

无洞连续墙梁的有限元分析

李凤山 王道敏

(力学教研室)

提 要

本文用弹性力学平面问题有限单元法,对墙体上不开洞的墙梁结构进行研究。以九种二跨墙梁为研究对象,根据有限元法的计算结果,分别给出了墙梁的应力和主应力在墙体和托梁中的分布图,以及主应力迹线图。并计算出托梁的主要截面的内力,绘出沿梁长弯矩、剪力、轴力的内力图以及位移图。本文对托梁上两个跨中截面以及中间支座截面的弯矩、轴力的主要因素进行了回归分析,得到了M, N的近似计算公式。

一、概 述

墙梁系指基础梁、连系梁、过梁等一类结构,在工业和民用建筑中应用很广。目前我们设计墙梁采用的计算方法尚不统一,立论各一,计算结果相差很大,有的也很不符合实际受力情况。其主要因素是在砖墙传给托梁的荷载取值和砖墙与托梁的共同工作方面存在着不同的看法。

近几年来国内外对墙梁进行了不少的试验和理论研究工作。但是到目前为止,理论和实验工作主要限于简支墙梁。有关连续墙梁涉及甚小,而连续墙梁在工程实践中经常碰到,却往往都按简支墙梁处理,或模拟简支墙梁的计算方法来进行设计计算。因此,对连续墙梁的研究是非常必要的。

本文对变化各种参数的不开洞连续墙梁在弹性阶段的应力用有限元法进行了分析,找出托梁和墙体内力变化规律,并提供了托梁内力计算的近似公式,力求对连续墙梁的设计计算,构造设计有些参考价值。

二、课 题 任 务

由于影响连续墙梁组合结构的因素很多,如 H_1/L_1 , h/L_1 , L_2/L_1 , 及 E_k/E_h 等。因此,拟采用正交设计定各参数(因素)的搭配,以便分析最少的结构,而获得对连续墙梁受力特性的较为全面的了解。

各因素的变化水平如下:

$$H_1/L_1 = 0.5, 0.75, 1.0$$

$$h/L_1 = \frac{1}{8}, \frac{1}{10}, \frac{1}{15}$$

$$E_k/E_h = \frac{1}{10}, \frac{1}{15}, \frac{1}{20}$$

$$L_2/L_1 = 1, 0.8, 0.6$$

(符号见图1——计算简图)

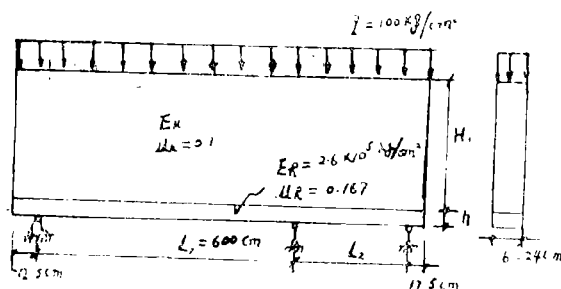


图1

不考虑各因素的相互作用, 采用 $L_9(3^4)$ 正交表, 设计的各组构件见表1。
计算题的尺寸, 数据, 编号见表2。

表1

因素 组数	A (H_1/L_1)	B (h/L_1)	C (E_k/E_R)	D (L_2/L_1)
1	1 (0.5)	1 ($\frac{1}{8}$)	1 ($\frac{1}{20}$)	1 (1.0)
2	1 (0.5)	2 ($\frac{1}{10}$)	2 ($\frac{1}{15}$)	2 (0.8)
3	1 (0.5)	3 ($\frac{1}{15}$)	3 ($\frac{1}{10}$)	3 (0.6)
4	2 (0.75)	1 ($\frac{1}{8}$)	2 ($\frac{1}{15}$)	3 (0.6)
5	2 (0.75)	2 ($\frac{1}{10}$)	3 ($\frac{1}{10}$)	1 (1.0)
6	2 (0.75)	3 ($\frac{1}{15}$)	1 ($\frac{1}{20}$)	2 (0.8)
7	3 (1.00)	1 ($\frac{1}{8}$)	3 ($\frac{1}{10}$)	2 (0.8)
8	3 (1.00)	2 ($\frac{1}{10}$)	1 ($\frac{1}{20}$)	3 (0.6)
9	3 (1.00)	3 ($\frac{1}{15}$)	2 ($\frac{1}{15}$)	1 (1.0)

三、分析方法

墙梁计算是由二种材料组成弹性力学的平面应力问题。我们采用了冶金部墙梁规程编制小组编制的“墙梁计算的有限单元法程序”。经过本院力学师资班连续墙梁毕业论文小组改编成我院S/09微机适用的扩展BASIC语言程序, 并在S/09微型机上调试通过。

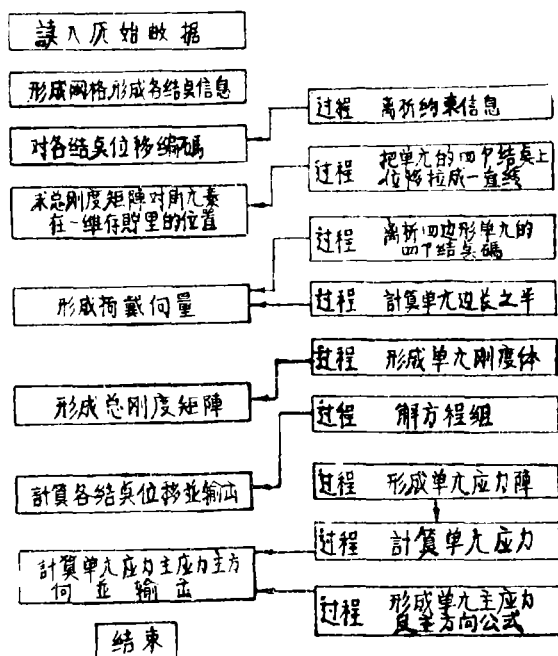
此程序采用矩形单元, 并且自动形成网格, 这对解决边界规正的墙梁, 无疑是非常有利的。此程序是一个通用程序, 它适用于不同材料 (最多可以达到九种材料), 不同厚度的弹性力学平面应力和平面应变问题, 荷载可以是集中力, 分布力, 考虑体力和不考虑体力的,

可以有不同支承条件和边界条件, 弹性体可有洞和无洞。

表 2

编号	L_1/cm	L_2/cm	H_1/cm	h/cm	$E/\text{kg/cm}^2$	u_k	$Eh/\text{kg/cm}^2$	u_b
1001	600	600	300	75	1.3×10^4	0.1	2.6×10^5	0.167
1002	600	480	360	60	1.73×10^4	0.1	2.6×10^5	0.167
1003	600	360	300	40	2.6×10^4	0.1	2.6×10^5	0.167
1004	600	360	450	75	1.73×10^4	0.1	2.6×10^5	0.167
1005	600	600	450	60	2.6×10^4	0.1	2.6×10^5	0.167
1006	600	480	450	40	1.3×10^4	0.1	2.6×10^5	0.167
1007	600	480	600	75	2.6×10^4	0.1	2.6×10^5	0.167
1008	600	360	600	60	1.3×10^4	0.1	2.6×10^5	0.167
1009	600	600	600	40	1.73×10^4	0.1	2.9×10^5	0.167

输出结果是: 结点位移, 单元应力 (σ_x , σ_y , τ_{xy}), 主应力 (σ_1 , σ_2) 以及主方向 α 。
此程序的简单框图如下:



四、计算结果

(1) 根据计算机输出的单元应力和主应力数值, 分别绘出九个墙梁的 σ_x , σ_y , τ_{xy} 以及 σ_1 和 σ_2 的应力分布图和主应力迹线图。

(2) 根据托梁横截面 σ_x 的分布图, 计算了托梁主要截面即第一跨和第二跨的中间截面和中间支座处截面的弯矩和轴力, 分别记为: $M_I, M_{II}, M_{III}, N_I, N_{II}, N_{III}$ (见图2)。

关于弯矩和轴力的计算, 采用了矩形分块法 (见图3)。



图2

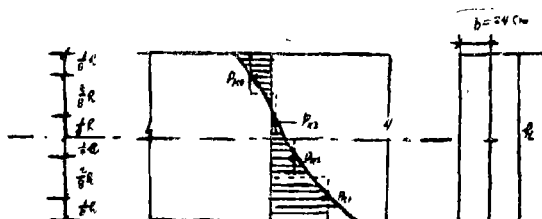


图3

$$\text{轴力: } N = p_{x1} + p_{x2} + p_{x3} + p_{x4} = \frac{1}{4} (bh) \sum_{i=1}^4 \sigma_{xi}$$

$$\begin{aligned} \text{弯矩: } M &= \frac{h}{8} p_{x2} - \frac{h}{8} p_{x3} + \frac{3h}{8} p_{x1} - \frac{3h}{8} p_{x4} \\ &= \frac{h}{8} \left(\frac{1}{4} bh \right) [(\sigma_{x1} - \sigma_{x3}) + 3(\sigma_{x1} - \sigma_{x4})] \end{aligned}$$

计算结果见表3

表3

表中单位为T, m

题号	内力	M_I	M_{II}	M_{III}	N_I	N_{II}	N_{III}
1001		6.99	6.99	-18.2	11.1	11.2	-5.52
1002		3.30	2.70	-6.96	11.9	5.38	-4.71
1003		0.638	0.804	-2.37	13.3	4.28	-5.17
1004		4.71	3.25	-11.0	11.2	3.60	-2.16
1005		2.46	1.69	-10.0	10.8	12.9	-8.49
1006		1.44	1.33	-7.74	12.4	8.03	-6.04
1007		3.52	3.04	-6.56	10.4	5.40	-0.855
1008		2.77	2.32	-4.74	9.61	3.17	-1.26
1009		1.34	1.34	-7.29	11.2	11.2	-9.70

(3) 为了解沿梁长内力的变化规律绘出1004, 1005, 1006三个墙梁的 M, N, Q 图以及位移图。数据见表4。

从三个墙梁的内力图, 可以看出二跨连续墙梁内力分布大致规律。弯矩的分布与一般连续梁在均布荷载作用下弯矩的分布相仿: 两跨中出现正弯矩, 但最大值不在跨中多偏于两端支座, 然而变化比较平缓。中间支座处出现数值较大的负弯矩 (是正弯矩的几倍)。从轴力图

可以看出, 两跨中出现较大的拉力, 且长跨中的拉力大于短跨中的拉力。中间支座处附近是压力, 但数值较小。从切力图看出, 支座处剪力很大, 沿梁长呈曲线变化, 同时在中间支座处左右两边剪力几乎相等。

(4) 对九个墙梁梁中三个主要截面(两跨中以及中间支座)的弯矩, 轴力进行正交表的直观分析和方差分析, 找出影响 M , N 的主要因素。

表 4

1004	M	-0.4	0.51	3.24	3.72	4.71	2.18	-2.3	-10.1	-10.1	-2.84	2.03	3.25	2.01	0.34	-0.2
	N	0.68	1.52	4.94	9.57	11.2	7.41	1.45	-1.94	-2.16	-0.27	2.52	3.6	2.31	0.81	0.36
	Q	3.82	-20.0	-10.4	-1.59	1.72	6	16.4	25.4	24.1	-15.2	-6.03	-0.14	5.96	11.5	-1.97
1005	M	-0.45	0.24	1.78	2.46	2.07	1.81	1.81	1.33	-2	-10.0	对 称				
	N	0.71	1.99	5.98	10.8	12.6	12.2	9.82	4.8	-2.93	-8.49					
	Q	4.63	-16.7	-6.52	-0.27	0.69	0.66	1.34	4.85	14.6	30.0					
1006	M	-0.46	0.22	1.3	1.02	1.44	0.75	-0.51	-7.74	-7.74	-0.3	1.12	1.33	0.83	0.25	-0.33
	N	0.89	2.08	6	10.7	12.4	7.7	-0.15	-5.95	-6.12	0.07	6.42	8.03	4.75	1.51	0.64
	Q	5	-17.9	-7.33	-0.03	0.04	2.62	13.8	26.7	-26.7	-11.8	-2.04	-0.08	5.11	14.4	-3.64

分析的结论如下:

影响梁两跨跨中截面的弯矩 (M_I , M_{II}) 的主要因素是 $B(h/L_1)$, 和 $C(E_k/E_h)$ 。

影响梁中间支座负弯矩 (M_{III}) 的主要因素是 $B(h/L_1)$, $C(E_k/E_h)$ 和 $D(L_2/L_1)$ 。

影响梁两跨跨中截面的轴力 (N_I , N_{II}) 的主要因素是 $A(H_1/L_1)$, $B(h/L_1)$ 和 $D(L_2/L_1)$ 。

影响梁中间支座处截面的轴力 (N_{III}) 的主要因素是 $A(H_1/L_1)$ 和 $D(L_2/L_1)$ 。

(5) 回归分析: 对正交表进行了直观分析和方差分析之后, 我们找到了影响指标 (M , N) 的主要因素, 清楚了因素对指标影响的显著性。但这些分析都是定性的, 为了找出 M 和 N 同各主要因素的变化关系必须进行回归分析。

计算中每个因素的水平有三个, 每个水平对应一个指标 (M 或 N) 值, 反映在坐标图中是三个点, 因此, 我们可以设一条抛物线用待定系数法得到回归方程。设抛物线方程为: $y = ax^2 + bx + c$ 。根据指标——因素图, 都可用 y 代表 M (或 N), 用 x 代表主要因素。

若 x_1, x_2, x_3 是因素的三个水平,

y_1, y_2, y_3 是因素的三个水平对应的三个指标值, 由此可以得到一个三元一次方程组 (以 a, b, c 为变量)。

$$\begin{cases} ax_1^2 + bx_1 + c = y_1 \\ ax_2^2 + bx_2 + c = y_2 \\ ax_3^2 + bx_3 + c = y_3 \end{cases}$$

解此方程组我们可得到 a, b, c

$$\begin{cases} a = \frac{(x_1 - x_2)(y_2 - y_3) - (y_1 - y_2)(x_2 - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)} \\ b = \frac{(y_1 - y_2)}{(x_1 - x_2)} - (x_1 + x_2)a \\ c = y_1 - x_1^2 a - x_1 b \end{cases}$$

将 a, b, c 代入原方程, 此方程即为回归方程。以指标 (M, N) 代换 y , 以因素代换 x , 即得所需要的回归方程。

由于回归方程(抛物线)是三个点直接待定, 三个点与此回归方程的相关系数肯定是 1, 接近程度是 100%。由此, 从某种意义上说, 回归方程是准确的, 不必要对回归方程再进行显著性分析了。

首先对弯矩(或轴力)进行单因素回归, 然后使几个单因素回归方程相乘, 进行综合平衡, 即可求得 M, N 与各主要因素之间的综合表达式。利用综合表达式计算 $N_I, N_{II}, N_{III}, M_I, M_{II}, M_{III}$, 同时与有限元分析计算的结果进行比较, 计算差值(见表 5, 6)。根据误差大小和特点, 在保证安全的前提下, 对各系数进行修正和圆整, 最后得到 M, N 的近似计算公式如下:

$$M_I = \frac{1}{1100} [650 \left(\frac{h}{L_1} \right)^2 - 58 \left(\frac{h}{L_1} \right) + 2] [180 \left(\frac{E_k}{E_h} \right)^2 - 58 \left(\frac{E_k}{E_h} \right) + 6] q L_1^2$$

$$M_{II} = \frac{1}{940} [950 \left(\frac{h}{L_1} \right)^2 - 125 \left(\frac{h}{L_1} \right) + 6] [990 \left(\frac{E_k}{E_h} \right) - 180 \left(\frac{E_k}{E_h} \right) + 10] q L_1^2$$

$$M_{III} = \frac{1}{252000} [2500 \left(\frac{h}{L_1} \right)^2 - 360 \left(\frac{h}{L_1} \right) + 20] [920 \left(\frac{E_k}{E_h} \right)^2 - 210 \left(\frac{E_k}{E_h} \right) + 18]$$

$$[18 \left(\frac{L_1}{L_2} \right)^2 - 15 \left(\frac{L_1}{L_2} \right) + 9] q L_1^2$$

$$N_I = \frac{1}{7700} [3.5 \left(\frac{H_1}{L_1} \right)^2 - 7 \left(\frac{H_1}{L_1} \right) + 15] [920 \left(\frac{h}{L_1} \right)^2 - 200 \left(\frac{h}{L_1} \right) + 21]$$

$$[12 \left(\frac{L_2}{L_1} \right)^2 - 19 \left(\frac{L_2}{L_1} \right) + 18] q L_1$$

$$N_{II} = \frac{1}{430} [22 \left(\frac{H_1}{L_1} \right)^2 - 32 \left(\frac{H_1}{L_1} \right) + 4] [24 \left(\frac{L_2}{L_1} \right)^2 - 55 \left(\frac{L_2}{L_1} \right) + 21] q L_1$$

$$N_{III} = \frac{1}{300} [260 \left(\frac{h_1}{L_1} \right)^2 + 21 \left(\frac{h}{L_1} \right) - 10] [7 \left(\frac{L_2}{L_1} \right)^2 - \left(\frac{L_2}{L_1} \right) + 1] q L_1$$

表 5

题 号	N _I			N _{II}			N _{III}		
	计算值	近似值	相差%	计算值	近似值	相差%	计算值	近似值	相差%
1001	11.1	11.9	-7%	11.2	9.72	12.8%	-5.52	-4.03	27%
1002	11.9	11.1	6%	5.38	7.56	-40.6%	-4.71	-1.52	4.08%
1003	13.3	13.2	0.6%	4.82	3.53	17.5%	-5.17	-3.99	22.7%
1004	11.2	11.1	1.17%	3.60	4.15	-15.4%	-2.16	-1.63	24.5%
1005	10.8	10.6	1.8%	12.9	8.89	30.7%	-8.49	-4.54	46.7%
1006	12.4	12.8	-2.76%	8.03	11.4	-42.3%	-6.04	-9.88	-52%
1007	10.4	9.73	6.12%	5.40	7.19	-33.2%	-0.855	-2.67	
1008	9.61	9.91	-3.17%	3.17	3.36	-6.04%	-1.26	-2.67	
1009	11.2	11.6	-3.02%	11.2	9.25	17.6%	-9.70	-9.88	-1.96%

表 6

题 号	M _I			M _{II}			M _{III}		
	计算值	近似值	相差%	计算值	近似值	相差%	计算值	近似值	相差%
1001	6.99	6.27	10.3%	6.99	6.03	13.8%	-18.2	-19.2	-5.75%
1002	3.30	2.97	10.06%	2.70	2.09	22.6%	-6.96	-6.83	1.89%
1003	0.64	0.835	-30.5%	0.804	0.818	-2.3%	-2.37	-3.16	-33.2%
1004	4.71	5.24	-11.3%	3.25	4.12	-27%	-11.0	-8.62	21.5%
1005	2.46	2.08	15.5%	1.69	1.58	6.56%	-10.0	-5.13	48.8%
1006	1.44	1.42	1.57%	1.33	1.58	18.6%	-7.74	-9.37	-21%
1007	3.52	3.73	-6.11%	3.04	3.12	-2.7%	-6.56	-8.43	-28.6%
1008	2.77	3.53	-27.5%	2.72	3.05	-31.3%	-4.74	-6.37	-34.5%
1009	1.34	1.19	11.5%	1.33	1.08	19.4%	-7.29	-7.71	-5.7%

五、梁上荷载的简化

要使梁脱离墙体, 单独进行研究, 必然要考虑梁上荷载如何简化。而简化荷载的首要问题是求出墙、梁界面上的 σ_y 和 τ_{yx} 。

就如何求得界面上的应力 σ_y 、 τ_{yx} 的问题意见不一, 有人把靠界面最近的墙上单元的应力当作作用在梁上的荷载; 也有人认为梁上荷载应当是靠近界面墙、梁上单元应力的平均值。这两种方法我们认为都有缺陷。前者荷载值偏低, 后者当界面上下单元大小不等时, 荷载值也偏低。

我们研究了 σ_y 、 τ_{yx} 的应力分布图之后, 发现 σ_y 、 τ_{yx} 沿界面上、下无突变, 并且在界面上, 下应力分布曲线凸、凹相反, 这就启示我们对求界面上的应力提出新的观点。

为了研究问题方便, 我们把 σ_y 转向水平, 变成沿垂直截面的分布应力(见图5)。

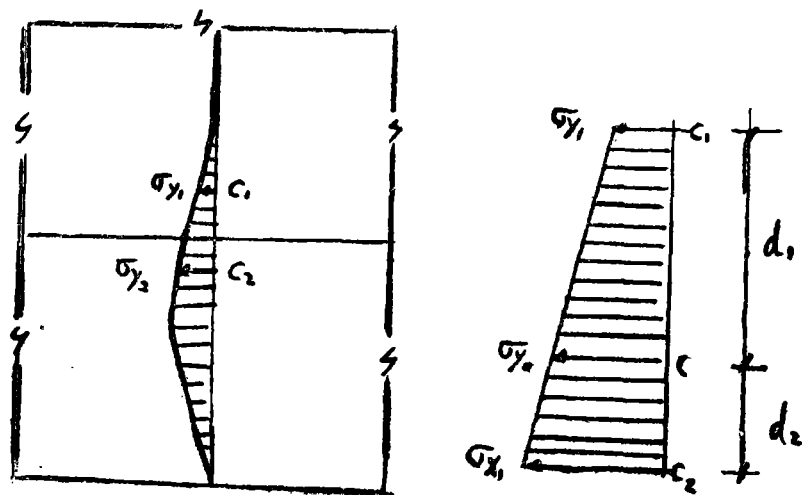


图5

墙上 σ_y 的应力曲线向左凹, 而梁上 σ_y 的应力曲线向右凹, 这样界面附近的曲线段属于拐点部分。若 C_1 、 C_2 分别表示界面附近墙、梁单元的形心, 这两点上的应力分别为 σ_{y1} 、 σ_{y2} , C_1 、 C_2 到界面上的距离分别为 d_1 、 d_2 , 则当 $(d_1 + d_2)$ 不大时, $(d_1 + d_2)$ 段曲线看成直线是合理的(见图6)。这样我们便可利用距离插值求出界面上应力 σ_{y0} 。

$$\frac{\sigma_{y2} - \sigma_{y0}}{d_2} = \frac{\sigma_{y2} - \sigma_{y1}}{(d_1 + d_2)}$$

$$\sigma_{y0} = \sigma_{y2} - \frac{d_2}{(d_1 + d_2)} (\sigma_{y2} - \sigma_{y1}) = \sigma_{y2} + \frac{d_2}{(d_1 + d_2)} (\sigma_{y1} - \sigma_{y2})$$

$$\text{设 } \frac{d_2}{d_1 + d_2} = \alpha$$

$$\text{则有 } \sigma_{y0} = \sigma_{y2} + \alpha (\sigma_{y1} - \sigma_{y2})$$

现对上式进行讨论:

$$\text{当 } d_1 = d_2, \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \sigma_{y0} = \sigma_{y2} + \frac{1}{2} (\sigma_{y1} - \sigma_{y2}) = \frac{1}{2} (\sigma_{y1} + \sigma_{y2})$$

这个结果说明, 只有当墙、梁靠近界面的单元尺寸差不多相等时, 取二单元应力均值的说法才合理。

$$\text{当 } d_1 \ll d_2 \text{ 时, } \alpha = \frac{d_2}{d_1 + d_2} \longrightarrow 1$$

$$\therefore \sigma_{y0} = \sigma_{y2} + \frac{d_2}{d_1 + d_2} (\sigma_{y1} - \sigma_{y2}) \longrightarrow \sigma_{y1}$$

这说明只有当界面上墙的单元很小很小时(比梁的单元), 取墙上靠界面的单元应力当界面上应力的说法才合理。

否则, 求界面上的应力只能用上述方法才合理。

τ_{yx} 界面上的值的求法同 τ_y 一样。

用上述方法求得界面上的应力 τ_y 和 τ_{yx} , 并绘出它们的分布图 (见图 6, 7)。

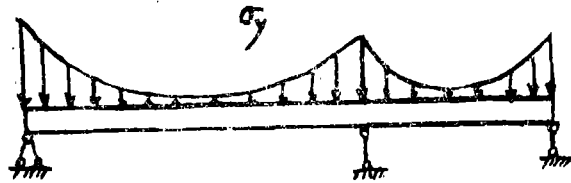


图6

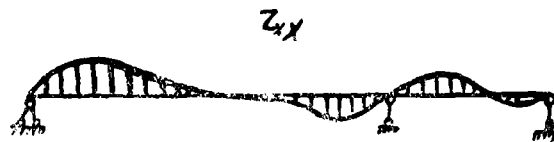


图7

下面讨论梁上荷载的简化:

σ_y 的分布图在三个支座上方是主要的, 在两跨中间部分接近于均布。那么我们可以设想, 在保持总压力不变的情况下, 将梁上荷载 (应力 $\times b$) 简化成三个三角形荷载和一个沿

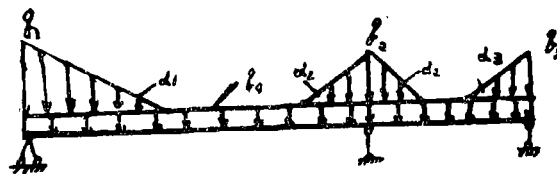


图 8a

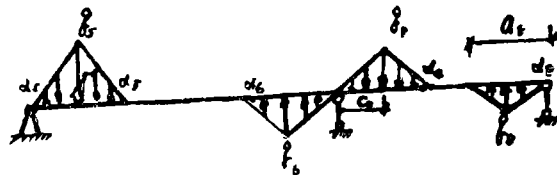


图 8b

梁长的均布荷载是比较理想的 (见图 8 a)。

对于一个具体问题, 每个三角形的高 q 以及斜边与梁的夹角 α 是一定的, 均布荷载 q_4 也是一定的。以 q_1, q_2, q_3, q_4 和 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 为考查指标, 象指标 M, N 一样对因素 A, B, C, D 进行直观分析, 方差分析, 回归分析, 最后得出各指标与其主要因素之间的关系式。也就是说, 此时给出主要因素的某一水平, 作用在梁上的荷载可由公式马上求出。

同样, 根据 τ_{yx} 的分布图, 把荷载简化成如图 8 b 所示。(认为梁的左端近似的是等腰三角形) 同样方法可以确定 $q_5 \sim q_8, \alpha_5 \sim \alpha_8$ 以及 c_7, a_8 与主要因素之间的关系, 使之给定因

素的水平便可得到确定的梁上的三角形荷载。梁上荷载确定之后，梁内的内力也就确定了。

本文通过对不开洞连续墙梁九个题目的综合分析和研究，对连续墙梁组合结构的受力特点，梁中内力分布以及影响梁内的主要因素有了一个初步的了解。在此基础上，通过回归分析和综合平衡，找出了内力与各主要因素之间的关系式，在误差分析之后，对式中诸项系数进行了修整，力图使理论计算值与实际值（电算值）更接近。

但是由于计算题量有限，近似计算公式不够简化。对界面应力的计算的看法，以及梁上荷载简化的方案都可能有不妥之处。敬希批评指正。

参 考 文 献

- [1] 南京工学院主编：《砖石结构》
- [2] 中国科学院数学研究所编：《常用数理统计方法》
- [3] 冶金部墙梁组编：《墙梁计算的有限单元法程序》
- [4] 华东水利学院：《弹性力学的有限单元法程》
- [5] 龙驭球编著：《有限法概论》