

昂贵多模态优化问题的代理辅助进化算法综述

季新芳^{1,2}, 贾璟伟^{1,2}, 王晓峰^{1,2}, 成金鑫³, 姚佳兴^{1,2}

(1. 北方民族大学 计算机科学与工程学院, 宁夏 银川 750021; 2. 北方民族大学 图像图形智能处理国家民委重点实验室, 宁夏 银川 750021; 3. 北京科技大学 机械工程学院, 北京 100083)

摘要: 针对工程设计中同时具有多模态特性与高评估代价的昂贵多模态优化问题 (EMMOPs), 系统综述了代理辅助进化算法 (SAEAs) 的研究进展与关键技术。首先, 介绍多项式回归模型及高斯过程等典型代理模型, 分析其在样本拟合、非线性表达与不确定性量化方面的特点及适用场景。在此基础上, 总结 SAEAs 的基本框架, 并从单代理与多代理结构、全局-局部协同搜索及填充采样策略等方面归纳现有算法的主要设计思想。其次, 依据昂贵多模态优化问题的不同特征, 对单目标、多目标、约束型及高维等典型 EMMOPs 进行系统分类与梳理, 分析代表性算法在模态识别、解多样性保持以及计算预算分配等方面的研究进展。再次, 通过 10 个典型基准函数对多种主流 SAEAs 进行实验对比, 从全局最优解和有效谷比例等指标分析各类算法的性能差异。同时结合船舶结构优化与超高压直流输电系统同步电机设计等工程实例, 说明代理辅助进化算法在复杂工程优化中的应用潜力。最后, 总结当前研究面临的关键挑战, 并从自适应代理模型管理、并行化执行与调度以及模态间信息共享与迁移机制等方面展望未来发展方向。

关键词: 昂贵优化问题; 多模态优化问题; 进化算法; 代理模型

中图分类号: TP18; O224

文献标志码: A

doi: 10.13705/j.issn.1671-6833.2026.04.014

昂贵多模态优化问题 (expensive multimodal optimization problems, EMMOPs)^[1] 是指同时具有多个全局最优解且函数评估代价高昂的优化问题, 在模型校准等^[2] 工程应用中广泛存在。该类问题通常难以获得显式的目标函数表达式, 只能依赖实验或高成本仿真进行评估, 因此计算代价高、求解难度大。其优化目标是在有限的评估预算下尽可能发现多个最优解, 来为决策者提供多样化的可选方案。

进化算法 (evolutionary algorithms, EAs) 凭借其衍生特性和强大的搜索能力, 一直吸引着大量研究人员的关注。许多新的进化算法频繁地被开发出来, 并成功地应用于各种优化计算问题, 如癌症预测^[3]。然而, 目前相关算法主要集中在多模态优化问题 (multimodal optimization problems, MMOPs) 上, 很少同时考虑 EMMOPs 的高评估成本特性。

在 EMMOPs 中, 核心挑战在于如何在有限计算

资源下同时发现多个全局最优解。传统进化算法往往依赖大量真实函数评估以保证收敛, 导致运行时间过长、求解效率低下。近年来, 代理辅助进化算法 (surrogate-assisted evolutionary algorithms, SAEAs) 被证实是解决该类问题的有效途径。其核心思想是利用历史数据构建代理模型替代真实函数, 以低成本预测适应度值。

尽管 SAEAs 在降低昂贵真实函数评估次数方面具有显著优势, 但现有多数研究主要面向具有多个最优解的 EMMOPs。为使研究者对 EMMOPs 的求解思路形成更直观、系统的认识, 本文首先综述针对昂贵优化问题 (expensive optimization problems, EOPs) 的 SAEAs 基本框架与关键技术; 随后进一步总结昂贵优化问题中 SAEAs 的研究进展与代表性方法。

本文工作如下: 重点介绍几种常用的代理模型;

收稿日期: 2026-01-06; 修订日期: 2026-01-23

基金项目: 宁夏自然科学基金资助项目 (2024AAC03169); 国家自然科学基金资助项目 (62563001); 广东省基础与应用基础研究基金 (2022A1515110055)

作者简介: 季新芳 (1987—), 女, 江苏泰州人, 北方民族大学讲师, 博士, 主要从事机器学习、进化计算的研究, E-mail: mimosas_615615@126.com。

介绍了 SAEAs 的基础概念,然后再对一些经典的求解昂贵优化问题的 SAEAs 进行对比总结;介绍昂贵多模态优化问题的 SAEAs;对当前流行的昂贵多模态优化问题的 SAEAs 进行实验对比;给出一些典型的具有昂贵多模态属性的工程实例;指出现有 SAEAs 所面临的挑战及未来可研究的方向。

1 常见的代理模型

代理模型在工程与科学优化中被广泛应用,用以替代高代价的计算模型。鉴于篇幅限制,本文重点介绍多项式回归模型与高斯过程模型,原因在于它们在复杂优化问题中的高效性、适用性及在代理辅助进化算法中的重要作用。

1.1 多项式回归模型

多项式回归模型 (polynomial regression, PR) 因其计算简便和形式灵活,常用于初步代理建模,尤其适合全局趋势预测与低维问题。基本形式为多项式回归,本质上是一类统计方法,通过高次项与交互项扩展线性回归,以捕捉变量间的非线性关系。在 SAEAs 中,多项式回归凭借可调节的阶数,能够灵活拟合复杂或非线性搜索空间的目标函数,从而更准确地逼近真实目标函数。其一般数学形式为

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \dots + \beta_n x^n + \varepsilon. \quad (1)$$

式中: y 为因变量; x 为自变量,其高次项使模型能够适应数据的非线性模式; $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n$ 均为模型参数,分别对应截距以及各个自变量项的系数; ε 为误差项,表示模型未能解释的随机变异。

1.2 高斯过程模型

高斯过程模型 (Gaussian process, GP) 因其在小样本条件下仍具备高精度预测能力,尤其在精确插值与不确定性估计方面表现突出而受到广泛关注。GP 属于概率建模方法,其核心思想是将目标函数视为随机过程,认为函数值构成的任意有限子集均服从多元高斯分布。基于此,GP 不仅能提供预测均值,还能量化预测不确定性,从而辅助

识别潜在改进点,减少对真实目标函数的评估需求。

高斯过程可以定义为对于任意的输入集合其对应的输出集合遵循多变量高斯分布。数学上,高斯过程可以表示为

$$f(x) \sim GP(m(x), k(x, x')). \quad (2)$$

式中: $f(x)$ 为定义在输入空间上的随机函数; $m(x)$ 为均值函数,表示每个点 x 的期望值,通常假设为零或其他常数; $k(x, x')$ 为协方差函数,描述了输入空间中任意两点 x 和 x' 的输出之间的相关性。

克里金模型 (Kriging) 源于随机过程与高斯过程理论,能够同时利用数据点间的空间相关性,提供预测值的最优无偏估计。在 SAEAs 中,Kriging 的不确定性估计常用于设计智能采样策略。其核心思想是将目标函数分解为确定性趋势与随机扰动之和,数学形式通常表示为

$$z(x) = u(x) + \varepsilon(x). \quad (3)$$

式中: $z(x)$ 为在位置 x 的随机过程模型; $u(x)$ 为一个确定性趋势,通常是位置 x 的线性或非线性函数; $\varepsilon(x)$ 为一个均值为零的随机误差,表示残差过程。

常见代理模型的优缺点见表 1,可以看出,GP、Kriging 与径向基函数 (radial basis function, RBF) 模型在代理辅助进化算法中应用广泛。GP 的核心优势是提供内在的不确定性估计,可构建采集函数智能平衡勘探与开采^[12],但其计算量随样本数立方级增长 ($O(n^3)$),成本较高。RBF 则计算高效 (通常为 $O(n^2)$),因此,GP、Kriging 适用于评估极其苛刻、追求最大信息效率的场景;RBF 则更适合需快速迭代的中大规模问题。两类均为不需要强假设的非参数模型,因此共同成为该领域主流的代理模型选择。

2 现有的代理辅助进化算法

2.1 代理辅助进化算法基本框架

SAEAs 的基本框架包括:首先生成初始种群并以真实目标函数进行评估,用于训练代理模型;随后

表 1 常见代理模型的优缺点

Table 1 Advantages and disadvantages of common surrogate models

代理模型	优点	缺点	类型
支持向量机 ^[4]	适配非线性与高维数据	对核函数与超参选择敏感	分类/回归
多项式回归 ^[5]	可以适用于小样本数据集	高阶易过拟合;非线性适应性有限	分类/回归
径向基函数 ^[6]	插值精度高	基函数与参数选择困难	回归
高斯过程 ^[7]	自带不确定性估计	计算复杂度随数据量呈立方级增长	回归
Kriging ^[8]	空间相关性精度高	大规模矩阵运算耗时	回归/空间预测
人工神经网络 ^[9]	可拟合复杂非线性	超参数多,训练成本高	回归
决策树 ^[10]	不需要大量的数据预处理	对连续性变量处理不佳	分类
随机森林 ^[11]	在多数情况下能有效避免过拟合问题	对噪声数据敏感	分类

在进化过程中依赖代理模型近似评估适应度,通过选择和变异产生新个体;同时定期对部分候选解进

行真实评估以更新模型;当达到终止条件时,输出最优解。SAEAs 的整体流程如图 1 所示。

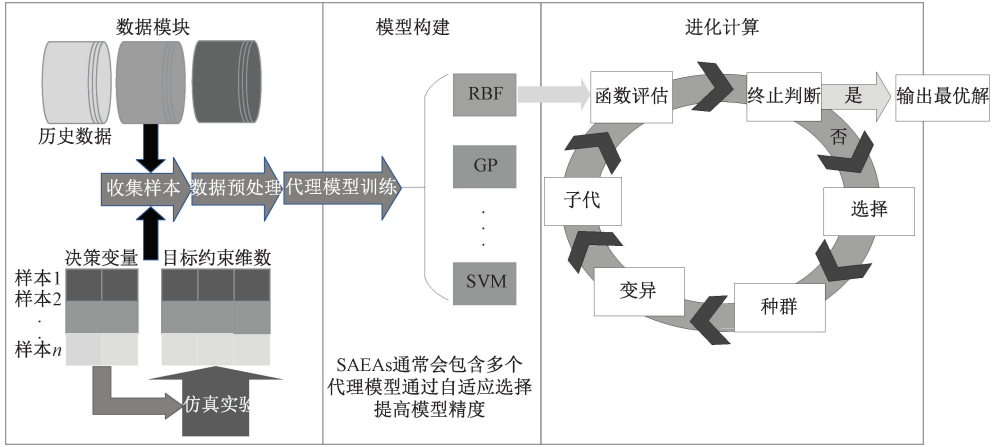


图 1 SAEAs 的基本框架

Figure 1 Basic framework of SAEAs

2.2 代理辅助进化算法解决昂贵优化问题

在许多昂贵优化问题中,使用代理模型能够显著减少对真实适应度评估的需求,从而提高算法的效率。通过在进化过程中引入代理模型,研究人员能够在较少的计算成本下近似评估个体的适应度,进而加快优化过程的收敛速度。

为了更好地利用代理模型,研究人员提出了多种模型管理技术来平衡代理模型与真实适应度评估之间的关系。其中,在基于进化代数的模型管理技术中,在某些代中使用代理模型进行适应度预测,而在其余代中使用真实适应度评估;在基于个体的模型管理技术中,只对一代中某些个体进行真实适应度评估;在基于种群的模型管理技术中,多个子种群共同进化,每个子种群都使用自己的代理模型来进行适应度评估。此外,填充采样准则主要用于 GP 辅助的进化算法,包括期望改进、改进概率和较低置信度等。代理辅助进化算法的设计方向如图 2 所示。

进化算法设计指选择合适的进化算法并根据实际问题改进进化策略以实现算法的快速收敛,可以分为新颖算子和混合算法。设计新颖的进化算子有助于加快算法的收敛速度和提高优化精度,从而更高效地解决 EOPs。例如,Cai 等^[13]提出了一种新颖的突变算子,该算子综合了不同代理所指示的最佳解,从而引导种群的突变方向。混合算法结合不同类型的优化策略,比如 Zhan 等^[14]通过有效的资源分配整合了四个不同配置的种群。

模型构建决定采用哪类代理模型以何种形式组合来拟合原始优化问题,从代理模型的数量上可分为单代理模型和多代理模型。单代理模型采用单一

形式的代理模型来拟合优化问题,可构建为全局代理或局部代理。全局代理保证了模型在整个决策空间中的广度,但是精度不够;局部代理专注于特定区域,提高局部精度但覆盖范围有限。多代理模型为多个代理模型集成来预测个体的适应度值,相比于单代理模型,可以提高预测值的准确性和鲁棒性。多代理模型的集成可分为同质集成和异构集成。同质集成指由多个相同类型的单代理模型组成,异构集成指由多个不同类型的单代理模型组成。代理模型的选择和组合方式依赖于具体优化问题的特性,设计和实施需考虑复杂性和资源消耗,以实现最佳优化效果。

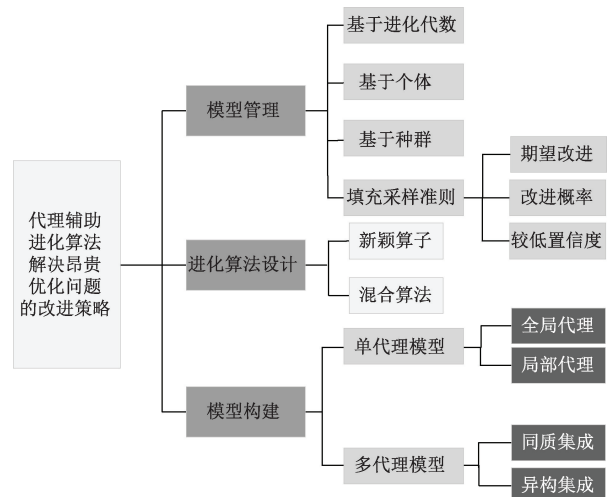


图 2 代理辅助进化算法的设计方向

Figure 2 Design directions of SAEAs

对于昂贵优化问题,以最小化为例,其表达式^[15]为

$$\begin{cases} \min f(X); \\ \text{s. t. } X \in S. \end{cases} \quad (4)$$

式中: $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_d)^T$ 为决策变量; $S \subseteq \mathbf{R}^d$ 定义了搜索空间的可行区域。

在处理昂贵优化问题时, 基于 SAEAs 的现有方法主要集中在以下 3 个方面。

(1) 增强搜索算法性能。一些研究致力于通过设计不同的搜索策略来增强进化算法的效率。例如, Li 等^[16] 提出了一种 3 层径向基函数辅助进化算法, 通过全局搜索、子区域搜索和局部开发策略来提升性能。该方法主要通过改善搜索效率来提升算法性能。

(2) 生成填充样本。为了改进代理模型的预测能力, 一些研究者提出了不同的填充策略。Li 等^[17] 提出了一种基于距离的填充策略, 选择距离现有样本点较远的优秀个体作为填充样本。

(3) 构建代理模型。为了构建鲁棒性能好的代理模型, 一些研究者提出了集成或混合代理方法, 将不同的代理模型组合起来以获得更稳定的性能。Goel 等^[18] 使用最佳代理与加权平均代理模型, 并根据预测误差确定每个模型的权重。

总的来说, 在处理昂贵优化问题时, 基于 SAEA 的方法能通过增强搜索效率、改进代理模型预测能力和集成多种代理模型来优化性能, 显著提升解决方案的质量和算法的鲁棒性。然而, 这些方法也带有明确的缺点: 增强搜索算法性能可能会导致计算复杂度和执行时间的增加, 尤其是在处理高维和复杂问题时; 生成填充样本的策略依赖于代理模型的准确性, 不准确的预测可能导致选择非最优的样本; 而集成多种代理模型虽然提高了模型的鲁棒性, 却也可能显著增加整体算法的复杂度和计算需求。部分典型代理辅助进化算法如表 2 所示。

3 昂贵多模态优化问题

3.1 单一属性昂贵多模态优化问题

SAEAs 在许多 EOPs 上都引起了广泛关注。与 EOPs 相比, 人们很少尝试解决具有多个全局解的 EMMOPs。以最小化问题为例, 一个昂贵多模态优化问题^[1] 可描述如下:

$$\begin{cases} \min f(\mathbf{X}); \\ \text{s. t. } \mathbf{X} \in S \subseteq \mathbf{R}^D. \end{cases} \quad (5)$$

式中: $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_D)$ 为 D 维决策变量; S 为决策变量 \mathbf{X} 的取值空间; \mathbf{R}^D 为 D 维空间。需要说明的是式(4)与式(5)的区别在于式(5)中的 $f(\mathbf{X})$ 具有多模态属性。

利用 SAEAs 处理 EMMOPs 问题, 现有方法大都集中在全局和局部分阶段搜索、代理模型管理、多任务方法 3 个方面。

在全局与局部分阶段搜索方面, Du 等^[31] 提出的 SAKT-MMEA 结合全局代理辅助采样与联合代理辅助局部搜索; Ji 等^[32] 提出的 DSADE 与 Gao 等^[1] 提出的 D/REM 则通过区域分解与聚类识别潜在子区域, 并借助局部代理模型提升局部搜索的精度与效率。

在代理模型管理方面, Ji 等^[33] 提出 DSCPSO-EMM, 利用全局与局部代理的双层结构平衡新模式探索与已知模式优化; Chen 等^[34] 提出 MSAEA, 利用多输出高斯过程实现跨区域信息共享; 季新芳等^[35] 提出 IMPSO-HES, 通过动态增量更新机制提升代理模型在进化过程中的适应性。

在多任务方法方面, Ji 等^[36] 提出 MaMPSO, 将 Kriging、RBF 和 PR 这 3 类代理模型视为并行任务进行自适应聚合, 以增强模型鲁棒性。不同算法所用代理模型及优缺点如表 3 所示。

表 2 部分典型代理辅助进化算法

Table 2 Several representative surrogate-assisted evolutionary algorithms

算法名称	代理模型	问题属性	模型管理	模型构建	主要贡献
EXO-SAEA ^[19]	Kriging	昂贵、多目标			Shapley 值的采样方法
PCBO ^[20]	GP	昂贵、约束	填充采样准则	同质集成	多种采样准则的并行点添加策略
SITFO ^[21]	RBF/Kriging	昂贵、高维	填充采样准则	异构集成	代理信息传输和代理信息融合
ESAEDA ^[22]	随机森林	昂贵、高维	填充采样准则	全局代理	多个获取策略来优化模型辅助选择
IG-OFSA ^[23]	Kriging	昂贵、大规模	基于进化代数	同质集成	惯性分组与重叠特征选择的稳健分解模型
TP-SAEA ^[24]	RBF/Kriging	昂贵、高维	基于进化代数	异构集成	变量提取和问题分解的策略
SA-CMOEA ^[25]	Kriging	昂贵、多目标			自适应切换采集函数的代理模型
TEA ^[26]	Kriging	昂贵、约束、多目标	基于进化代数	全局代理	基于概率分布的 Pareto 支配关系
SADE-MLS ^[27]	RBF/Kriging	昂贵、高维、约束			流形学习技术将数据映射至低维空间
RM-SAEA ^[28]	Kriging	昂贵、多目标	基于种群	异构集成	通用遗传算法和正则模型来生成后代
AVG-SAEA ^[29]	RBFN	昂贵、高维、多目标	基于个体	异构集成	径向基函数网络分别训练子模型
SELF ^[30]	GP	昂贵、多任务	基于个体	同质集成	改进个体通过最大化期望改进进行选择

表 3 不同算法所用代理模型及优缺点

Table 3 Surrogate models and advantages and disadvantages of different algorithms

算法名称	代理模型	优点	缺点
D/REM ^[1]	RBF	高效的模态探索和利用	对于高维问题性能不佳
SAKT-MMEA ^[31]	RBF	通过知识转移提高搜索效率	在非常狭窄的模态上表现不佳
DSADE ^[32]	MLP	能够同时定位多个解	对复杂函数性能下降
DSCPSO-EMM ^[33]	RBFN	有效提升了解的质量和多样性	参数设置敏感,高维问题中的可扩展性有限
MSAEA ^[34]	MOGP	捕获局部区域之间的相关性	性能依赖于超参数调整
IMPSO-HES ^[35]	RBF、PR	增量式的代理模型管理策略	预测误差和累积效应
MaMPSO ^[36]	Kriging、RBF、PR	解决具有多个目标的问题	在非常大规模问题上其性能会下降

3.2 具有多目标属性的昂贵多模态优化问题

多目标优化问题 (multi-objective optimization problems, MOPs) 已成为一种流行的问题类型,在这种问题中,需要同时优化两个以上相互冲突的目标。在本文中,一个带有盒式约束的 MOP 问题^[37]表达如下:

$$\begin{cases} \min f(\mathbf{X}) = [f_1(\mathbf{X}), f_2(\mathbf{X}), \dots, f_m(\mathbf{X})]; \\ \text{s. t. } \mathbf{X} \in S. \end{cases} \quad (6)$$

式中: \mathbf{X} 为包含 D 维决策变量的解向量; $f(\mathbf{X})$ 表示目标空间中的目标向量,包括 m 个相互冲突的目标; $S = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : \mathbf{x}_1 \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}_n\}$; \mathbf{x}_1 和 \mathbf{x}_n 分别为搜索空间中的下限和上限向量。

式(6)中所定义的、包含目标值相同的多个等效 Pareto 最优解的多目标优化问题通常被称为多模态多目标优化问题 (multimodal multi-objective optimization problems, MMOOPs)。以自主车辆路径规划^[38]为例,高保真闭环仿真通常需要数百次,以兼顾安全、效率与乘坐舒适性等彼此冲突的目标。与此同时,道路拓扑及离散的换道/绕行决策会产生多条等优的同伦轨迹,导致目标景观多峰,因而该类问题属于昂贵多模态多目标优化 (expensive multimodal multi-objective optimization problems, EMMOOPs)。

针对 EMMOOPs,目前仅有 Lyu 等^[39]提出的多代理辅助粒子群优化算法。该方法通过自适应调度的多代理模型估计种群适应度,以揭示决策空间与目标空间的多对一映射;同时引入具有自适应生态位半径的物种分化机制,实现物种自组织进化。

3.3 含有约束的昂贵多模态优化问题

昂贵约束多模态优化问题 (expensive constrained multimodal optimization problems, ECMMOPs) 兼具目标与约束计算代价高昂的特征。在电动汽车悬架臂优化^[40]等问题中,又进一步呈现多模态特性,即在可行域内存在多个全局或局部最优解。综合而言,此类问题可被定义为 ECMMOPs,其形式化表

达^[41]如下所示:

$$\begin{cases} \min f(\mathbf{X}); \\ \text{s. t. } g_i(\mathbf{X}) \leq 0, i = 1, \dots, m, \\ \mathbf{X} \in S \subseteq \mathbf{R}^D. \end{cases} \quad (7)$$

式中: $\mathbf{X} = (x_1, \dots, x_D)$ 为 D 维决策向量; S 为 \mathbf{X} 的值空间; \mathbf{R}^D 为 D 维搜索空间; $f(\mathbf{X})$ 为目标函数; $g_i(\mathbf{X})$ 为第 i 个不等式约束; m 为约束个数。此外,约束违反度 (CV) 通常用于评估候选解的可行性:

$$CV(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^m \max(0, g_i(\mathbf{X})). \quad (8)$$

显然,当且仅当 $CV(\mathbf{X}) = 0$ 时, \mathbf{X} 才是可行的。

针对 ECMMOPs, Zhang 等^[41]提出了一种代理辅助粒子群优化算法。该方法采用双层合作代理模型、目标-约束互导的部分评估策略及混合更新机制,有效提升预测精度、降低计算成本并改善解的质量。

在昂贵多目标与昂贵约束优化问题中,通常假设各个目标与约束的评估成本相同。然而在更现实的情境中,不同目标或约束往往由不同的计算机模拟或物理实验完成,评估代价差异显著。这类问题被称为目标或约束计算不平衡问题,亦称异质性优化问题。

针对该问题,现有研究提出了 3 类主要策略:其一,延迟评估策略根据计算代价调整评估顺序,优先评估低成本目标并推迟昂贵目标的调用,例如 Blank 等^[42]通过信息增益指标动态确定评估顺序;其二,部分评估策略通过选择性评估目标或约束降低计算需求,例如 Blank 等^[43]利用廉价约束筛选可行解并结合代理模型减少昂贵目标调用;其三,迁移学习方法通过借鉴相关问题的知识减少昂贵评估,例如 Wang 等^[44]结合代理模型与迁移学习,利用特征选择识别关键变量。

3.4 面向高维场景的昂贵多模态优化问题

在实际应用中,随着大数据与复杂问题的涌现,高维多模态优化问题日益常见。其搜索空间

极其庞大,且局部极小值数量过多。这类同时具有多模态特性、大规模决策变量及高计算成本的问题被称为高维昂贵多模态优化问题(high-dimensional expensive multimodal optimization problems, HEMMOPs)。

在解决高维昂贵多模态优化问题时,探索与利用的平衡至关重要。探索旨在开拓新的搜索区域并依赖种群多样性,而利用则聚焦于利用已有信息以获得高精度解。针对高维昂贵多模态优化问题,仅有 Ji 等^[45]提出了 SADMPSO,该方法通过自动编码器将高维问题映射至低维空间以降低求解复杂度,并设计了多层次代理模型以兼顾精度与成本。然而,在处理具有大量局部模态的高维问题时,其性能仍有待提升。

4 实验测试

4.1 基准测试问题

本文对第 3.1 节汇总的 7 种面向单一属性 EM-MOPs 的 SAEAs 开展对比评测。聚焦单一属性的原因是多目标、约束、高维等属性算法较少,且基准测试问题与测评指标未统一,难以形成可比框架。实验选用 10 个基准问题,如表 4 所示。

算法性能通过以下两项测评指标进行评估:全局最优解 GS 和有效谷比例 VR 。 VR 用于计算算法检测到的谷点数与所有谷点数的比值:

$$VR = \frac{\sum_{i=1}^R NFV_i}{NV \cdot R} \quad (9)$$

式中: NV 为问题的总谷点数; NFV_i 为算法第 i 次运行找到的谷点数; R 为算法的运行次数。

4.2 参数设置

为确保公平对比,所有测试函数(F1~F10)统一将最大真实评价次数设定为 500,作为各算法的

终止条件,其余参数保持原有算法的参数设置。

4.3 不同 SAEAs 对比

为了验证不同算法获得全局最优解的能力,将 IMPSO-HES、MaMPSO、DSCPSO-EMM、DSADE、SAKT-MMEA、MSAEA 和 D/REM 进行对比。实验结果如表 5 所示。

基准问题 F1~F4 均具有多峰性、非线性以及全局最小值位于原点等共同特征。由表 5 可知,F1 上 MaMPSO 表现最佳;F2 上除 IMPSO-HES 外,各算法性能接近,但由于该问题存在大量局部最优解,算法仍易陷入局部最优;F3 具有较宽搜索空间和分布不均的局部最小值,其中 DSCPSO-EMM 表现最优,其全局-局部双层代理结构能够在探索新模态的同时充分利用已有模态;F4 的全局最优解位于搜索域边界,DSCPSO-EMM 与 D/REM 显示出其在边界型问题上的较强适应能力。

对于具有多个全局或局部最优解的 F5~F10 问题,F5 以非凸性为特征,其中 IMPSO-HES 与 MaMPSO 表现最佳;F6 为典型双峰问题,IMPSO-HES 通过动态更新代理模型保持精度与适应性,因而取得最优表现;F7 具有强非线性、非对称性与高波动性,尽管 DSCPSO-EMM 与 SAKT-MMEA 达到全局最优解,但其 VR 值偏低;F8~F10 均为一维问题,但峰值特性差异明显,F8 含 5 个不均匀峰值,IMPSO-HES 表现最优;F9 峰值高度一致,提供均匀测试环境,所有算法表现均衡;F10 的峰值高度随距离递减,MSAEA 在该问题上表现最优。

5 工程实例

昂贵多模态问题广泛存在于实际工程领域中,如能源管理、航空航天和交通物流等领域。下面列举一些典型的工程实例,这些工程实例有些还具有多目标、高维、约束等属性。

表 4 基准测试问题

Table 4 Benchmark test problems

测试函数	算法	维数	决策变量空间	全局解	局部解	全局最优解的目标值
F1	Ackley	10	$x \in [-30, 30]$	1	多个	0
F2	Rastrigin	10	$x \in [-5.12, 5.12]$	1	多个	0
F3	Griewanks	10	$x \in [-600, 600]$	1	多个	0
F4	Schwefel	10	$x \in [-500, 500]$	1	多个	0
F5	UrsemF4 back	2	$x \in [-2, 2]$	2	0	-0.267 9
F6	Six-hump camel	2	$x_1 \in [-1.9, 1.9], x_2 \in [-1.1, 1.1]$	2	2	-1.031 6
F7	Waves	2	$x_1 \in [-0.9, 1.2], x_2 \in [-1.2, 1.2]$	1	9	-7.776
F8	Five-Uneven-Peak Trap	1	$x \in [0, 30]$	2	3	200
F9	Equal Maxima	1	$x \in [0, 1]$	5	0	1
F10	Uneven Decreasing Maxima	1	$x \in [0, 1]$	1	4	1

表 5 7 种 SAEAs 结果对比

Table 5 Result comparison of seven SAEAs

测试函数	指标	维数	IMPSO-HES	MaMPSO	DSCPSO-EMM	DSADE	SAKT-MMEA	MSAEA	D/REM
F1	GS 均值	10	17.99	3.582	10.68	8.76	6.12	4.751	5.451
	GS 方差		1.10E+00	1.20E+00	1.3E+00	1.10E+00	1.30E+00	9.65E-02	4.1E-01
F2	GS 均值	10	58.266	47.63	56.601	52.121	47.31	48.01	53.46
	GS 方差		1.30E+02	3.20E+02	8.20E+01	2.60E+02	3.5 E+02	1.59E+01	2.8E+02
F3	GS 均值	10	17.31	13.01	1.036	14.59	8.732	11.32	1.57
	GS 方差		1.10E+02	3.30E-06	1.10E-02	2.10E-01	1.3 E-01	7.00E-01	6.8E+00
F4	GS 均值	10	12.3	9.64	1.23	4.13	5.12	7.44	1.41
	GS 方差		8.04 E+02	5.72 E+00	4.21E+01	4.13E+01	5.26+02	7.26E+01	2.1E+00
F5	GS 均值	2	-0.267 9	-0.267 9	-0.248 9	-0.256 7	-0.237 7	-0.258 1	-0.180 5
	GS 方差		1.6E-06	3.00E-15	1.10E-03	1.30E-04	1.5 E-02	1.37E-02	1.43E-02
	VR 均值		1	1	1	1	1	0.96	0.983
F6	GS 均值	2	-1.031 6	-1.013 7	-1.027 6	-0.963	-1.072	-1.029	-1.001
	GS 方差		9.8E-07	9.80E-10	8.10E-06	9.10E-08	6.20E-05	4.20E-03	6.50E-08
	VR 均值		1	1	0.78	1	0.93	0.94	0.763
F7	GS 均值	2	-7.429 9	-7.665	-7.776	-7.393	-7.776	-7.572	-6.21
	GS 方差		1.7E-02	5.40E-02	8.70E-31	7.60E-14	8.10E-12	6.10E-09	8.30E-05
	VR 均值		0.4	0.56	0.66	0.47	0.59	0.49	0.49
F8	GS 均值	1	203.4	211.02	242.33	242.27	378.9	212.31	216.71
	GS 方差		4.7E-03	5.1E-01	9.31E+00	5.7E-01	6.31E-06	6.37E-01	6.19E+00
	VR 均值		1	1	0.96	0.84	1	1	1
F9	GS 均值	1	1	1	1.31	1	1.4	1	1
	GS 方差		6.2E+01	1.9E-03	2.7E-03	5.3E-03	1.72E-03	0.8E-03	2.1E-05
	VR 均值		1	1	1	0.96	1	0.85	1
F10	GS 均值	1	1.7	2.23	1.72	1.32	1.44	1.24	3.54
	GS 方差		8.72 E-05	5.63E-01	1.56E-17	4.8E-01	7.2E-01	7.33E-01	1.7E-01
	VR 均值		0.62	0.92	1	0.87	0.83	1	0.91

5.1 船舶强框架结构的优化设计

在船舶工程领域,强框架结构优化问题可视为典型的昂贵约束多模态优化问题。其昂贵属性源于每一次设计评估均需进行粗/细网格有限元仿真;在多工况环境下,需对 M 个工况进行分析,并在每个工况下对 N 个特征应力点进行校核,最终形成多达数百条约束。该问题还呈现出多模态属性,由非线性及多工况耦合共同导致,使得可行域边界附近往往存在多组竞争性设计。

优化目标为最小化结构质量,数学模型为

$$\begin{cases} \min \text{mass}(X); \\ \text{s. t. } \frac{\sigma_{ij}(X)}{[\sigma_{ij}]} - 1 < 0, \\ \forall i \in \{1, 2, \dots, M\}, \forall j \in \{1, 2, \dots, N\}. \end{cases} \quad (10)$$

式中: X 为设计变量; $\text{mass}(X)$ 为设计区域结构质量; $\sigma_{ij}(X)$ 为不同工况下设计区域内规范所要求校核的各部分的应力值; $[\sigma_{ij}]$ 为规范所允许的最大应力,其中 i 为工况编号, j 为单一工况下需要校核的应力编号; M 为工况数; N 为单一工况下需要校核

的特征应力点数。具体参数见文献[37]。

根据第 3.3 节的定义,该问题具有约束属性,属于 ECMMOPs。汪俊泽等^[46]针对船舶强框架结构优化问题将原有的 675 条约束进行聚合,分别形成两个“积极约束”,并分别构建 Kriging 代理模型。在此基础上,提出采用序贯代理建模与约束遗传算法相结合的优化策略,在约束边界附近针对约束代理进行定向优化以提升预测精度。在相同计算成本条件下,静态代理难以获得可行解。相比之下,序贯代理方法在两种计算成本下均能成功找到可行解,并使设计区域的质量显著提升 15.35%~15.55%。

5.2 超高压直流输电系统同步电机的优化设计

在超高压直流输电系统中,大型绕线式同步电机的瞬态参数优化属于典型的昂贵-多目标-多模态工程问题。每一组候选设计都必须通过电磁有限元与电磁瞬态仿真联合评估;优化目标同时覆盖瞬态与亚瞬态关键参数的精确匹配。随着同步调相机、发电机在瞬态工况下的稳定性要求显著提升,传统的串行化设计-仿真流程往往难以在一次仿真中兼

顾全部瞬态指标,导致评估成本高、迭代周期长。实际工程中,单个方案的评估通常依赖计算耗时的商业仿真平台(如PSCAD、EMTDC)及电磁有限元求解器,进一步加剧了问题的非凸性与多模态特征。其数学描述如下所示:

$$\begin{cases} \min E_s = \frac{1}{3} \sqrt{\mathbf{X}_{d, \text{re}}^2 + \mathbf{X}_{q, \text{re}}^2 + \mathbf{X}_{l, \text{re}}^2}; \\ \min E_t = \sqrt{\mathbf{X}_{dt, \text{re}}^2}; \\ \min E_{st} = \frac{1}{4} \sqrt{\mathbf{X}_{dst, \text{re}}^2 + \mathbf{X}_{qst, \text{re}}^2 + \mathbf{X}_{dst, \text{re}}^2 + T_{qst, \text{re}}^2}. \end{cases} \quad (11)$$

式中: E_s 和 E_t 均为优化级别 1 的目标; E_{st} 为优化级别 2 的目标; $\mathbf{X}_{d, \text{re}}, \mathbf{X}_{q, \text{re}}, \mathbf{X}_{l, \text{re}}, \mathbf{X}_{dt}, \mathbf{X}_{dst, \text{re}}, \mathbf{X}_{qst, \text{re}}, T_{dst, \text{re}}, T_{qst, \text{re}}$ 分别为 d 轴电抗、 q 轴电抗、定子漏抗、 d 轴瞬态电抗、 d 轴次瞬态电抗、 q 轴次瞬态电抗、 d 轴次瞬态时间常数和 q 轴次瞬态时间常数的相对误差。具体函数和参数见文献[47]。

根据第 3.2 节的定义,该问题具有 3 个目标,属于 EMMOOPs。Ma 等^[47] 等针对超高压直流输电系统优化问题通过改进的任意转子位置静止时间响应方法和拉丁超立方生成训练数据集来构建两个层级的数据集,并基于多输出最小二乘支持向量回归训练多输出代理模型,并以 NSGA-II 执行两级多目标优化。在两级代理模型的支撑下,所提出的优化流程在显著降低计算开销的同时保持了较高的设计精度:相较常规五层级参数扫描,所需真实评估次数大幅压缩,仅约 400 次。结果显示,样机的瞬态与亚瞬态关键参数与设计目标高度一致。

6 挑战性问题和未来研究

(1) 自适应代理模型的构建与管理。不同模态与代理模型的适配度存在显著差异,因此在构建代理模型时需根据问题类型与优化阶段进行动态选择:早期数据稀缺,可采用具备不确定性估计能力的高斯过程以引导采样;数据充足后,则可切换至高容量模型(如深度神经网络)以提升拟合精度。这一过程引出了动态代理模型选择的核心挑战:如何依据问题特性与优化进程自适应地调整模型策略。

针对上述挑战,可构建一个融合“可靠性建模-组合融合-采样调度-阶段切换”的一体化自适应框架。其中,可靠性建模层采用“偏差校正与置信校准”双通道机制:首先利用低保真模型或辅助模态进行预筛选,并通过残差或比例校正抑制系统性偏差;其次,采用异方差不确定性构建刻画预测置信范围,并借助少量高保真样本进行闭环校准;当跨模态相关性较弱时,自适应降低其权重。组合融合层实

施“主模型与保底模型”的动态集成策略:以外推稳健且具备不确定性估计的模型(如 GP、RBF)作为保底,高容量模型作为主力;根据局部泛化误差、样本密度及与可行域边界的距离自适应加权融合。阶段切换层以学习曲线斜率、校准误差和样本多样性作为触发信号:早期侧重保底模型与多保真校正以实现稳健探索;中期增加主力模型权重并收缩信任域以加速局部优化;后期进行局部再训练以提升精度。该闭环框架能够在多源异质、评估昂贵的条件下兼顾稳健性、信息效率与可验证的全局收敛性。

(2) 并行化执行与调度。面对昂贵多模态问题的高评估成本,须充分利用并行计算资源,但仍存在三类核心挑战:首先,同步更新虽有利于维持算法一致性与可证明性,但在评估耗时差异大或资源异构时易导致计算空转;其次,异步并行可显著提升吞吐量与缩短壁钟时间,但个体更新不同步会引入信息陈旧问题,增加收敛分析与代理模型稳定性的难度;最后,多模态优化需在解空间覆盖与局部寻优之间动态权衡,并行机制需避免因追求效率而忽略潜在全局最优区域。

为此,可构建一种异步-同步融合的分层框架,以收敛速率、种群多样性和资源空闲率为反馈,自适应调节同步频率(例如当解分布相似度升高时触发同步)。在架构设计上,采用全局异步-局部同步的策略:全局层持续进行异步探索与跨区域迁移,局部层在每批评估完成后执行同步优化与选择,并可根据区域复杂度在线切换到“异步广域探索-同步局部收敛”模式。

在调度策略方面,可引入“多模态价值评分”机制,综合衡量新模态发现潜力(孤立点或簇间空隙)及对已知模态的区分能力,构建“簇内-孤立点”分层优先队列;先快速由代理完成候选预筛,再将高价值样本提交真实评估。该机制在确保收敛稳健性的同时,使评估预算优先投向最具有价值的样本,从而同步提升模态发现率与整体优化效率。

(3) 模态间的信息共享与迁移机制。在多模态优化中,不同模态或数据源之间往往存在内在关联,因此设计有效的共享与迁移机制是提升求解效率的关键。代理模型方面,低精度模型可提供整体趋势,高精度模型负责精细校核。可通过残差校正、协同 Kriging、知识蒸馏等方法,将低保真评估中提取的“粗粒度排序”迁移到高保真阶段,并引入基于置信度的不确定性以调节迁移强度,抑制低保真偏差的负面影响。算法方面,可通过子群体分工与受控迁移实现“探索-开采”的平衡:全局层面采用异步的

信息广播与候选解交换,以提高系统吞吐量;局部层面在小批次评估完成后执行同步优化与选择,更新高质量解集。

7 结语

本文围绕昂贵多模态优化问题,系统综述了代理辅助进化算法的研究进展与关键技术。从代理模型构建出发,总结了多项式回归、高斯过程及 Kriging 等典型代理模型,并归纳了代理辅助进化算法的基本框架与主要设计策略。在此基础上,对单目标、多目标、约束及高维等不同类型问题的研究方法进行了分类梳理,并通过基准函数实验比较了多种主流算法的性能差异。同时,列举了几种典型的昂贵多模态工程优化实例,以说明该类问题在复杂工程优化中的实际应用背景。最后,总结当前研究面临的主要挑战,并对未来发展方向进行了展望。

参考文献:

- [1] Gao Weifeng, Wei Zhifang, Gong Maoguo, et al. Solving expensive multimodal optimization problem by a decomposition differential evolution algorithm[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2023, 53(4): 2236–2246.
- [2] Chica M, Barranquero J, Kajdanowicz T, et al. Multimodal optimization: an effective framework for model calibration[J]. *Information Sciences*, 2017, 375: 79–97.
- [3] Thawkar S, Sharma S, Khanna M, et al. Breast cancer prediction using a hybrid method based on butterfly optimization algorithm and ant lion optimizer[J]. *Computers in Biology and Medicine*, 2021, 139: 104968.
- [4] Brereton R G, Lloyd G R. Support vector machines for classification and regression[J]. *The Analyst*, 2010, 135(2): 230–267.
- [5] Aguirre-Urreta M I, Rönkkö M, Hu Jiang. Polynomial regression and measurement error: implications for information systems research[J]. *ACM SIGMIS Database: the DATABASE for Advances in Information Systems*, 2020, 51(3): 55–80.
- [6] Wang Zilong, Ierapetritou M. A novel feasibility analysis method for black-box processes using a radial basis function adaptive sampling approach[J]. *AIChE Journal*, 2017, 63(2): 532–550.
- [7] Liu Haitao, Ong Y S, Shen Xiaobo, et al. When Gaussian process meets big data: a review of scalable GPs[J]. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2020, 31(11): 4405–4423.
- [8] Liu Xinwang, Zhao Weiwen, Wan Decheng. Multi-fidelity Co-Kriging surrogate model for ship hull form optimization[J]. *Ocean Engineering*, 2022, 243: 110239.
- [9] Manning C D, Clark K, Hewitt J, et al. Emergent linguistic structure in artificial neural networks trained by self-supervision[J]. *PNAS*, 2020, 117(48): 30046–30054.
- [10] Pham B T, Van Phong T, Nguyen-Thoi T, et al. Ensemble modeling of landslide susceptibility using random subspace learner and different decision tree classifiers[J]. *Geocarto International*, 2022, 37(3): 735–757.
- [11] Speiser J L, Miller M E, Tooze J, et al. A comparison of random forest variable selection methods for classification prediction modeling[J]. *Expert Systems with Applications*, 2019, 134: 93–101.
- [12] Jones D R, Schonlau M, Welch W J. Efficient global optimization of expensive black-box functions[J]. *Journal of Global Optimization*, 1998, 13(4): 455–492.
- [13] Cai Xiwen, Gao Liang, Li Xinyu, et al. Surrogate-guided differential evolution algorithm for high dimensional expensive problems[J]. *Swarm and Evolutionary Computation*, 2019, 48: 288–311.
- [14] Zhan Zhihui, Liu Xiaofang, Zhang Huaxiang, et al. Cloudde: a heterogeneous differential evolution algorithm and its distributed cloud version[J]. *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*, 2017, 28(3): 704–716.
- [15] Jin Yaochu. Surrogate-assisted evolutionary computation: recent advances and future challenges[J]. *Swarm and Evolutionary Computation*, 2011, 1(2): 61–70.
- [16] Li Genghui, Zhang Qingfu, Lin Qiuzhen, et al. A three-level radial basis function method for expensive optimization[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2022, 52(7): 5720–5731.
- [17] Li Zhongguo, Dong Zhen, Liang Zhongchao, et al. Surrogate-based distributed optimisation for expensive black-box functions[J]. *Automatica*, 2021, 125: 109407.
- [18] Goel T, Haftka R T, Shyy W, et al. Ensemble of surrogates[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2007, 33(3): 199–216.
- [19] Li Bingdong, Yang Yanting, Liu Dacheng, et al. Accelerating surrogate assisted evolutionary algorithms for expensive multi-objective optimization via explainable machine learning[J]. *Swarm and Evolutionary Computation*, 2024, 88: 101610.
- [20] Duan Libin, Xue Kaiwen, Jiang Tao, et al. A parallel constrained Bayesian optimization algorithm for high-dimensional expensive problems and its application in optimization of VRB structures[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2024, 67(4): 50.
- [21] Pang Yong, Zhang Shuai, Jin Yaochu, et al. Surrogate information transfer and fusion in high-dimensional expen-

-
- sive optimization problems [J]. *Swarm and Evolutionary Computation*, 2024, 88: 101586.
- [22] Shang Jin, Li Guiying, Hao Hao, et al. Efficient surrogate model assisted estimation of distribution algorithm for expensive optimization [J]. *IEEE Access*, 2024, 12: 78248–78260.
- [23] Deng Chuanyi, Sun Chaoli, Liu Xiaotong, et al. An inertial grouping and overlapping feature selection assisted algorithm for expensive large-scale optimization problems [J]. *Journal of Zhengzhou University (Engineering Science)*, 2023, 44(5): 32–39. [邓传义, 孙超利, 刘晓彤, 等. 惯性分组和重叠特征选择辅助的昂贵大规模优化算法 [J]. *郑州大学学报(工学版)*, 2023, 44(5): 32–39.]
- [24] Pan Linqiang, Lin Jianqing, Wang Handing, et al. Computationally expensive high-dimensional multiobjective optimization via surrogate-assisted reformulation and decomposition [J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2025, 29(4): 921–935.
- [25] Wu Haofeng, Chen Qingda, Jin Yaochu, et al. A surrogate-assisted expensive constrained multi-objective optimization algorithm based on adaptive switching of acquisition functions [J]. *IEEE Transactions on Emerging Topics in Computational Intelligence*, 2024, 8(2): 2050–2064.
- [26] Zhang Zhiyao, Wang Yong, Liu Jiao, et al. A two-phase Kriging-assisted evolutionary algorithm for expensive constrained multiobjective optimization problems [J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2024, 54(8): 4579–4591.
- [27] Long Teng, Ye Nianhui, Chen Rong, et al. Surrogate-assisted differential evolution using manifold learning-based sampling for high-dimensional expensive constrained optimization problems [J]. *Chinese Journal of Aeronautics*, 2024, 37(7): 252–270.
- [28] Li Bingdong, Lu Yongfan, Qian Hong, et al. Regularity model based offspring generation in surrogate-assisted evolutionary algorithms for expensive multi-objective optimization [J]. *Swarm and Evolutionary Computation*, 2024, 86: 101506.
- [29] Li Yingwei, Feng Xiang, Yu Huiqun. Solving high-dimensional expensive multiobjective optimization problems by adaptive decision variable grouping [J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2025, 29(4): 1041–1054.
- [30] Tan Shenglian, Wang Yong, Sun Guangyong, et al. A surrogate-assisted evolutionary framework for expensive multitask optimization problems [J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2025, 29(3): 779–793.
- [31] Du Wenhao, Ren Zhigang, Wang Jihong, et al. A surrogate-assisted evolutionary algorithm with knowledge transfer for expensive multimodal optimization problems [J]. *Information Sciences*, 2024, 652: 119745.
- [32] Ji Jingyu, Tan Zusheng, Zeng Sanyou, et al. A surrogate-assisted evolutionary algorithm for seeking multiple solutions of expensive multimodal optimization problems [J]. *IEEE Transactions on Emerging Topics in Computational Intelligence*, 2024, 8(1): 377–388.
- [33] Ji Xinfang, Zhang Yong, Gong Dunwei, et al. Dual-surrogate-assisted cooperative particle swarm optimization for expensive multimodal problems [J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2021, 25(4): 794–808.
- [34] Chen Renzhi, Li Ke. Multioutput surrogate assisted evolutionary algorithm for expensive multi-modal optimization problems [C]//*Proceedings of the 2023 IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics (SMC)*. Piscataway: IEEE, 2024: 5176–5181.
- [35] Ji Xinfang, Zhang Yong, Gong Dunwei, et al. Interval multimodal particle swarm optimization algorithm assisted by heterogeneous ensemble surrogate [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2024, 50(9): 1831–1853. [季新芳, 张勇, 巩敦卫, 等. 异构集成代理辅助的区间多模态粒子群优化算法 [J]. *自动化学报*, 2024, 50(9): 1831–1853.]
- [36] Ji Xinfang, Zhang Yong, Gong Dunwei, et al. Multisurrogate-assisted multitasking particle swarm optimization for expensive multimodal problems [J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2023, 53(4): 2516–2530.
- [37] Deb K. Multi-objective optimisation using evolutionary algorithms: an introduction [M]//*Multi-objective evolutionary optimisation for product design and manufacturing*. London: Springer London, 2011: 3–34.
- [38] Tian Ye, Liu Ruchen, Zhang Xingyi, et al. A multipopulation evolutionary algorithm for solving large-scale multimodal multiobjective optimization problems [J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2021, 25(3): 405–418.
- [39] Lyu Zhiming, Niu Dangdang, Li Shuqin, et al. Multi-surrogate assisted PSO with adaptive speciation for expensive multimodal multi-objective optimization [J]. *Applied Soft Computing*, 2023, 147: 110724.
- [40] Mehta P, Panagant N, Wansasueb K, et al. Optimization of vehicle conceptual design problems using an enhanced hunger games search algorithm [J]. *Materials Testing*, 2024, 66(11): 1864–1889.
- [41] Zhang Yong, Ji Xinfang, Gao Xiaozhi, et al. Objective-constraint mutual-guided surrogate-based particle swarm optimization for expensive constrained multimodal problems [J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*

tion, 2023, 27(4): 908–922.

[42] Blank J, Deb K. Handling constrained multi-objective optimization problems with heterogeneous evaluation times: proof-of-principle results [J]. *Memetic Computing*, 2022, 14(2): 135–150.

[43] Blank J, Deb K. Constrained bi-objective surrogate-assisted optimization of problems with heterogeneous evaluation times: expensive objectives and inexpensive constraints [C]//*Evolutionary Multi-Criterion Optimization*. Cham: Springer, 2021: 257–269.

[44] Wang Xilu. Bayesian evolutionary optimization for heterogeneously expensive multi-objective problems[D]. Guildford, South East England, UK: University of Surrey, 2022.

[45] Ji Xinfang, Zhang Yong, He Chunlin, et al. Surrogate

and autoencoder-assisted multitask particle swarm optimization for high-dimensional expensive multimodal problems[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2024, 28(4): 1009–1023.

[46] Wang Junze, Wang Yuan, Yi Jiayang, et al. Genetic optimization method of ship strong frame based on sequential surrogate model [J]. *Chinese Journal of Ship Research*, 2021, 16(4): 44–52. [汪俊泽, 王元, 易家祥, 等. 船舶强框架序贯代理模型辅助遗传优化方法 [J]. *中国舰船研究*, 2021, 16(4): 44–52.]

[47] Ma Y, Wang J, Xiao Y, et al. Two-level surrogate-assisted transient parameters design optimization of a wound-field synchronous machine[J]. *IEEE Transactions on Energy Conversion*, 2022, 37(1): 737–747.

A Review of Surrogate-assisted Evolutionary Algorithms for Expensive Multimodal Optimization Problems

Ji Xinfang^{1,2}, JIA Jingwei^{1,2}, WANG Xiaofeng^{1,2}, CHENG Jinxin³, YAO Jiaying^{1,2}

(1. School of Computer Science and Engineering, North Minzu University, Yinchuan 750021, China; 2. The Key Laboratory of Images and Graphics Intelligent Processing of State Ethnic Affairs Commission, North Minzu University, Yinchuan 750021, China; 3. School of Mechanical Engineering, University of Science and Technology Beijing, Beijing 100083, China)

Abstract: Expensive multimodal optimization problems (EMMOPs) frequently arise in engineering design and are characterized by multimodal properties and extremely high evaluation costs. The research progress and key techniques of surrogate-assisted evolutionary algorithms (SAEAs) for solving such problems were systematically reviewed. Firstly, representative surrogate models, including polynomial regression model and Gaussian process, were introduced, with emphasis on their characteristics and applicability in sample fitting, nonlinear representation, and uncertainty quantification. On this basis, the general framework of SAEAs was summarized, and the main design ideas of existing algorithms were outlined in terms of single-surrogate and multi-surrogate structures, global-local collaborative search, and infill sampling strategies. Subsequently, according to the different characteristics of EMMOPs, typical EMMOPs, including single-objective, multi-objective, constrained, and high-dimensional problems, were systematically categorized and reviewed, with particular attention to advances in mode identification, solution diversity preservation, and computational budget allocation. Further experimental comparisons of multiple mainstream SAEAs were conducted on ten typical benchmark functions, and the performance differences among various algorithms were analyzed in terms of metrics such as global optimum solution and effective valley ratio. Meanwhile, engineering case studies, including ship structure optimization and synchronous machine design in ultra-high-voltage direct current transmission systems, were incorporated to illustrate the application potential of surrogate-assisted evolutionary algorithms in complex engineering optimization. Finally, the key challenges faced by current research were summarized, and future development directions were discussed from the perspectives of adaptive surrogate model management, parallel execution and scheduling, as well as inter-modal information sharing and transfer mechanisms

Keywords: expensive optimization problems; multimodal optimization problems; evolutionary algorithms; surrogate model