钢筋应力和支座倾角以及裂缝的出现和展开的情况,结构在使用阶段工作正常,梁中虽然少配三分之二的钢筋,但由于支座约束和梁板共同工作等有利因素,经理论分析,实际所配钢筋能满足强度要求,经多年实际使用,结构一直处于正常工作状态。

2、支座约束长期来都被人们忽略,一般伸在墙体內的梁都简化为简支,这是不符合实际情况的,就本实例来说二楼约束度达70~80%,三楼到达50~60%。从定性上分析,支座约束存在,而且是不小的,应该加以利用,但从量级上来说,应根据伸入墙体內的长度、上部墙体传来的重量等因素综合考虑。

3、在使用阶段验算肋形楼中梁的抗裂度和刚度时,应考虑梁板共同工作。按弹性理论分析是比较符合实际的。

参 考 文 献

- 1、Б. Ё. упицкий: Вопросы Пространственного Расчета Балочных Мостов, Москва 1956
- 2、Б. Ё. Упицкий: Расчеты Плитно--Балочных конструкций
- 3、S. TIMOSHENKO AND S. WOINOWSKY--KRIEGER THEORY OF PLATES AND SHELLS NEW YORK 1959