

分布式网络中进度密度的研究

李娜娜¹, 陈昌海^{2,3}, 甘 勇¹, 丁汉青¹

(1. 郑州轻工业学院 计算机与通信工程学院, 河南 郑州 450002; 2. 四川工程职业技术学院 电气信息工程系, 四川 德阳 618000; 3. 北京邮电大学 泛网无线通信教育部重点实验室, 北京 100876)

摘 要: 基于分布式网络中目的接收机位于有限远处这一假设, 重新定义了有效传输距离, 从理论上推导了有效传输距离期望值和进度密度的上下界, 研究了网络参数对进度密度的影响, 为分布式网络建设最大化网络容量提供了重要的参考依据. 数值分析和仿真结果表明: 有效传输距离期望值的仿真值介于理论推导的上、下界之间, 并且随着中继接收机选择区域角度的增加而减小; 进度密度的仿真值介于理论推导的上下界之间, 且更趋近于上界, 进度密度主要由有效传输距离期望值和最大中断概率决定.

关键词: 网络容量; 进度密度; 中断概率; 有效传输距离

中图分类号: TN911.22 **文献标志码:** A **doi:**10.3969/j.issn.1671-6833.2014.02.013

0 引言

分布式网络容量一直是信息理论无法彻底解决的问题, 多年来有许多学者从不同角度对这一问题进行了研究, 并取得了一些代表性的研究成果^[1-3]. 在文献[4]中, Baccelli 等提出了一种基于 Aloha 的多跳空间复用协议, 并给出了一种分布式网络容量的新定义, 即进度密度, C_{DP} 定义为网络中单位面积中成功通信数量与传输距离的乘积. 文献[5]做了进一步的研究, 对传输距离和中继接收机 (RX, Receiver) 选择区域进行了重新定义, 并对不同网络参数如何影响 C_{DP} 进行了研究. 上述文章都假设目的 RX 位于无穷远处, 这样可以很容易地得到传输距离, 并可以使理论推导变得简单, 但是这一假设与网络实际情况不符, 使得研究结论的可靠性有所降低. 笔者使用文献[5]定义的网络模型, 在目的 RX 位于有限远处这一条件基础上, 对 C_{DP} 的表达式进行理论推导, 并研究不同网络参数对 C_{DP} 的影响.

1 系统模型和参数说明

定义网络是二维平面上一个规模没有限制的无线分布式网络, 接入方式使用 DS-CDMA, 在同一时隙内网络拓扑保持不变, 任意发送机 (TX,

Transmitter) 在网络中随机分布, 同一时隙内相同通信频率的 TXs 在二维平面上服从密度为 λ 的泊松点过程 (PPP, Poisson Point Process) (Π) 分布, 则在任意半径为 R 的圆形区域内存在 k 个 TXs 的概率为 $\text{Prob}(k \text{ in } R)$, 如式 (1) 所示. 在网络中任意 TX 都有唯一 RX (不属于 Π) 与之相对应, 本文使

$$\text{Prob}(k \text{ in } R) = \frac{(\lambda \pi R^2)^k}{k!} e^{-\lambda \pi R^2}. \quad (1)$$

用编号 i 来标注由 TX i 和 RX i 组成的通信对. 与文献[6]相类似, 在坐标的原点处放置一个假定的参考 RX, 这个参考 RX 和与它对应的 TX 构成的通信对的编号记为 0 ($0 \notin \Pi$). 由于 PPP 具有平稳性, 所以 RX 0 与网络中任意 RX i ($i \neq 0$) 具有相同的中断概率统计特性.

传输协议的定义如下: 目的 RX 位于有限远处, 任意 TX 传输数据的最大传输距离为 R_m , 源 TX 与目的 RX 之间距离大于 R_m , 数据需要经过多次中继后才能到达目的 RX; 如图 1 所示, 在任意一次中继过程中, 传输数据的 TX 位于图中 A 点, 目的 RX 位于 B 点, TX 必须在中继 RX 选择区域内选择中继 RX, 且中继 RX 使用随机选择策略; 中继 RX 选择区域是一个由最大传输距离 R_m 和角度 θ ($0 < \theta < \pi/2$) 确定的指向目的 RX 的扇

收稿日期: 2013-10-22; 修订日期: 2013-12-23

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (60972073, 60871042); 河南省科技攻关计划项目 (112102210321)

作者简介: 李娜娜 (1980-), 女, 河南周口人, 郑州轻工业学院讲师, 主要从事无线自组织网络关键技术研究, E-mail: lanxuejudy@126.com.

形区域,如图 1 所示, $\angle HAB = \theta$, $AH = R_m$, AB 为扇形区域的中心线。

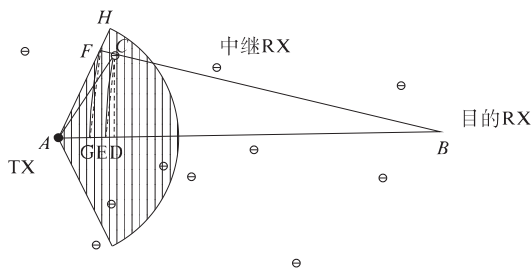


图 1 中继 RX 选择区域

Fig. 1 The region for the selection of relay RX

传输模型的定义如下: TX_i 的发送功率记为 P_i , 路径损耗因子记为 α ($\alpha > 2$), TX_i 与 RX_j 之间小尺度衰落的功率衰减系数记为 H_{ij} , TX_i 与 RX_j ($j \neq 0$) 之间的距离记为 R_{ij} , 使用信道反转 (CI, Channel Inversion) 功率控制策略, 任意 TX_i 自动调整发送功率 P_i 以保证其对应 RX_i 处接收到的信号功率为固定值 P_r , TX_i 与 RX_0 之间的距离记为 X_i , 则 RX_0 处接收的总干扰信号功率为 $\sum_{i \in \Pi} P_r H_{ii}^{-1} R_{ii}^\alpha H_{i0} X_i^{-\alpha}$.

小尺度衰落为功率衰减因子 H_{ij} 服从参数为 τ 的指数分布的瑞利衰落, 且任意 RX 处能够成功接收数据的信干比 (SIR, Signal-to-Interference Ratio) 最低门限为 β , 则 RX_0 处的中断概率为 $q(\lambda)$, 如式 (2) 所示. 网络的最大中断概率记为 ε ,

$$q(\lambda) = \text{Prob} \left(\frac{P_r}{\sum_{i \in \Pi} P_r H_{ii}^{-1} R_{ii}^\alpha H_{i0} X_i^{-\alpha}} < \beta \right). \quad (2)$$

则网络中通信的成功概率为 $1 - \varepsilon$, 通过对 $q(\lambda) = \varepsilon$ 求解 λ 可得到对应于 ε 的 TX 的最大密度 λ^ε , 根据文献 [5] 中对 DP 的定义可以得到式 (3).

$$D(\varepsilon) = \lambda^\varepsilon (1 - \varepsilon) E(d), \quad \varepsilon \in (0, 1). \quad (3)$$

式中: $E(\cdot)$ 表示求期望值; d 为有效传输距离, 其具体定义将在下一节进行介绍。

2 有效传输距离的研究

如图 1 所示, 节点 C 为中继 RX, 中继长度 AC 记为 r , $\angle CAD = \varphi$. 在文献 [4-5] 中, 假设目的 RX 位于无穷远处, 有效传输距离为中继长度 r 在 AB 方向的投影, 即 $d = r \cos \varphi$. 本文中目的 RX 位于有限远处, 有效传输距离需要重新定义, 其具体定义为: 经过一次中继传输后数据靠近目的 RX 的距离. 如图 1 所示, 有效传输距离可以表示为 $d = AB - CB$.

从节点 C 向 AB 做垂直线并交 AB 于 D 点, 延长 BC 交 AH 于 F 点, 以目的节点 B 为圆心且以 CB 长为半径画圆弧交 AB 于 E 点, 以节点 B 为圆心且以 BF 长为半径画圆交 AB 于 G 点, 可以得到式 (4) 及式 (5).

$$d = AB - CB = AB - EB = AE. \quad (4)$$

$$d = AE < AD = r \cos \varphi. \quad (5)$$

把 $\angle CED$ 的角度记为 δ , 则 $\angle ACE = \delta - |\varphi|$, 对于 $\triangle ACE$ 使用正弦定理可以得到式 (6). 对公式 (6) 进行变换可以得到式 (7). 对于 $\triangle AFG$ 来说, $\angle FGD$ 是其外角, 因此 $\delta > \theta$. 将其代入公式 (7) 可以得到 d 的下界如式 (8) 所示:

$$\frac{d}{\sin(\delta - |\varphi|)} = \frac{r}{\sin(\pi - \delta)}. \quad (6)$$

$$d = r(\cos |\varphi| - \cot \delta \sin |\varphi|). \quad (7)$$

$$d > r(\cos |\varphi| - \cot \theta \sin |\varphi|). \quad (8)$$

中继 RX 是随机选择的, 即角度 φ 均匀分布在 $[-\theta, \theta]$ 区间, 则角度 φ 的概率密度函数 (PDF, Probability Density Function) $f(\varphi)$ 如式 (9) 所示. 而中继长度 r 的 PDF $g(r)$ 如式 (10) 所示.

$$f(\varphi) = (2\theta)^{-1}, \quad -\theta \leq \varphi \leq \theta. \quad (9)$$

$$g(r) = 2r/R_m^2, \quad 0 < r \leq R_m. \quad (10)$$

使用式 (5)、(9) 和 (10) 可以得到 d 的上界如式 (11) 所示, 使用式 (8)、(9) 和 (10) 可以得到 d 下界如式 (12) 所示.

$$E(d) < \frac{2}{3\theta} R_m \sin \theta. \quad (11)$$

$$E(d) > \frac{2}{3\theta} R_m (\csc \theta - \cot \theta). \quad (12)$$

3 DP 的理论推导

由公式 (3) 可知, 想得到 DP 的表达式, 需要先得到对应于最大中断概率 ε 时的 TX 最大密度 λ^ε , 而要想得到 λ^ε 就需要先对中断概率进行研究. 对公式 (2) 进行变化可以得到式 (13). 其中 I 如式 (14) 所示.

$$q(\lambda) = \text{Prob}(I > \beta^{-1}). \quad (13)$$

分析式 (13) 可知, 要想得出中断概率表达式就要先得到变量 I 的累计分布函数 (CDF, Cumulative Distribution Function).

$$I = \sum_{i \in \Pi} H_{ii}^{-1} R_{ii}^\alpha H_{i0} X_i^{-\alpha}. \quad (14)$$

为了得到变量 I 的 CDF, 需要先推导变量 I 的特征函数, 然后利用特征函数的特性, 使用对特征函数进行反傅立叶变换后再积分的方法求得 CDF, 具体推导过程如下.

定义 $\Phi(w)$ 为变量 I 的特征函数,当网络大小局限于以 RX_0 为圆心以 a 为半径的圆形区域时, $\Phi_a(w)$ 表示此时 RX_0 处变量 I 的特征函数,当 $a \rightarrow \infty$ 时,则 $\Phi(w) = \Phi_a(w)$. 当只有 K 个干扰 TX_s 存在于半径为 a 的圆形区域内时,可以得到(15)式. 由于干扰 TX_s 是随机分布的, X_i 的 PDF 为 $f_{X_i}(x) = 2x/a^2$, 则式(15)可以变化为式(16). 使用式(1)与式(16),可以得到 $\Phi_a(w)$ 如式(17)所示.

$$\begin{aligned}\Phi_{a|K}(w) &= E\left[\exp(jw \sum_{i=1}^K H_{ii}^{-1} R_{ii}^{\alpha} H_{i0}^{-1} X_i^{-\alpha})\right] \\ &= [E(\exp(jw H_{ii}^{-1} R_{ii}^{\alpha} H_{i0}^{-1} X_i^{-\alpha}))]^K, \quad (15)\end{aligned}$$

$$\Phi_{a|K}(w) = \left\{ E\left[\int_0^a \frac{2x}{a^2} e^{jw H_{ii}^{-1} R_{ii}^{\alpha} H_{i0}^{-1} x^{-\alpha}} dx\right] \right\}^K, \quad (16)$$

$$\begin{aligned}\Phi_a(w) &= E[\Phi_{a|K}(w)] \\ &= \sum_{K=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda \pi a^2} (\lambda \pi a^2)^K}{K!} \left\{ E\left[\int_0^a \frac{2x}{a^2} e^{jw H_{ii}^{-1} R_{ii}^{\alpha} H_{i0}^{-1} x^{-\alpha}} dx\right] \right\}^K \\ &= \exp\left\{ \lambda \pi E\left[\int_0^a (e^{jw H_{ii}^{-1} R_{ii}^{\alpha} H_{i0}^{-1} x^{-\alpha}} - 1) 2x dx\right] \right\}. \quad (17)\end{aligned}$$

当 $a \rightarrow \infty$ 时, $\Phi_a(w) \rightarrow \Phi(w)$, 则公式(17)变为式(18). 其中 $\gamma = 2/\alpha$. 由于 H_{ii} 和 H_{i0} 都服从参数为 τ 的指数分布, 可以得到式(19)与式(20).

$$\begin{aligned}\Phi(w) &= \exp\left[\lambda \pi E\left(\int_0^{\infty} (e^{jw H_{ii}^{-1} R_{ii}^{\alpha} H_{i0}^{-1} x^{-\alpha}} - 1) 2x dx\right)\right] \\ &= \exp\left[\lambda \pi E\left[jw H_{ii}^{-1} R_{ii}^{\alpha} H_{i0}^{-1} \int_0^{\infty} e^{jw H_{ii}^{-1} R_{ii}^{\alpha} H_{i0}^{-1} t^{-\gamma}} t^{-\gamma} dt\right]\right] \\ &= e^{-\lambda \pi E(R_{ii}^2) E(H_{ii}^{\gamma}) E(H_{i0}^{-\gamma}) \Gamma(1-\gamma)} |w|^{\gamma} e^{-i \frac{\gamma \pi}{2} \text{sign}(w)}. \quad (18)\end{aligned}$$

$$E(H_{ii}^{\gamma}) = \int_0^{\infty} x^{\gamma} \tau \exp(-\tau x) dx = \tau^{-\gamma} \Gamma(1+\gamma). \quad (19)$$

$$E(H_{i0}^{-\gamma}) = \int_0^{\infty} x^{-\gamma} \tau \exp(-\tau x) dx = \tau^{\gamma} \Gamma(1-\gamma). \quad (20)$$

使用式(20)和式(19)可以得到式(21). R_{ii} 是 TX_i 和 RX_i 之间的中继长度,其 PDF 与式(10)相同,因此可以得到式(22). 把式(21)和式(22)代入式(18)可以得到式(23).

$$\begin{aligned}E(H_{ii}^{\gamma}) E(H_{i0}^{-\gamma}) &= \Gamma(1+\gamma) \Gamma(1-\gamma) \\ &= \gamma \pi \csc(\gamma \pi). \quad (21)\end{aligned}$$

$$E(R_{ii}^2) = \int_0^{R_m} \frac{2r}{R_m^2} r^2 dr = \frac{1}{2} R_m^2. \quad (22)$$

$$\Phi(w) = \exp\left(-\frac{\lambda \gamma \pi^2 R_m^2 \Gamma(1-\gamma)}{2 \sin(\gamma \pi)} |w|^{\gamma} e^{-i \frac{\gamma \pi}{2} \text{sign}(w)}\right). \quad (23)$$

理论上通过对特征函数式(23)进行反傅里

叶变换可以得到变量 I 的 PDF, 但是除了 $\gamma = 0.5$ ($\alpha = 4$) 外都无法得到 PDF 的闭合表达式. 把 $\gamma = 0.5$ 代入式(23)并进行反傅里叶变换, 可以得到变量 I 的 PDF $f_I(x)$ 如式(24)所示. 对式(24)进行积分可以得到变量 I 的 CDF $F_I(x)$ 如式(25)所示.

$$f_I(x) = \frac{\lambda \pi^2 R_m^2}{8} x^{-1.5} \exp\left(-\frac{\lambda^2 \pi^5 R_m^4}{64} x^{-0.5}\right). \quad (24)$$

$$F_I(x) = \text{erfc}\left(\frac{1}{8} \lambda R_m^2 \pi^{2.5} x^{-0.5}\right). \quad (25)$$

把式(24)代入式(12)可以得到网络的中断概率 $q(\lambda)$ 如式(26)所示. 把 $q(\lambda) = \varepsilon$ 代入式(26)并求解, 可以得到对应于最大中断概率 ε 的 TX 最大密度 λ^{ε} 如式(27)所示.

$$q(\lambda) = 1 - \text{erfc}\left(\frac{1}{8} \lambda R_m^2 \pi^{2.5} \beta^{0.5}\right). \quad (26)$$

$$\lambda^{\varepsilon} = \frac{8}{R_m^2 \pi^{2.5} \beta^{0.5}} \text{erfc}^{-1}(1 - \varepsilon). \quad (27)$$

根据 DP 的定义公式(3), 使用式(27)和(11)可以得到 DP 的上界如式(28)所示. 使用式(27)和(12)可以得到 DP 的下界如式(29)所示.

$$D(\varepsilon) < \frac{16 R_m (1 - \varepsilon) \sin \theta}{3 \theta R_m^2 \pi^{2.5} \beta^{0.5}} \text{erfc}^{-1}(1 - \varepsilon). \quad (28)$$

$$D(\varepsilon) > \frac{16 R_m (1 - \varepsilon) (\csc \theta - \cot \theta)}{3 \theta R_m^2 \pi^{2.5} \beta^{0.5}} \text{erfc}^{-1}(1 - \varepsilon). \quad (29)$$

4 仿真和性能分析

没有额外说明时, 仿真参数设置为 $R_m = 20$ m, $\beta = 3$, $\alpha = 4$, $\theta = \frac{\pi}{3}$.

图2是有效传输距离的期望值 $E(d)$ 与中继 RX 选择区域角度 θ 关系的曲线图. 其中, $E(d)$ 的仿真值处于理论推导的上界和下界之间, $E(d)$ 的上界和仿真值随着 θ 的增大而减小, $E(d)$ 的下界随着 θ 的增大而增大. 仿真结果证实了理论推导的有效传输距离期望值上下界的式(11)和(12)是正确的. 同时也应该看到, 当 $\theta \rightarrow \pi/2$ 时, $E(d)$ 的仿真值、上界和下界三者相等, $E(d)$ 仿真值的变化趋势与 $E(d)$ 的上界相同, 且 $E(d)$ 仿真值与 $E(d)$ 的上界之间的误差相对较小. 综合来看, $E(d)$ 的上界能够更好的趋近仿真值, 且 $E(d)$ 的上、下界与仿真值的误差随着角度 θ 的增大而减小.

图3是 C_{DP} 与最大中断概率 ε 的关系曲线图. 其中, C_{DP} 的仿真值介于 C_{DP} 的上界和下界之间,

当最大中断概率 ε 较小时, C_{DP} 随着最大中断概率 ε 的增加而增大, 当 ε 增大到一定数值后, C_{DP} 随着最大中断概率 ε 的增加而减小. 这是因为, 当最大中断概率 ε 较小时, ε 增大 $\Delta\varepsilon$ 后会导致成功通信的概率减少 $\Delta\varepsilon$, 此时网络中的干扰较小, 对应的 TX 最大密度 λ^e 会有显著的增大, 而有效传输距离期望值与 ε 无关, 最终 C_{DP} 值会增大; 而当 ε 增大到一定数值后, 网络中的干扰已经较大, 最大中断概率同样增大 $\Delta\varepsilon$ 后, 对应的最大 TX 密度 λ^e 的增加较少, 最终 C_{DP} 值会变小.

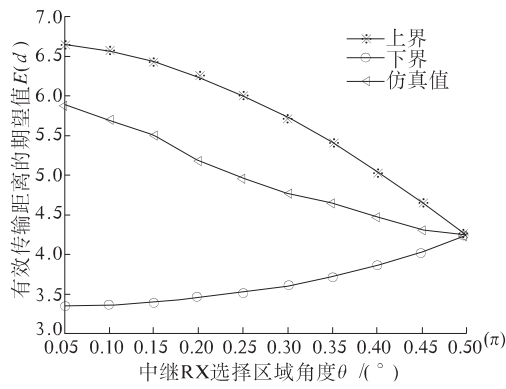


图2 有效传输距离的期望值 $E(d)$ 与中继RX选择区域角度 θ 关系的曲线图

Fig.2 The expectation for the effective transmission distance $E(d)$ versus θ the angle of the region for the relay RX selection

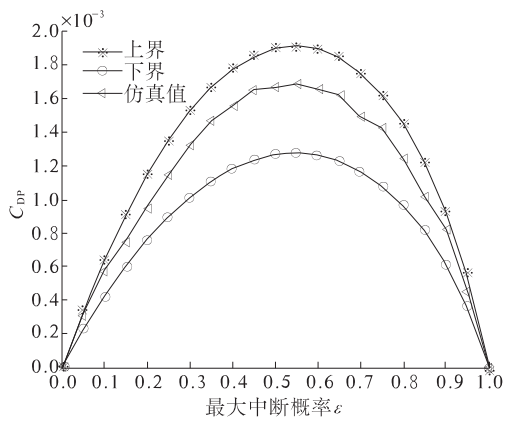


图3 DP 与最大中断概率 ε 的关系曲线图

Fig.3 DP versus ε the maximum probability of outage

综合图2和图3可以看出:有效传输距离期望值 $E(d)$ 由最大中继距离 R_m 和角度 θ 决定, 且 $E(d)$ 仿真值介于理论推导的上、下界之间; C_{DP} 虽然受有效传输距离期望值 $E(d)$ 的影响, 但是当最大中继距离 R_m 和角度 θ 选定后, C_{DP} 只由最大中断概率 ε 决定, 而 ε 的大小实际上也反映了网络中的干扰大小, 如何选择合适的 ε 是研究 C_{DP}

时要考虑的首要问题.

5 结束语

进度密度是分布式网络容量的一种定义, 研究不同网络参数对进度密度的影响, 可以指导分布式网路的建设以达到最大化网络容量的目的. 研究结果表明, 进度密度主要由有效传输距离期望值和最大中断概率决定, 而中继RX选择策略将对有效传输距离期望值有较大影响, 本文使用的是随机选择策略, 后续将继续研究不同中继选择策略对进度密度的影响. 另外, 文章的研究基于路径损耗因子 $\alpha = 4$ 这一假设, 使得结论有一定的局限性, 后续还要对一般情况下 C_{DP} 的表达式进行更深入的研究.

参考文献:

[1] CHEN Chang-hai, YIN Chang-chuan, LI Na-na, et al. Analysis of transmission capacity of ad hoc networks with SBPC strategy [J]. Journal of Beijing University of Posts and Telecommunications, 2010, 33 (3): 117 - 120.

[2] RAHUL V, ROBERT W H. Transmission capacity of ad-hoc networks with multiple antennas using transmit stream adaptation and interference cancellation [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2012, 58 (2): 780 - 792.

[3] LEE J, JEFFREY G A, HONG D. Spectrum-sharing transmission capacity with interference cancellation [J]. IEEE Transactions on Communications, 2013, 61 (1): 76 - 86.

[4] FRANCOIS B, BARTLOMIEJ B, PAUL M. An aloha protocol for multihop mobile wireless networks [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52 (2): 421 - 436.

[5] LI Di, YIN Chang-chuan, CHEN Chang-hai. A selection region based routing protocol for random mobile Ad Hoc networks with directional antennas [C]//Global Telecommunications Conference. Miami, FL: IEEE Press, 2010: 104 - 108.

[6] JEFFREY G A, STEVEN W, MARIOS K, et al. Random access transport capacity [J]. IEEE Transactions on Wireless Communications, 2010, 9 (6): 849 - 856.

(下转第 59 页)