

文章编号:1671-6833(2020)02-0050-06

# 基于绝对节点坐标方法的柔顺机构动力学建模与仿真

张志刚,周翔,房占鹏,肖艳秋

(郑州轻工业大学 河南省机械装备智能制造重点实验室,河南 郑州 450002)

**摘要:**采用绝对节点坐标方法系统地研究了大变形柔顺杆的建模问题,建立了柔顺机构刚柔耦合动力学方程。在充分考虑柔顺杆与外部连接处变形特征基础上,提出了含端部变形约束的绝对节点坐标梁单元。应用闭锁问题缓解方法,考察了绝对节点坐标梁单元闭锁现象对柔顺机构动力学仿真的影响。最后通过数值算例检验了绝对节点坐标方法对于柔顺机构动力学问题的精确性和有效性。

**关键词:**柔顺机构;绝对节点坐标方法;大变形;刚柔耦合;动力学仿真

**中图分类号:** TH113      **文献标志码:** A      **doi:**10.13705/j.issn.1671-6833.2020.03.013

## 0 引言

柔顺机构是一类依靠柔性构件的弹性变形进行运动、力和能量传递的新型机构形式<sup>[1]</sup>,具有减少构件数量和装配时间、无摩擦磨损和传动间隙、精度及可靠性高、可实现微型化等优点,在轻型、微型化工程领域有着广泛的应用前景<sup>[2]</sup>。

柔顺机构的工作原理决定了在运行中柔顺杆件必然经历大变形过程,这给精确建模带来了极大困难。为了简化大变形柔顺杆的建模所提出的伪刚体模型方法<sup>[3]</sup>,采用具有等效力-杆端位移关系的刚体构件模拟柔性杆件的变形,成功地架起了刚性和柔性机构设计理论之间的桥梁。由于该模型含有一个转动副,因此被称为1R伪刚体模型<sup>[4-5]</sup>。虽然在一定范围内1R伪刚体模型也能给出一定精度的杆端运动轨迹,但其对大变形柔顺杆的近似精度不高。为了提高模型精度,通过增加模型中转动副个数或考虑轴向变形影响,改进的2R、3R以及PR伪刚体模型相继被提出<sup>[6-8]</sup>。

随着应用范围的拓广,工程中对柔顺机构的性能及运动精度都提出了更高要求。系统动力学特性不仅影响运动精度,还直接关系到既定功能的实现。为此,一些学者将伪刚体模型方法推广到柔顺机构动力学研究<sup>[9-11]</sup>。但伪刚体模型缺乏

对柔顺杆大变形进行精确描述的能力,从而限制了其在柔顺机构精确动力学仿真分析中的应用。

柔顺杆件属于大变形柔性梁,基于刚性截面假设的建模方法需处理梁截面的大转动问题。为了避开大转动引起的数值困难,Shabana<sup>[12]</sup>提出的绝对节点坐标方法(absolute nodal coordinate formulation, ANCF)选取整体坐标系下节点的绝对位置矢量和梯度矢量作为单元参数,构造了一种描述单元任意刚体运动的单元变形场。ANCF梁单元节点力可依据连续介质力学理论计算,并具有常质量矩阵、系统方程不含惯性力和科氏力项等优点。因此该方法一经提出便引起普遍关注,已发展出包含梁、板壳及一般实体等ANCF单元族,并被应用于车辆、航天、仿生等实际工程<sup>[13-15]</sup>。最近李鹏飞等<sup>[16-17]</sup>采用ANCF方法研究了平面固定-导向柔顺机构和柔顺双稳态机构的变形与驱动力变化规律,并进行了数值仿真和实验研究。疲劳破坏是机械系统设计过程中所要考虑的重要问题<sup>[18]</sup>。由于工作过程中柔顺杆件处于循环往复的大变形状态,因此精确应力应变分析对于柔顺机构设计及疲劳寿命分析极为重要,而上述研究未曾涉及这一问题。

应用ANCF梁单元研究了大变形柔顺杆的动力学建模问题,并精确计算了柔顺杆件的动态应变分布;考虑柔顺杆端部铰接处对局部变形的影

收稿日期:2019-10-01;修订日期:2020-01-16

基金项目:国家自然科学基金资助项目(11602228, 51805491);河南省科技攻关项目(202102210285);郑州轻工业大学博士科研基金资助项目(2016BSJJ016)

作者简介:张志刚(1984—),男,河南开封人,郑州轻工业大学讲师,博士,主要从事多体系统动力学与控制、机械系统动力学等相关研究,E-mail:zhigangzhang@foxmail.com。

响,提出了一种含端部变形约束的平面 ANCF 梁单元;采用最新提出的应变分解法(strain split method, SSM)<sup>[19]</sup>考察了 ANCF 梁单元闭锁问题对柔顺机构动力学特性的影响。

## 1 绝对节点坐标梁单元

### 1.1 单元形函数

平面 ANCF 梁单元内任意一点的位置矢量可以表示为  $\mathbf{r}(\mathbf{x}) = \mathbf{S}(\mathbf{x})\mathbf{e}$ , 其中  $\mathbf{x} = [x, y]^T$  为单元物质坐标, 单元形函数矩阵  $\mathbf{S}$  和单元参数列阵  $\mathbf{e}$  分别为<sup>[20]</sup>

$$\begin{cases} \mathbf{S} = [s_1\mathbf{I} & s_2\mathbf{I} & s_3\mathbf{I} & s_4\mathbf{I} & s_5\mathbf{I} & s_6\mathbf{I}]; \\ \mathbf{e} = [\mathbf{r}^{1T} & \mathbf{r}_x^{1T} & \mathbf{r}_y^{1T} & \mathbf{r}^{2T} & \mathbf{r}_x^{2T} & \mathbf{r}_y^{2T}]^T. \end{cases} \quad (1)$$

平面 ANCF 梁单元的变形梯度表示为  $\mathbf{J} = \partial\mathbf{r}/\partial\mathbf{x} = [\mathbf{r}_x \quad \mathbf{r}_y]$ , 其中  $\mathbf{r}_x = \mathbf{S}_x\mathbf{e}$ ,  $\mathbf{r}_y = \mathbf{S}_y\mathbf{e}$ 。根据连续介质力学理论(general continuum mechanics, GCM), Green-Lagrangian 应变为

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\mathbf{J}^T\mathbf{J} - \mathbf{I}) = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_x^T\mathbf{r}_x - 1 & \mathbf{r}_x^T\mathbf{r}_y \\ \mathbf{r}_y^T\mathbf{r}_x & \mathbf{r}_y^T\mathbf{r}_y - 1 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

利用 Green-Lagrangian 应变矩阵  $\boldsymbol{\varepsilon}$  的对称性, 定义 Green-Lagrangian 应变列阵  $\boldsymbol{\varepsilon}_v = (\boldsymbol{\varepsilon}_{11} \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{22} \quad 2\boldsymbol{\varepsilon}_{12})^T$ 。与 Green-Lagrangian 应变  $\boldsymbol{\varepsilon}$  功共轭的第二类 Piola-Kirchhoff 应力  $\boldsymbol{\sigma}$  也可以定义列阵形式  $\boldsymbol{\sigma}_v = (\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{12})^T$ 。对于线弹性材料, 本构方程为  $\boldsymbol{\sigma}_v = \mathbf{E}\boldsymbol{\varepsilon}_v$ , 其中弹性矩阵  $\mathbf{E}$  为

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \mu & 0 \\ \mu & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}, \quad (3)$$

式中: 拉梅常数  $\lambda = (Ev)/((1+v)(1-2v))$ ;  $\mu = E/(2(1+v))$ , 其中  $E$  为弹性模量,  $\nu$  为泊松比。

### 1.2 平面 ANCF 梁单元的控制方程

平面 ANCF 梁单元内力虚功率可以表示为:

$\delta P_s = \int_V \boldsymbol{\sigma}_v^T \delta \boldsymbol{\varepsilon}_v dV = \mathbf{Q}_s^T \delta \dot{\mathbf{e}}$ , 其中单元节点力列阵  $\mathbf{Q}_s$  为

$$\mathbf{Q}_s = \int_V (\partial\boldsymbol{\varepsilon}_v/\partial\mathbf{e})^T \mathbf{E}\boldsymbol{\varepsilon}_v dV, \quad (4)$$

式中:  $V$  代表梁单元的体积域。

平面 ANCF 梁单元的惯性力虚功率可以表示为  $\delta P_i = \int_V \rho \ddot{\mathbf{r}}^T \delta \dot{\mathbf{r}} dV = (\mathbf{M}\ddot{\mathbf{e}})^T \delta \dot{\mathbf{e}}$ , 其中  $\rho$  为材料密度, 梁单元质量矩阵为

$$\mathbf{M} = \int_V \rho \mathbf{S}^T \mathbf{S} dV. \quad (5)$$

由上式可知, ANCF 梁单元的质量矩阵  $\mathbf{M}$  为常数阵。

不失一般性, 假设单元上  $p$  点作用有集中力  $\mathbf{F}_p$ , 包含重力在内的体力密度为  $\mathbf{f}_e$ , 则单元外力虚功率为:  $\delta P_e = \mathbf{F}_p^T \delta \dot{\mathbf{r}}_p + \int_V \mathbf{f}_e^T \delta \dot{\mathbf{r}} dV = \mathbf{Q}_e^T \delta \dot{\mathbf{e}}$ , 其中单元外力列阵  $\mathbf{Q}_e$  为

$$\mathbf{Q}_e = \mathbf{S}_p^T \mathbf{F}_p + \int_V \mathbf{S}^T \mathbf{f}_e dV, \quad (6)$$

式中:  $\mathbf{S}_p$  为  $p$  点物质坐标  $\mathbf{x}_p$  对应的形函数矩阵  $\mathbf{S}_p = \mathbf{S}(\mathbf{x}_p)$ 。

利用虚功率原理, 平面 ANCF 梁单元的虚功率方程为

$$(\mathbf{M}\ddot{\mathbf{e}} + \mathbf{F})^T \delta \dot{\mathbf{e}} = 0, \quad (7)$$

式中: 单元广义节点力列阵为  $\mathbf{F} = \mathbf{Q}_s - \mathbf{Q}_e$ 。根据单元参数速率虚变分  $\delta \dot{\mathbf{e}}$  的独立性可以得平面 ANCF 梁单元的控制方程为

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{e}} + \mathbf{F} = \mathbf{0}. \quad (8)$$

## 2 含端部变形约束的 ANCF 梁单元

### 2.1 铰接节点处的运动学关系

ANCF 梁单元节点力的推导过程基于大变形理论, 对单元变形量没有任何限制, 适用于大变形柔顺杆的建模。由于放松了刚性截面假设, 一般情况下节点处的梯度矢量  $\mathbf{r}_x^i, \mathbf{r}_y^i$  不能满足单位正交关系。在柔顺机构中, 柔顺杆与其他杆件或基座最常见的连接方式为固接与铰接, 通常连接处有刚度加强处理措施, 局部变形也将会受到约束作用。为了模拟这种约束, 采用 ANCF 梁单元建模时假设端部为刚性截面, 该节点处的梯度矢量保持为单位正交矢量。

不失一般性, 设定节点 1 为变形受约束节点, 如图 1 所示。根据假设: 节点 1 处的梯度矢量  $\mathbf{r}_x^1$  和  $\mathbf{r}_y^1$  为单位正交矢量, 因此存在转角  $\alpha^1$  可将梯度矢量表示为

$$\mathbf{r}_x^1 = [\cos\alpha^1 \quad \sin\alpha^1]^T, \mathbf{r}_y^1 = [-\sin\alpha^1 \quad \cos\alpha^1]^T. \quad (9)$$

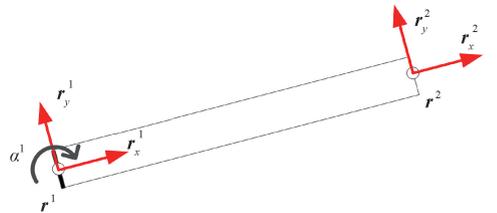


图 1 含端部变形约束的 ANCF 梁单元

Figure 1 ANCF beam element with one nodal constrain

对上式求时间  $t$  的导数可以得到速度方程

$$\dot{\mathbf{r}}_x^1 = \dot{\alpha}^1 \mathbf{r}_y^1, \dot{\mathbf{r}}_y^1 = -\dot{\alpha}^1 \mathbf{r}_x^1. \quad (10)$$

因此在节点 1 处就定义了两组节点参数  $\mathbf{e}^1$

和  $\mathbf{p}^1$ , 其中  $\mathbf{e}^1 = [\mathbf{r}^{1T} \quad \mathbf{r}_x^{1T} \quad \mathbf{r}_y^{1T}]^T$  为传统平面 ANCF 梁单元节点参数,  $\mathbf{p}^1 = [\mathbf{r}^{1T} \quad \alpha^1]^T$  为将不独立梯度矢量参数  $\mathbf{r}_x^1$  和  $\mathbf{r}_y^1$  替换为独立转角参数  $\alpha^1$  所组集形成的新的节点参数。根据式(10), 这两组节点参数的时间变化率  $\dot{\mathbf{e}}^1$  和  $\dot{\mathbf{p}}^1$  存在如下变换关系:

$$\dot{\mathbf{e}}^1 = \mathbf{B}^1 \dot{\mathbf{p}}^1, \quad (11)$$

式中: 节点速度变换矩阵  $\mathbf{B}^1$  为

$$\mathbf{B}^1 = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{r}_y^1 \\ \mathbf{0} & -\mathbf{r}_x^1 \end{bmatrix}. \quad (12)$$

## 2.2 含端部变形约束 ANCF 梁单元的有限元列式

对于含端部变形约束 ANCF 梁单元, 约束端节点 1 选取包含转角的独立节点参数  $\mathbf{p}^1 = [\mathbf{r}^{1T} \quad \alpha^1]^T$ , 非约束端节点 2 仍选取节点参数  $\mathbf{e}^2 = [\mathbf{r}^{2T} \quad \mathbf{r}_x^{2T} \quad \mathbf{r}_y^{2T}]^T$ , 则新的单元参数列阵为  $\underline{\mathbf{e}} = [\mathbf{p}^{1T} \quad \mathbf{e}^{2T}]^T$ 。根据节点速度变换关系式(11), 有如下单元参数速率变换关系:

$$\dot{\underline{\mathbf{e}}} = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{e}}^1 \\ \dot{\mathbf{e}}^2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^1 & \\ & \mathbf{I}_{6 \times 6} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{p}}^1 \\ \dot{\mathbf{e}}^2 \end{pmatrix} = \mathbf{D} \dot{\underline{\mathbf{e}}}. \quad (13)$$

含端部变形约束 ANCF 梁单元控制方程只需将原 ANCF 梁单元虚功率方程式(7)中的单元速度参数  $\dot{\underline{\mathbf{e}}}$  和加速度参数  $\ddot{\underline{\mathbf{e}}}$  替换为新的单元独立参数  $\dot{\underline{\mathbf{e}}}$  和  $\ddot{\underline{\mathbf{e}}}$  便可以得到

$$[\mathbf{M}(\mathbf{D}\ddot{\underline{\mathbf{e}}} + \dot{\mathbf{D}}\dot{\underline{\mathbf{e}}}) + \mathbf{F}]^T \mathbf{D} \delta \dot{\underline{\mathbf{e}}} = (\mathbf{M}\ddot{\underline{\mathbf{e}}} + \mathbf{F})^T \delta \dot{\underline{\mathbf{e}}} = 0, \quad (14)$$

式中: 含端部变形约束 ANCF 梁单元的质量阵  $\mathbf{M}$  和广义力列阵  $\mathbf{F}$  分别为

$$\mathbf{M} = \mathbf{D}^T \mathbf{M} \mathbf{D}, \quad \mathbf{F} = \mathbf{D}^T \mathbf{M} \dot{\underline{\mathbf{e}}} + \mathbf{D}^T \mathbf{F}. \quad (15)$$

## 3 ANCF 梁单元的闭锁问题

同传统有限元法一样, ANCF 单元也存在诸如剪切闭锁、泊松闭锁、体积闭锁等现象。ANCF 梁单元闭锁现象源于单元位移插值函数沿轴向与截面内方向的阶次不同, 使梁的弯曲变形耦合有过多剪切, 表现为弯曲刚度过大、弯曲挠度变小。将最新提出的 ANCF 闭锁缓解技术 SSM 方法<sup>[19]</sup>应用于柔顺机构仿真分析, 以考察 ANCF 梁单元闭锁问题对柔顺机构动力学特性的影响。

根据 SSM 方法, 单元内任意点的位置矢量  $\mathbf{r}$

可以分解为  $\mathbf{r} = \mathbf{r}^c + \mathbf{y}\mathbf{r}_y$ , 其中  $\mathbf{r}^c$  为梁截面形心处的位置矢量, 梯度矢量可以表示为  $\mathbf{r}_x = \mathbf{r}_x^c + \mathbf{y}\mathbf{r}_{yx}$ ,  $\mathbf{r}_y = \mathbf{r}_y$ 。相应的变形梯度也可以分解为两部分, 即  $\mathbf{J} = [\mathbf{r}_x^c \quad \mathbf{r}_y] + [\mathbf{y}\mathbf{r}_{yx} \quad \mathbf{0}] = \mathbf{J}^c + \mathbf{J}^k$ 。将其代入 Green-Lagrangian 应变表达式就可以得到

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\mathbf{J}^T \mathbf{J} - \mathbf{I}) = \boldsymbol{\varepsilon}^c + \boldsymbol{\varepsilon}^k, \quad (16)$$

式中:  $\boldsymbol{\varepsilon}^c = (1/2)(\mathbf{J}^{cT} \mathbf{J}^c - \mathbf{I})$  为与梁形心线变形相关的应变变量;  $\boldsymbol{\varepsilon}^k = (1/2)(\mathbf{J}^{cT} \mathbf{J}^k + \mathbf{J}^{kT} \mathbf{J}^c + \mathbf{J}^{kT} \mathbf{J}^k)$  为与截面变形、弯曲及曲率相关的高阶量。

将分解得到的这两个应变  $\boldsymbol{\varepsilon}^c$  和  $\boldsymbol{\varepsilon}^k$  分别表示为列阵形式即:  $\boldsymbol{\varepsilon}_v^c = (\varepsilon_{11}^c \quad \varepsilon_{22}^c \quad 2\varepsilon_{12}^c)^T$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}_v^k = (\varepsilon_{11}^k \quad \varepsilon_{22}^k \quad 2\varepsilon_{12}^k)^T$ ; 相应的第二类 Piola-Kirchhoff 应力列阵可以表示为

$$\boldsymbol{\sigma}_v = \mathbf{E}^c \boldsymbol{\varepsilon}_v^c + \mathbf{E}^k \boldsymbol{\varepsilon}_v^k, \quad (17)$$

式中: 材料弹性矩阵  $\mathbf{E}^c$  和  $\mathbf{E}^k$  分别为

$$\mathbf{E}^c = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu k_s \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}^k = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & \mu k_s \end{bmatrix}, \quad (18)$$

式中: 剪切修正系数  $k_s = 10(1 + \nu)/(12 + 11\nu)$ 。

将修正后的 Green-Lagrangian 应变表达式和本构方程代入平面 ANCF 梁单元内力虚功率, 可以得到采用 SSM 方法计算的 ANCF 梁单元节点力为

$$\mathbf{Q}_s = \int_V ((\partial \boldsymbol{\varepsilon}_v^c / \partial \mathbf{e}) + (\partial \boldsymbol{\varepsilon}_v^k / \partial \mathbf{e}))^T (\mathbf{E}^c \boldsymbol{\varepsilon}_v^c + \mathbf{E}^k \boldsymbol{\varepsilon}_v^k) dV. \quad (19)$$

## 4 数值算例

不考虑 ANCF 梁单元闭锁, 直接基于连续介质力学方法(GCM)计算单元节点力对应的仿真结果记作 ANCF/GCM; 采用缓解 ANCF 单元闭锁的 SSM 方法计算单元节点力对应的仿真结果记作 ANCF/SSM。作为参照, 在 ADAMS 中采用大变形梁类部件模块 FE\_Part 搭建相应仿真模型, 仿真结果记作 ADAMS。

### 4.1 柔性单摆

柔性摆长度为  $L = 1$  m, 截面面积为  $A = 0.1 \times 0.1$  m<sup>2</sup>, 材料弹性模量为  $E = 2.1 \times 10^6$  Pa, 材料密度为  $\rho = 7800$  kg/m<sup>3</sup>, 泊松比为  $\nu = 0.27$ , 在沿  $-Y$  方向重力作用下由图 2 所示水平位置自由下落, 重力加速度为  $g = 9.81$  m/s<sup>2</sup>。



图2 柔性单摆

Figure 2 Flexible pendulum

本算例选取较小的材料弹性模量,自由下落过程中单摆产生较大变形。采用 ANCF 梁单元离散,左端旋转铰所在节点处采用含端部变形约束 ANCF 梁单元建模。最终形成的单摆系统刚柔耦合动力学方程采用 MATLAB 刚性方程求解器 ode15s 仿真求解,设定仿真时间为 1 s。仿真求解时,柔性单摆均被等分为 5 个单元,图 3~4 给出了单摆末端节点位置坐标的时间变化曲线。

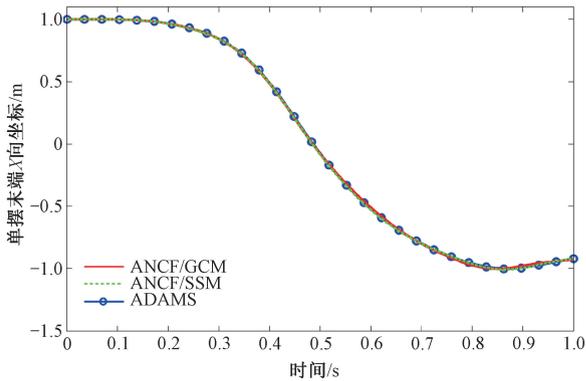


图3 柔性单摆末端节点 X 方向位置坐标

Figure 3 Position coordinate component in X direction of end point in flexible pendulum

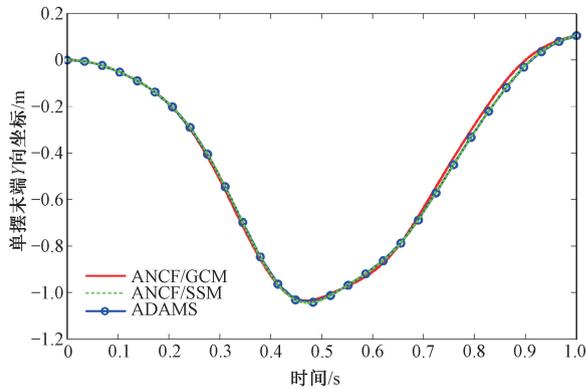


图4 柔性单摆末端节点 Y 方向位置坐标

Figure 4 Position coordinate component in Y direction of end point in flexible pendulum

由图 3~4 首先可以看出,采用 ANCF 梁单元得到的单摆算例仿真结果能够与商业软件 ADAMS 结果很好地吻合。这初步表明了笔者所提出的含端部变形约束 ANCF 梁单元的可行性与正确性。因为采用 SSM 方法修正单元节点力有效缓解了 ANCF 梁单元闭锁,因此得到了比直接基于 GCM 方法更好的数值结果。

ANCF 梁单元基于连续介质力学基本理论,可以更方便更精确地计算单元内应力应变分布情况。图 5 给出了不同时刻柔性单摆的变形及正应变云图。

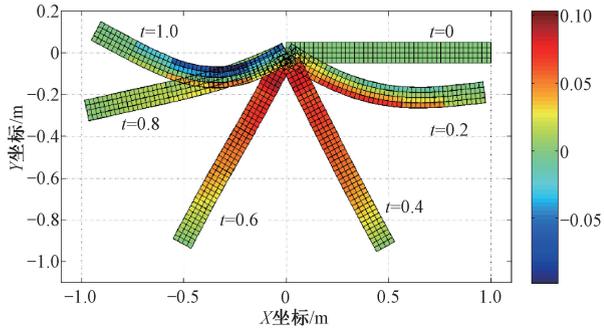


图5 柔性单摆的正应变云图

Figure 5 Distribution of normal strain of the flexible pendulum

### 4.2 柔顺四连杆机构

柔顺四连杆机构中刚性杆 AB、刚性杆 BC 和柔顺杆 CD 的长度分别为  $L_{AB} = (1 - \sqrt{2}/2)$  m,  $L_{BC} = L_{CD} = 1.0$  m。刚性杆 AB 和刚性杆 BC 的密度为  $\rho_{AB} = \rho_{BC} = 7\,800$  kg/m<sup>3</sup>, 截面面积为  $A_{AB} = A_{BC} = 0.1 \times 0.1$  m<sup>2</sup>; 柔顺杆 CD 的材料密度为  $\rho_{CD} = 2\,000$  kg/m<sup>3</sup>, 截面面积为  $A_{CD} = 0.04 \times 0.04$  m<sup>2</sup>, 材料弹性模量为  $E = 300 \times 10^6$  Pa, 泊松比为  $\nu = 0.27$ 。柔顺四连杆机构受到作用在旋转铰 A 处的驱动扭矩  $M = 50 \sin(\pi t)$  N·m 及沿 -X 方向重力  $g = 9.81$  m/s<sup>2</sup> 作用,其初始状态如图 6 所示。

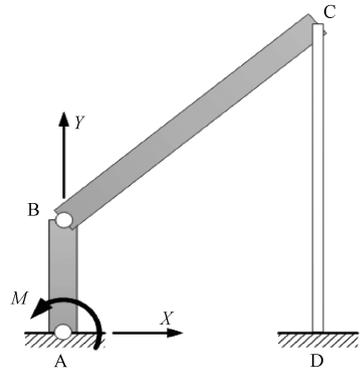


图6 柔顺四连杆机构

Figure 6 Compliant four-bar linkage

在这个算例中,刚性杆 AB 和 BC 采用刚体建模;柔顺杆 CD 均匀划分为 5 个梁单元,分别采用基于 GCM 和 SSM 的 ANCF 梁单元进行建模。对于包含柔顺杆端部节点 C 和节点 D 的单元仍采用含端部变形约束 ANCF 梁单元建模。图 7~8 给出了采用上述 3 种方法得到的仿真时间为 1 s 的柔顺杆顶端 C 点位置坐标的时间变化曲线。

从图 7~8 可以看出,采用 ANCF 梁单元所得

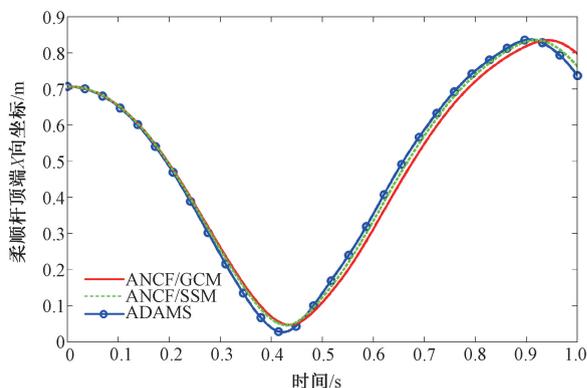


图7 柔顺杆顶端 C 点 X 方向位置坐标

Figure 7 Position coordinate component in X direction of point C in the compliant rod

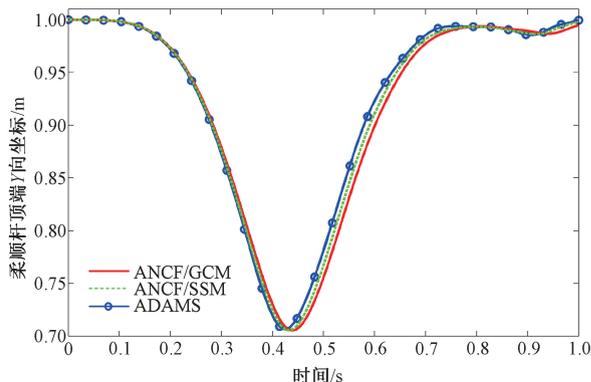


图8 柔顺杆顶端 C 点 Y 方向位置坐标

Figure 8 Position coordinate component in Y direction of point C in the compliant rod

数值结果与商业软件 ADAMS 相吻合。这也表明了 ANCF 梁单元适用于柔顺机构建模和动力学分析。从图中还可以看出, ANCF 梁单元闭锁问题使得当单元发生较大变形时, 单元表现为过于刚硬。因此, 采用 SSM 闭锁缓解方法的数值结果 (ANCF/SSM) 好于不考虑闭锁问题所对应的数值结果 (ANCF/GCM)。

柔顺四连杆机构在运行中必然会伴随柔顺杆件的往复变形。因此在设计和分析柔顺机构时, 对工作过程中柔顺杆所受应力应变进行分析具有重要意义。图 9 给出了柔顺四连杆机构在不同时刻的运动变形情况及柔顺杆的正应变云图。

由应变分布云图可知, 在柔顺机构运行过程中柔顺杆的最大正应变出现在柔顺杆两端。因此在进行柔顺四连杆设计和疲劳寿命分析时都需要将柔顺杆两端看作危险截面给予重点核算。

## 5 结论

基于绝对节点坐标方法系统地研究了柔顺机构动力学建模问题, 得到的结论如下:

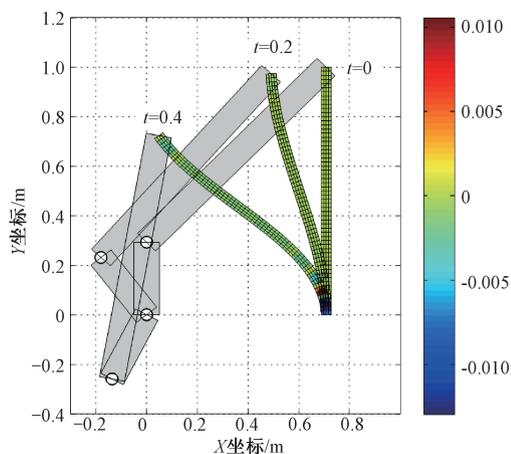
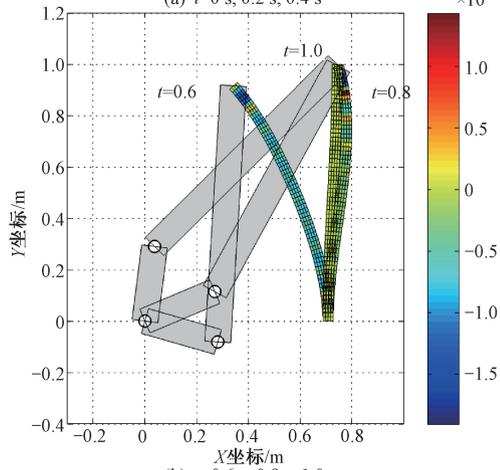
(a)  $t=0$  s,  $0.2$  s,  $0.4$  s(b)  $t=0.6$  s,  $0.8$  s,  $1.0$  s

图9 柔顺四连杆机构正应变分布

Figure 9 Distribution of normal strain of the compliant four-bar linkage

(1) 采用平面 ANCF 梁单元建立了大变形柔顺四连杆机构的动力学模型;

(2) 在充分考虑柔顺杆铰链连接处变形特征基础上, 提出了含端部变形约束的平面 ANCF 梁单元;

(3) 基于连续介质力学理论, 精确计算了包含动力学效应的柔顺杆应变分布, 为柔顺机构疲劳分析奠定了基础。

## 参考文献:

- [1] HOWELL L L. Compliant mechanisms [M]. New York: John Wiley and Sons, 2001.
- [2] 高峰. 机构学研究现状与发展趋势的思考[J]. 机械工程学报, 2005, 41(8): 3-17.
- [3] HOWELL L L, MIDHA A, NORTON T W. Evaluation of equivalent spring stiffness for use in a pseudo-rigid-body model of large-deflection compliant mechanisms [J]. Journal of mechanical design, 1996, 118(1): 126-131.
- [4] 于靖军, 毕树生, 宗光华, 等. 基于伪刚体模型法的全柔性机构位置分析[J]. 机械工程学报, 2002, 38(2): 75-78.

- [5] 李海燕, 张宪民, 彭惠青. 大变形柔顺机构的驱动特性研究[J]. 机械科学与技术, 2004, 23(9): 1040-1043.
- [6] SU H J. A pseudorigid-body 3R model for determining large deflection of cantilever beams subject to tip loads [J]. Journal of mechanisms and robotics, 2009, 1(2): 021008.
- [7] 冯忠磊, 余跃庆, 王雯静. 柔顺机构中大变形柔性梁的2自由度伪刚体模型[J]. 机械设计与研究, 2010, 26(3): 41-43.
- [8] 余跃庆, 周鹏. 柔顺机构 PR 伪刚体模型[J]. 北京工业大学学报, 2013, 39(5): 641-647.
- [9] 李茜, 余跃庆, 常星. 基于2R伪刚体模型的柔顺机构动力学建模及特性分析[J]. 机械工程学报, 2012, 48(13): 40-48.
- [10] 余跃庆, 徐齐平. 柔顺机构 PR 伪刚体动力学建模与特性分析[J]. 农业机械学报, 2013, 44(3): 225-229.
- [11] 余跃庆, 张娜. 含拐点的柔顺机构动力学建模及分析[J]. 北京工业大学学报, 2018, 44(4): 489-496.
- [12] SHABANA A A. An absolute nodal coordinate formulation for the large rotation and deformation analysis of flexible bodies. Technical report MBS96-1-UIC [R]. Department of mechanical engineering, University of Illinois at Chicago, 1996.
- [13] PATEL M, ORZECOWSKI G, TIAN Q, et al. A new multibody system approach for tire modeling using ANCF finite elements [J]. Proceedings of the institution of mechanical engineers, part K: journal of multi-body dynamics, 2016, 230(1): 69-84.
- [14] KŁODOWSKI A, RANTALAINEN T, MIKKOLA A, et al. Flexible multibody approach in forward dynamic simulation of locomotive strains in human skeleton with flexible lower body bones [J]. Multibody system dynamics, 2011, 25(4): 395-409.
- [15] 刘昊, 魏承, 田健, 等. 空间充气展开绳网捕获系统动力学建模与分析[J]. 机械工程学报, 2018, 54(22): 145-152.
- [16] 李鹏飞, 曹博宇, 汪振宇, 等. 含非线性大变形构件的柔顺机构建模与分析[J]. 振动与冲击, 2019, 38(11): 110-115.
- [17] 李鹏飞, 曹博宇, 汪振宇, 等. 一种外 LET 柔顺半铰的动力学建模与分析[J]. 中国机械工程, 2019, 30(14): 1727-1733.
- [18] 刘治华, 刘博见, 许伟超, 等. 飞碟游乐设备驱动轴疲劳失效分析[J]. 郑州大学学报(工学版), 2017, 38(5): 91-96.
- [19] PATEL M, SHABANA A A. Locking alleviation in the large displacement analysis of beam elements: the strain split method [J]. Acta mechanica, 2018, 229(7): 2923-2946.
- [20] OMAR M A, SHABANA A A. A two-dimensional shear deformable beam for large rotation and deformation problems [J]. Journal of sound and vibration, 2001, 243(3): 565-576.

## Dynamics Modeling and Simulation of Compliant Mechanisms Using Absolute Nodal Coordinate Formulation

ZHANG Zhigang, ZHOU Xiang, FANG Zhanpeng, XIAO Yanqiu

(Henan Key Laboratory of Intelligent Manufacturing of Mechanical Equipment, Zhengzhou University of Light Industry, Zhengzhou 450002, China)

**Abstract:** The modeling method for the compliant rod with large deformation was studied by using absolute nodal coordinate method, and the rigid-flexible coupling dynamic equations of the compliant mechanism were established. Considering the deformation characteristics of the compliant rod at the external connection, the new ANCF beam element with end deformation constraints was proposed. Based on the locking alleviation technique, the effect of the locking phenomenon of the absolute nodal coordinate beam element on the dynamic simulation of compliant mechanism was investigated. Finally, numerical examples were given to verify the accuracy and effectiveness of the absolute nodal coordinate method for the dynamic problems of compliant mechanisms.

**Key words:** compliant mechanism; absolute nodal coordinate formulation; large deformation; rigid-flexible coupling; dynamic simulation