

# 基于位移响应最小化的约束阻尼结构优化设计

侯俊剑, 房占鹏, 何文斌

(郑州轻工业学院 机电工程学院, 河南 郑州 450002)

**摘要:** 针对约束阻尼结构的动力学拓扑优化问题, 基于实体各向同性材料惩罚模型 (SIMP 插值模型), 以约束阻尼结构位移响应最小化为优化目标, 约束阻尼材料使用量为约束条件, 建立了约束阻尼结构位移响应拓扑优化模型. 在位移响应的灵敏度分析时, 将模态阻尼比的灵敏度引入到优化目标的灵敏度分析中, 使优化目标的灵敏度计算更加准确合理. 采用移动渐近线法 (MMA) 对拓扑优化模型进行求解. 通过算例分析, 验证了提出的约束阻尼结构的动力学优化算法的正确性和有效性.

**关键词:** 约束阻尼; 拓扑优化; 灵敏度; 位移响应

**中图分类号:** TB53      **文献标志码:** A      doi:10.13705/j.issn.1671-6833.2016.06.012

## 0 引言

约束阻尼处理技术对原结构改变少, 易于实施, 能有效地抑制结构宽频振动噪声, 在航空航天、汽车和舰船等行业的减振降噪方面获得广泛应用<sup>[1-2]</sup>. 为了降低成本及提高阻尼材料的利用效率, 需对约束阻尼材料的布置位置进行优化. 目前, 约束阻尼结构的拓扑优化大多以模态阻尼比 (模态损耗因子) 为优化目标, 旨在通过提高约束阻尼结构的模态阻尼比 (模态损耗因子) 来抑制结构的振动和噪声辐射<sup>[3-6]</sup>. 在此研究中, 仅考虑了结构模态阻尼比 (模态损耗因子), 未考虑振型和固有频率的变化对结构振动响应影响.

以结构动响应为优化目标的动力学拓扑优化具有良好的工程实用性和设计针对性, 通过对结构的拓扑优化来抑制结构的振动响应<sup>[7-9]</sup>, 成为结构拓扑优化的研究热点. 在此研究中, 结构为无阻尼结构或者优化过程中结构阻尼变化不大, 可将结构阻尼视为定值, 仅考虑了振型和固有频率的变化对结构动响应的影响. 对于约束阻尼结构而言, 将结构阻尼视为定值则会带来很大误差, 在灵敏度分析时, 需要综合考虑模态阻尼比、固有频率和振型对位移响应的影响.

笔者基于实体各向同性材料惩罚模型 (SIMP

插值模型), 以位移响应为优化目标, 建立了约束阻尼结构的拓扑优化模型. 考虑到约束阻尼结构的模态阻尼比在优化迭代过程中的变化, 将模态阻尼比的灵敏度引入到优化目标的灵敏度计算中, 提高灵敏度计算精度. 采用 MMA 算法, 编制了约束阻尼结构的优化流程, 提出了约束阻尼结构以位移响应最小化为目标的优化方法.

## 1 拓扑优化模型

在实际工程应用中, 结构的某些部分的振动响应需要加以控制, 因而, 以约束阻尼结构某些部位的位移响应为优化目标, 通过优化使其位移响应达到最小化. 为了严格控制结构的整体重量, 以约束阻尼材料使用体积为约束条件, 约束阻尼材料单元为设计变量建立拓扑优化模型为:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{find } \rho_e, e = 1, 2, \dots, n; \\ \min s = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b X_j(\omega_i); \\ \text{s. t. } \frac{\sum_{e=1}^n \rho_e V_e}{\sum_{e=1}^n V_e} \leq V_f; \\ (\mathbf{K} - \omega_r^2 \mathbf{M}) \varphi_r = 0; \\ 0 < \rho_{\min} \leq \rho_e \leq 1, e = 1, 2, \dots, n. \end{array} \right. \quad (1)$$

收稿日期:2016-05-30;修订日期:2016-09-19

基金项目:国家自然科学基金资助项目(51505433);河南省高等学校重点科研项目(16A460028)

作者简介:侯俊剑(1982—),男,河南郑州人,郑州轻工业学院讲师,博士,主要从事振动与噪声控制研究, E-mail:houljian220@163.com.

式中:  $\rho_e$  为设计变量;  $\rho_{\min}$  为设计变量的下界, 本文取值为 0.000 1;  $a$  为激励频率数;  $b$  为优化目标点数;  $V_e$  为每个约束阻尼单元的体积;  $V_f$  为体积分数.

## 2 灵敏度分析

简谐激励下, 结构的振动方程为:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}\mathbf{X} = \mathbf{f}(t), \quad (2)$$

式中:  $\mathbf{M}$ 、 $\mathbf{C}$  和  $\mathbf{K}$  分别为质量、阻尼和刚度矩阵, 均为  $N \times N$  阶对称矩阵,  $N$  表示结构自由度数;  $\mathbf{f}(t) = \mathbf{F}e^{i\omega_f t}$  为激励力矢量, 其中,  $\mathbf{F}$  为激励力的幅值矢量,  $\omega_f$  为激励频率;  $\mathbf{X}$ 、 $\dot{\mathbf{X}}$  和  $\ddot{\mathbf{X}}$  分别为结构的位移、速度和加速度矢量.

对于约束阻尼结构, 质量矩阵  $\mathbf{M}$  和刚度矩阵  $\mathbf{K}$  分别为:

$$\begin{cases} \mathbf{M} = \mathbf{M}_b + \mathbf{M}_v + \mathbf{M}_c; \\ \mathbf{K} = \mathbf{K}_b + \mathbf{K}_v + \mathbf{K}_c. \end{cases} \quad (3)$$

式中: 下标 b、v 和 c 分别表示基本层、黏弹性阻尼层和约束层.

根据模态应变能法<sup>[10]</sup>, 约束阻尼结构的第  $r$  阶的模态损耗因子为:

$$\eta_r = \frac{\eta_i \boldsymbol{\varphi}_r^T \mathbf{K}_v \boldsymbol{\varphi}_r}{\boldsymbol{\varphi}_r^T \mathbf{K} \boldsymbol{\varphi}_r}, \quad (4)$$

式中:  $\eta_r$  为约束阻尼材料的损耗因子;  $\boldsymbol{\varphi}_r$  为约束阻尼结构的第  $r$  阶模态振型.

模态阻尼比和模态损耗因子的关系为<sup>[11]</sup>

$$\eta = 2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}. \quad (5)$$

如图 1 所示, 当  $0 \leq \eta \leq 0.3$  时, 模态损耗因子和模态阻尼比的关系可近似为:

$$\eta = 2\zeta. \quad (6)$$

通过以上分析, 式(2) 可转换为:

$$\ddot{\mathbf{y}}_i + 2\omega_i \zeta_i \dot{\mathbf{y}}_i + \omega_i^2 \mathbf{y}_i = \mathbf{q}_i \quad (i = 1, 2, \dots, N), \quad (7)$$

式中:  $\omega_i$  和  $\zeta_i$  分别为第  $i$  阶圆频率和模态阻尼比;  $y_i$  和  $q_i$  分别为模态坐标下的结构位移和激励力.

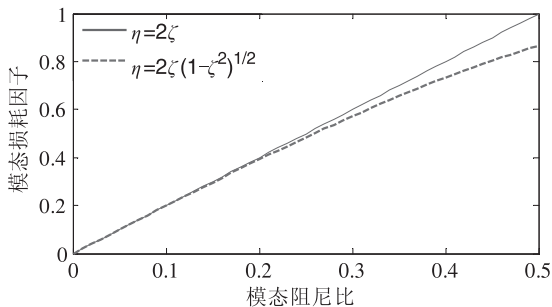


图 1 模态损耗因子  $\eta$  与模态阻尼比  $\zeta$  关系

Fig. 1 Relationship between loss factor  $\eta$  and damping ratio  $\zeta$

根据频率响应法, 在外部激励  $\mathbf{f}(t)$  在约束阻尼结构的第  $d$  自由度作用下, 约束阻尼结构的第  $j$  自由度的稳态位移响应的幅值  $X_j$  可表示为:

$$X_j(\omega_f) = \sum_{r=1}^N \boldsymbol{\varphi}_{j,r} \parallel (\omega_r^2 - \omega_f^2 + i2\zeta_r \omega_r \omega_f)^{-1} \parallel \cdot \boldsymbol{\varphi}_{d,r} F_d, \quad (8)$$

式中:  $N$  为模态叠加法所取阶数;  $\boldsymbol{\varphi}_{j,r}$ 、 $\boldsymbol{\varphi}_{d,r}$  为第  $r$  阶模态中第  $j$  和  $d$  自由度的振型值;  $F_d$  表示施加在  $d$  自由度上简谐力激励的幅值.

设  $D_r = (\omega_r^2 - \omega_f^2 + i2\zeta_r \omega_r \omega_f)^{-1}$ , 稳态响应幅值关于设计变量的  $\rho_e$  灵敏度可表示为:

$$\begin{cases} \frac{\partial s}{\partial \rho_e} = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \frac{\partial X_j(\omega_i)}{\partial \rho_e}; \\ \frac{\partial X_j(\omega_i)}{\partial \rho_e} = \sum_{r=1}^N \left( \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_{j,r}}{\partial \rho_e} \parallel D_r \parallel \boldsymbol{\varphi}_{d,r} + \boldsymbol{\varphi}_{j,r} \frac{\partial \parallel D_r \parallel}{\partial \rho_e} \boldsymbol{\varphi}_{d,r} + \boldsymbol{\varphi}_{j,r} \parallel D_r \parallel \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_{d,r}}{\partial \rho_e} F_d \right). \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \parallel D_r \parallel}{\partial \rho_e} &= ((\text{RE}(D_r))^2 + (\text{IM}(D_r))^2)^{-0.5} \cdot \\ &(\text{RE}(D_r) \frac{\partial (\text{RE}(D_r))}{\partial \rho_e} + \text{IM}(D_r) \frac{\partial (\text{IM}(D_r))}{\partial \rho_e}), \end{aligned} \quad (10)$$

式中:  $\text{RE}(D_r)$  和  $\text{IM}(D_r)$  分别为  $D_r$  的实部和虚部.

在以往动力学拓扑优化的研究中, 对  $\frac{\partial \parallel D_r \parallel}{\partial \rho_e}$  的求解, 常将模态阻尼比看为常量. 笔者考虑到约束阻尼结构在优化过程中, 模态阻尼比有较大的变化<sup>[6]</sup>, 将模态阻尼比视为定值, 会导致灵敏度分析有较大的误差, 或会出现错误的优化结果, 因而, 将模态阻尼比的灵敏度  $\frac{\partial \zeta_r}{\partial \rho_e}$  引入到式(10) 的求解中, 提高灵敏度的计算精度. 因而, 式(9) 求解的关键在于计算  $\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_r}{\partial \rho_e}$ 、 $\frac{\partial \omega_r^2}{\partial \rho_e}$  和  $\frac{\partial \zeta_r}{\partial \rho_e}$ . 振型灵敏度  $\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_r}{\partial \rho_e}$  的求解可采用不完备振型叠加法<sup>[12]</sup>, 即

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_r}{\partial \rho_e} = \sum_{k=1}^N \alpha_{r,k} \boldsymbol{\varphi}_k. \quad (11)$$

$$\alpha_{r,k} = \begin{cases} -\frac{1}{2} \boldsymbol{\varphi}_k^T \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \rho_e} \boldsymbol{\varphi}_r, & r = k; \\ \boldsymbol{\varphi}_k^T \left( \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho_e} - \omega_r^2 \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \rho_e} \right) \boldsymbol{\varphi}_r, & r \neq k. \end{cases} \quad (12)$$

$\frac{\partial \omega_r^2}{\partial \rho_e}$  的求解如下式:

$$\frac{\partial \omega_r^2}{\partial \rho_e} = \boldsymbol{\varphi}_r^T \left( \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho_e} - \omega_r^2 \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \rho_e} \right) \boldsymbol{\varphi}_r. \quad (13)$$

$\frac{\partial \xi_r}{\partial \rho_e}$  的求解公式如下:

$$\frac{\partial \xi_r}{\partial \rho_e} = \frac{\eta_v}{2} \frac{\boldsymbol{\varphi}_r^T \frac{\partial \mathbf{K}_v}{\partial \rho_e} \boldsymbol{\varphi}_r \boldsymbol{\varphi}_r^T \mathbf{K} \boldsymbol{\varphi}_r - \boldsymbol{\varphi}_r^T \mathbf{K}_v \boldsymbol{\varphi}_r \boldsymbol{\varphi}_r^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho_e} \boldsymbol{\varphi}_r}{(\boldsymbol{\varphi}_r^T \mathbf{K} \boldsymbol{\varphi}_r)^2}. \quad (14)$$

笔者以约束阻尼结构的约束阻尼材料单元为设计变量,因而,根据 SIMP 插值模型对约束阻尼材料进行插值:

$$\begin{cases} \mathbf{M}_v^e = \rho_e^p \mathbf{M}_{v0}^e; \\ \mathbf{K}_v^e = \rho_e^q \mathbf{K}_{v0}^e; \\ \mathbf{M}_c^e = \rho_e^p \mathbf{M}_{c0}^e; \\ \mathbf{K}_c^e = \rho_e^q \mathbf{K}_{c0}^e, \end{cases} \quad (15)$$

式中: $p$  和  $q$  为惩罚因子,本文取值分别为 1 和 3; $\mathbf{M}_{v0}^e$ 、 $\mathbf{M}_{c0}^e$ 、 $\mathbf{K}_{v0}^e$  和  $\mathbf{K}_{c0}^e$  分别为单元  $e$  的密度值  $\rho_e = 1$  时的刚度矩阵和质量矩阵; $\mathbf{K}_v^e$  和  $\mathbf{K}_c^e$  分别为单元  $e$  的黏弹性阻尼层的刚度矩阵和约束层的质量矩阵。 $\mathbf{M}_v^e$  和  $\mathbf{M}_c^e$  分别为单元  $e$  的黏弹性阻尼层的质量矩阵和约束层的质量矩阵。

约束阻尼结构总的质量矩阵和刚度矩阵可表示为:

$$\begin{cases} \mathbf{M} = \sum_{e=1}^n (\mathbf{M}_b^e + \rho_e^p (\mathbf{M}_{v0}^e + \mathbf{M}_{c0}^e)); \\ \mathbf{K} = \sum_{e=1}^n (\mathbf{K}_b^e + \rho_e^q (\mathbf{K}_{v0}^e + \mathbf{K}_{c0}^e)). \end{cases} \quad (16)$$

则

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \rho_e} = \mathbf{M}_{v0}^e + \mathbf{M}_{c0}^e; \\ \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho_e} = q \rho_e^{q-1} (\mathbf{K}_{v0}^e + \mathbf{K}_{c0}^e); \\ \frac{\partial \mathbf{K}_v}{\partial \rho_e} = q \rho_e^{q-1} \mathbf{K}_{v0}^e. \end{cases} \quad (17)$$

将式(10)~(14)和式(17)代入式(9)可得考虑模态阻尼比灵敏度的目标函数灵敏度.为抑制拓扑优化过程中出现棋盘格现象,采用网格独立滤波技术<sup>[13]</sup>对目标函数的灵敏度滤波,即对目标函数灵敏度进行再分配,使单元灵敏度等于以单元形心为中心的指定半径区域内的所有单元灵敏度的线性加权.

3 拓扑优化的实现流程

MMA 方法是一种高效的适合于求解具有复杂目标函数和多约束条件的优化求解器.笔者采

用 MMA 方法对建立的拓扑优化模型进行求解,拓扑优化流程如图 2 所示.

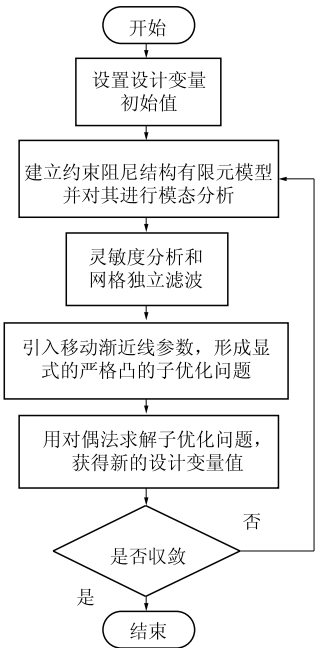


图 2 拓扑优化流程图

Fig. 2 Diagram for the topology optimization procedures

4 算例分析

4.1 两端固支的约束阻尼板拓扑优化

约束阻尼矩形板的长和宽分别为 0.4 m 和 0.2 m,短边的两端固定.基板为铝板,厚度为 0.003 m,密度为 2 800 kg/m<sup>3</sup>,弹性模量为 70 GPa,泊松比为 0.3.阻尼层厚度为 0.000 5 m,密度为 1 200 kg/m<sup>3</sup>,弹性模量为 12 MPa,泊松比为 0.495,阻尼材料的损耗因子为 0.5,约束层厚度为 0.001 m,密度为 2 700 kg/m<sup>3</sup>,弹性模量为 70 GPa,泊松比为 0.3.

简谐载荷作用于约束阻尼矩形板中心位置,幅值为 100 N,分别以第一阶和第三阶共振频率处的垂向共振位移最小化为优化目标,体积分数为 0.5.优化的拓扑构型分别为图 3 和图 4,图中黑色为粘贴约束阻尼材料位置.



图 3 拓扑构型(一阶)

Fig. 3 Optimal distribution of damping material (the first modal)



图 4 拓扑构型(三阶)

Fig.4 Optimal distribution of damping material (The third modal)

图 5 为一阶共振位移最小化为优化目标的体积分数和优化目标值的迭代历程. 从图 5 可以看出,体积分数在 14 次迭代后保持固定值 0.5;经过 120 次迭代,优化目标值由初始结构的 0.027 m 减小为 0.008 1 m. 图 6 为三阶共振位移最小化为优化目标的体积分数和优化目标值的迭代历程,从图中可以看出,体积分数在 7 次迭代后保持固定值 0.5;经过 120 次迭代,优化目标值由初始结构的  $1.99 \times 10^{-4}$  m 减小为  $1.47 \times 10^{-4}$  m. 从图 5 和图 6 可以看出,以一阶和三阶共振位移最小化为优化目标,优化的约束阻尼结构比初始约束阻尼结构在优化目标点处的共振位移响应分别减小了 70% 和 26%,说明提出的约束阻尼结构优化算法的正确性和有效性.

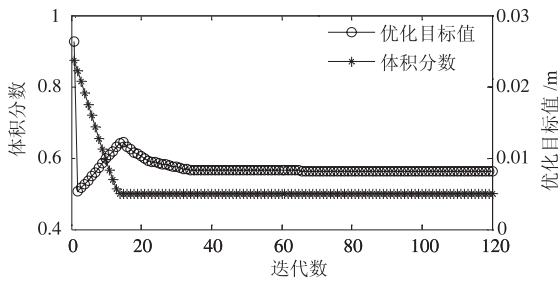


图 5 体积分数和优化目标值的迭代历程(一阶)  
Fig.5 Iteration history of optimization objective and volume fraction (the first modal)

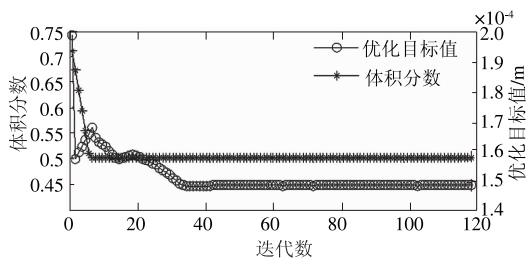


图 6 体积分数和优化目标值的迭代历程(三阶)  
Fig.6 Iteration history of optimization objective and volume fraction (the third modal)

4.2 约束阻尼悬臂板的拓扑优化

图 7 所示的悬臂约束阻尼板结构,基板为铝板,其上覆盖约束阻尼材料. 基板长为 0.2 m,宽

为 0.1 m,厚度为 0.001 5 m,密度为 2 800 kg/m<sup>3</sup>,弹性模量为 70 GPa,泊松比为 0.3. 约束阻尼材料为 SOUNDCOAT 公司的 SOUNDFOIL TYPE D,阻尼层为黏弹性高分子聚合物,约束层为铝箔,阻尼层厚度为 0.000 05 m,密度为 1 200 kg/m<sup>3</sup>,弹性模量为 12 MPa,泊松比为 0.495,阻尼材料的损耗因子为 0.5. 约束层厚度为 0.000 13 m,密度为 2 700 kg/m<sup>3</sup>,弹性模量为 70GPa,泊松比为 0.3. 左端固定,右端自由.

简谐载荷作用于右边界中心位置,幅值为 1 N,激励频带分别为:1 ~ 180 Hz 和 181 ~ 300 Hz,频率间隔为 0.6 Hz,以频带内激励点处垂向位移响应的和最小化为优化目标,体积分数为 0.5. 图 8 为 1 ~ 180 Hz 激励频带下的拓扑构型,图中黑色为粘贴约束阻尼材料位置.



图 7 悬臂约束阻尼板

Fig.7 The cantilever constrained layer damping plate

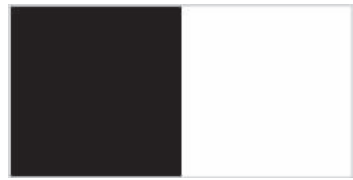


图 8 拓扑构型(激励频带 [1 ~ 180] Hz)

Fig.8 Optimal distribution of damping material (excitation frequency band [1 ~ 180] Hz)

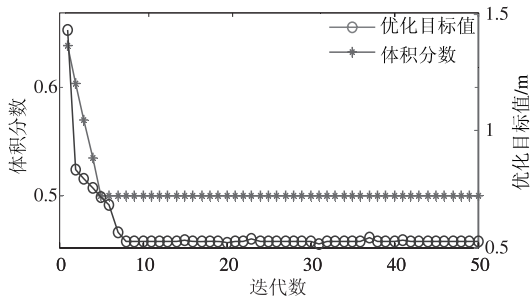


图 9 体积分数和优化目标值的迭代历程(激励频带 [1 ~ 180] Hz)  
Fig.9 Iteration history of optimization objective and volume fraction (excitation frequency band [1 ~ 180] Hz)

图 9 为激励频带 1 ~ 180 Hz 时,体积分数和优化目标值的迭代历程,体积分数在 5 次迭代后保持固定值 0.5;经过 50 次迭代,优化目标值由初始结构的 1.41 m 减小为 0.54 m. 图 10 为 180 ~ 300 Hz 激励频带下的拓扑构型. 图 11 为激励频

带 181 ~ 300 Hz 时,体积分数和优化目标值的迭代历程,体积分数在 8 次迭代后保持固定值 0.5; 经过 50 次迭代,优化目标值由初始结构的 0.058 m 减小为 0.042 m. 在 1 ~ 180 Hz 和 181 ~ 300 Hz 两个频带的激励下,优化的约束阻尼结构比初始约束阻尼结构都在优化目标点处的位移响应的和分别减小了 61.7% 和 27.6% .



图 10 拓扑构型 (激励频带 181 ~ 300 Hz)

Fig. 10 Optimal distribution of damping material (excitation frequency band 181 ~ 300 Hz)

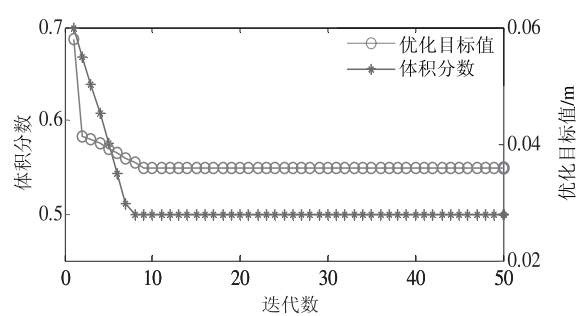


图 11 体积分数和优化目标值的迭代历程 (激励频带 181 ~ 300 Hz)

Fig.11 Iteration history of optimization objective and volume fraction(excitation frequency band 181 ~ 300 Hz)

图 12 为没有阻尼材料只有基板和约束层结构与两个频段优化结构的频率响应曲线对比. 从图 12 可以看出,在优化的频段内优化结构比没有阻尼材料结构的振动响应有明显的降低,具有很好的减振效果,表明笔者提出的约束阻尼结构的优化算法对频带激励下约束阻尼结构的优化也是有效的.

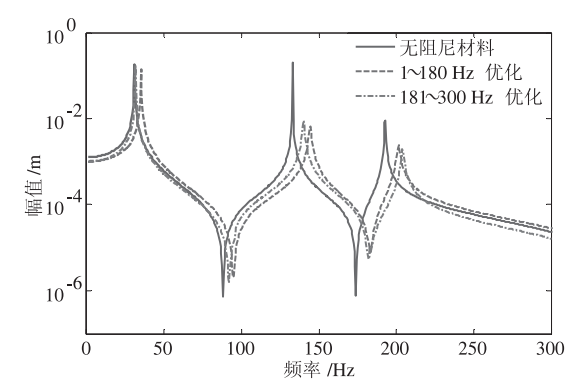


图 12 频率响应曲线对比

Fig.12 The comparison of FRF

5 结论

- (1) 基于实体各向同性材料惩罚模型 (SIMP 插值模型), 以约束阻尼结构位移响应为优化目标, 约束阻尼材料使用量为约束条件, 约束阻尼单元为设计变量, 建立了约束阻尼结构位移响应拓扑优化模型.
- (2) 考虑到在优化过程中, 约束阻尼结构的模态阻尼比有较大的变化, 将模态阻尼比灵敏度引入到目标函数的灵敏度分析中, 并采用模态应变能法分析约束阻尼结构的模态阻尼比灵敏度.
- (3) 采用 MMA 算法对建立的优化模型进行求解, 编制了其优化流程, 并对共振位移响应和频带激励下的位移响应和最小化为优化目标的约束阻尼结构进行优化, 得到的优化构型的位移响应比初始结构都有较大幅度的减小, 验证了笔者提出的优化算法的正确性和有效性.

参考文献:

[1] 杜华军, 于百胜, 郑钢铁, 等. 蜂窝锥壳卫星适配器约束阻尼层振动抑制分析[J]. 应用力学学报, 2003, 20 (3): 5 - 10.

[2] RAO M D. Recent applications of viscoelastic damping for noise control in automobiles and commercial air - planes [J]. Journal of sound and vibration, 2003, 262 (3): 457 - 474.

[3] ANSARI M, KHAJEPOUR A, ESMAILZADEH E. Application of level set method to optimal vibration control of plate structures [J]. Journal of sound and vibration, 2013, 332: 687 - 700.

[4] ZHENG H, CAI C, PAU G S H, et al. Minimizing vibration response of cylindrical shells through layout optimization of passive constrained layer damping treatments[J]. Journal of sound and vibration, 2005, 279 (3): 739 - 756.

[5] KIM S Y, MECHEFSKE C K, KIM I Y. Optimal damping layout in a shell structure using topology optimization [J]. Journal of sound and vibration, 2013, 332: 2873 - 2883

[6] 房占鹏, 郑玲. 约束阻尼结构的双向渐进拓扑优化 [J]. 振动与冲击, 2014, 33 (8): 165 - 170.

[7] 彭细荣, 隋允康. 强迫谐振动下连续体结构拓扑优化[J]. 固体力学学报, 2008, 29(2): 157 - 162.

[8] SHU L, WANG M Y, FANG Z, et al. Level set based structural topology optimization for minimizing frequency response [J]. Journal of sound and vibration, 2011, 330 (24): 5820 - 5834.