

文章编号:1671-6833(2011)03-0095-04

基于移动最小二乘曲线拟合的 LFM 信号参数估计

齐林, 张芳, 陈恩庆

(郑州大学信息工程学院, 河南郑州 450001)

摘要: 针对二维搜索方法实现基于分数阶傅里叶变换(FrFT)的线性调频信号(LFM)参数估计中存在的峰值估计偏差问题, 提出可利用移动最小二乘(MLS)技术来拟合 FrFT 模函数峰值检测向量的方法以提高参数估计性能. 该算法将复杂的二维搜索问题简化至一维曲线拟合来进行处理. 理论分析与仿真结果表明, 该方法在保留分数阶域处理优点的同时, 可明显减少运算量, 并达到较高估计精度, 为基于 FrFT 的 LFM 信号实时检测提供了可能.

关键词: 分数阶傅里叶变换(FrFT); 移动最小二乘(MLS); 线性调频信号(LFM)

中图分类号: TN91 **文献标志码:** A

0 引言

线性调频信号(LFM 信号)作为一种特殊的非平稳信号, 具有大的时间带宽积, 广泛应用于通信、雷达、声纳和地震勘测等系统, 而 LFM 信号的检测与参数估计问题也成了近年来普遍研究的热点^[1-2]. 传统的 Fourier 变换仅能得到信号整体频谱而不具备局部特性, 需要一系列新的分析理论应用于非平稳信号的处理. 对于基于时频的分析方法, 近年来一些文献提出了 WVD^[3]、STFT^[4]、FrFT^[5]等算法对 LFM 信号进行处理. 其中 FrFT 作为 Fourier 变换的广义形式, 对 LFM 信号具有良好的时频聚集性. 文献[6]提出基于 FrFT 的 LFM 信号检测和估计方法, 由于 FrFT 是一维线性变换, 在处理多分量问题时不存在交叉性干扰问题. 但缺点是传统的基于 FrFT 的 LFM 信号参数估计方法需在几乎半个时频平面遍历的做 FrFT, 多次重复的检测使其实时性受到限制. 如果采用较大的旋转角度检测又常常会因漏掉真实的峰值部分而不具有精确估计的能力.

笔者首先给出基于 FrFT 的 LFM 信号参数估计理论及性能的分析, 对造成 FrFT 能量二维谱峰偏移的因素进行分析, 在此基础上提出 FrFT 模函数的峰值检测向量. 采用移动最小二乘法^[7]对 FrFT 模函数峰值检测向量中采集的数据进行逼近.

最后通过对拟合曲线的峰值搜索获得精确的最优阶次估计值.

1 参数估计理论及性能分析

1.1 分数阶傅里叶变换及参数估计理论

分数阶傅里叶变换, 作为广义的 Fourier 变换, 通过可在时频平面旋转任意角度 α 的旋转算子, 得到新的信号表示形式. 其定义如下^[8]:

$$X_\alpha(u) = F^\alpha[x(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) K_\alpha(t, u) dt \quad (1)$$

$$K_\alpha(t, u) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1-j\cot\alpha}{2\pi}} \exp\left(j\frac{t^2+u^2}{2}\cot\alpha - tucsc\alpha\right), & \alpha \neq n\pi \\ \delta(t-u), & \alpha = 2n\pi \\ \delta(t+u), & \alpha = (2n\pm 1)\pi \end{cases} \quad (2)$$

式中: $\delta(t)$ 为冲激函数; n 是整数; $\alpha = p\pi/2$ 是旋转角度; p 为 LFM 信号的分数阶傅里叶变换旋转阶次.

检测含有未知参数的 LFM 信号的基本思想就是以旋转角 α 为变量进行扫描, 求观测信号的分数阶傅里叶变换, 从而形成信号能量在参数 (α, u) 平面上的二维分布, 在此平面上按阈值进行峰值点的二维搜索即可检测 LFM 信号并估计其参数. 假设含有噪声的单分量 LFM 信号可表示

收稿日期: 2010-12-28; 修订日期: 2011-03-20

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(61071211); 河南省自然科学基金资助项目(2009A510012)

作者简介: 齐林(1961-), 男, 河南永城人, 郑州大学教授、博士生导师, 主要研究方向为通信系统及信号处理, 信号检测与估计, 图像处理等. E-mail: ielqi@zzu.edu.cn.

为:

$$x(t) = s(t) + v(t) = a_0 \exp(j\varphi_0 + j2\pi f_0 t + \pi\mu_0 t^2) + v(t) \quad -\Delta t/2 \leq t \leq \Delta t/2 \quad (3)$$

式中: a_0, φ_0, f_0 和 μ_0 为未知参数, $v(t)$ 为零均值, 方差为 1 的加性高斯白噪声, 则上述的 LFM 信号检测和估计过程可描述为^[6]

$$\{\hat{\alpha}_0, \hat{\mu}_0\} = \arg \max_{\alpha, \mu} |X_\alpha(\mu)|^2 \quad (4)$$

峰值点可表示为

$$\begin{cases} \hat{\mu}_0 = -\cos \hat{\alpha}_0 \\ \hat{f}_0 = \hat{\mu}_0 \csc \hat{\alpha}_0 \end{cases} \quad (5)$$

根据文献[9], 在估计中不能忽略归一化对参数估计的影响, 因此要根据归一化前后参数之间的关系计算出真实的调频率和中心频率. 设归一化前实际调频率为 μ_0 , 中心频率为 f_0 , 归一化后信号调频率为 μ'_0 , 中心频率为 f'_0 , 其关系可表示为

$$\begin{cases} \mu'_0 = \mu_0 S^2 = \mu_0 t_0 / f_s \\ f'_0 = f_0 S = f_0 (t_0 / f_s)^{1/2} \end{cases} \quad (6)$$

式中: S 为尺度化因子; 信号时宽为观测时间 t_0 ; f_s 为采样频率.

1.2 DFRFT 分辨率及峰值估计偏差分析

工程应用中, 需要对信号进行离散化处理 (DFrFT). 由(4)式可知, LEM 信号的参数估计基本思路即搜索由信号能量聚集造成的峰值点 $|Y_\alpha(u)|$. 这里将以 Ozaktas 的采样型离散算法为例分析, 所得峰值点 (伪峰) 与真实峰值点之间存在的偏差主要由 3 个因素造成.

(1) 噪声引入的偏差. LFM 信号在匹配的分频阶域表现为一个冲击函数, 而噪声的能量均匀分布在整个时频平面内, 在任何的分频阶傅里叶域都不会产生聚集, 但在噪声影响下, 参数估计性能随信噪比的降低而降低.

(2) DFRFT 离散化引入误差. 假定原始信号在时间轴和频率轴上都是紧致的, 其时域限定在区间 $[-\Delta t/2, \Delta t/2]$, 其频域限制在 $[-\Delta f/2, \Delta f/2]$, Δt 和 Δf 分别表示信号的时宽和带宽. 信号时宽带宽积为 $N = \Delta t \Delta f$. 通过归一化处理, 可定义尺度化因子 $S = \sqrt{\Delta t \Delta f}$, 将时域频域归一化并转换成为无量纲的域 $[-\sqrt{\Delta t \Delta f}/2, \sqrt{\Delta t \Delta f}/2]$. 此时, 信号在时域和频域具有相同的长度, 可将式(1)表示为:

$$X_\alpha(u) = A_\alpha e^{j\pi u^2 \cot \alpha} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\pi t^2 \cot \alpha} x(t) dt \quad (7)$$

其中 $A_\alpha = \sqrt{\frac{1-j\cot \alpha}{2\pi}}$. 可将 $X_\alpha(u)$ 看作在 α 阶

FrFT 的区间 $[-\Delta l/2, \Delta l/2]$ 内做 N 点均匀离散, 其中 $\Delta l = \sqrt{\Delta t \Delta f}$, 因此离散分辨率为 $\Delta l/N = 1/\Delta l$.

(3) 对时频平面旋转角度采样引入的误差. 在以旋转角 α 为变量进行扫描的过程中, 根据参数估计精度要求不同, 选择不同的扫描步长. 在雷达应用中, 若已知载频信号波长、目标运动加速度变化范围或信号采样持续时长及频域范围等先验信息, 可确定参数 α 的取值范围. 若无先验信息的情况下, 则需要在整个时频平面 $[0, \pi]$ 上进行扫描. 首先要对此区间按所需精度选择一定步长进行离散 $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n]$, 然后对每一个离散角度 α_i , 做 FrFT 得到相应阶次模函数 $Y_{\alpha_i}(u)$. 当所需精度较高时, 这将成倍的增加计算复杂度, 同时这也成为了 FrFT 对信号进行实时高精度参数估计的最大瓶颈.

2 MLS 拟合技术实现 LFM 信号参数估计

2.1 FrFT 模函数峰值检测向量

根据以上分析, 在离散分辨率确定的噪声环境下, 只有扫描步长的精度是可以选择的. 若要达到高的估计精度, 需要对每一个细微的旋转角度都进行一次 FrFT, 再在二维平面上寻找峰值, 由此可见计算量的庞大. 根据这一特点, 先对旋转角 α 用较大步长进行采样得 $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n]$, 分别求解其关于另一个参数 u 的模函数 $[Y_{\alpha_1}, Y_{\alpha_2}, Y_{\alpha_3}, \dots, Y_{\alpha_n}]$, 并取各个阶次下模函数峰值投影至 α 轴, 得到一组一维离散数据, 即为 FrFT 模函数峰值检测向量:

$$F_\alpha = [F_{\alpha_1}, F_{\alpha_2}, F_{\alpha_3}, \dots, F_{\alpha_n}]^T \quad (8)$$

$$F_{\alpha_n} = \max \{ Y_{\alpha_n}(u) \} \mid \alpha_n \in [0, \pi] \quad (9)$$

为了得到更精确的峰值, 下面对此 FrFT 模函数峰值检测向量运用曲线拟合技术进行拟合重建, 这样即可将二维搜索问题简化为一维曲线拟合问题来解决.

2.2 MLS 曲线拟合技术的实现

根据移动最小二乘原则 (MLS), 在某个拟合子域内对(8)式的离散数据进行拟合, 节点 $\alpha_i = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n]$ 对应函数值表示为向量 $F_{\alpha_i} = [F_{\alpha_{i1}}, F_{\alpha_{i2}}, \dots, F_{\alpha_{in}}]$. 首先利用最终所需精度为步长对这个局部子域网格化, 设拟合函数为:

$$f(\alpha) = \sum_{i=1}^m a_i(\alpha) p_i(\alpha) = p^T(\alpha) a(\alpha) \quad (10)$$

式中: $a(\alpha) = [a_1(\alpha), a_2(\alpha), \dots, a_m(\alpha)]^T$ 为待求系数. m 为基函数的项数. 在一维曲线拟合问题

中, $p(\alpha)$ 为线性基函数,因此在本文涉及的参数估计里可表示为: $p(\alpha_l) = [1, \alpha_l]^T, m = 2$.

根据最小二乘原则,为了使拟合数据最佳地逼近已知数据,可用权函数与各个数据点误差平方相乘的形式构造加权离散代价函数 J :

$$\begin{aligned}
 J &= \sum_{l=1}^n w(\alpha - \alpha_l) [f(\alpha) - F_{\alpha_l}]^2 \\
 &= \sum_{l=1}^n w(\alpha - \alpha_l) [p^T f(\alpha_l) a(\alpha) - F_{\alpha_l}]^2
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

式中: n 是影响区域节点个数, $l = 1, 2, \dots, n, w(\alpha - \alpha_l)$ 是节点 α_l 的权函数,这里通常选择高斯权函数或样条函数作为支撑. 为确定系数 $a(\alpha)$,需要对式(11)求最小值,故关于系数 α 求导,得:

$$\frac{\partial J}{\partial a} = A(\alpha) a(\alpha) - B(\alpha) F_{\alpha_l} = 0 \tag{12}$$

$$\text{式中: } A(\alpha) = \sum_{l=1}^n w(\alpha - \alpha_l) p(\alpha_l) p^T(\alpha_l) \tag{13}$$

$$\begin{aligned}
 B &= [w(\alpha - \alpha_1) p(\alpha_1), w(\alpha - \alpha_2) p(\alpha_2), \\
 &\dots w(\alpha - \alpha_n) p(\alpha_n)] \tag{14}
 \end{aligned}$$

由式(12)可得系数向量:

$$a(\alpha) = A^{-1}(\alpha) B(\alpha) F_{\alpha_l} \tag{15}$$

将式(15)代入式(10)可得拟合函数:

$$f(\alpha) = p^T(\alpha_l) A^{-1}(\alpha) B(\alpha) F_{\alpha_l} \tag{16}$$

得到拟合曲线后,对拟合曲线进行搜索,得新的曲线峰值 $(\alpha', Y_{\alpha'}(u))$. 再对 $Y_{\alpha'}(u)$ 搜索得频谱峰值对应频率值 u' , 综合结果,得二维谱的峰值 (α', u') . 将其代入式(6)可解得精确的检测结果.

3 仿真实验及结果分析

为验证算法的正确性及有效性,对上述算法进行仿真实验. 设待估计信号如下:

$$y(t) = \exp(2\pi j \times 0.1t + j\pi \times 0.03t^2) + v(t) \tag{17}$$

信号样本长度为 65, 其中 $v(t)$ 均值为零、方差为 1 的高斯白噪声. 按照笔者提出的算法,首先对 LFM 信号在分数阶傅里叶域的最优阶次进行粗估计以缩小拟合子域空间,并按照式(8)、式(9)建立 FrFT 模函数峰值检测向量,过程如图 1.

得到粗估计阶次 \hat{p} 后以这一估计值为中心,在其左右各取五个点,利用 MLS 曲线拟合原则对拟合子域空间节点拟合.

对拟合后的曲线进行一维搜索,得峰值点对应的参数为 $\hat{f} = 0.0301, \hat{\dot{f}} = 0.099$, 此时观测信号可近似表示为:

万方数据

$$x(t) = \exp(-j2\pi 0.099t - j0.0301\pi t^2) \tag{18}$$

为了验证算法的可靠性,取输入信噪比范围为 -8 dB 到 10 dB, 间隔为 2 dB, 分别运行 1 000 次 Monte-Carlo 模拟,各参数估计值的均方误差曲线如图 2 所示.

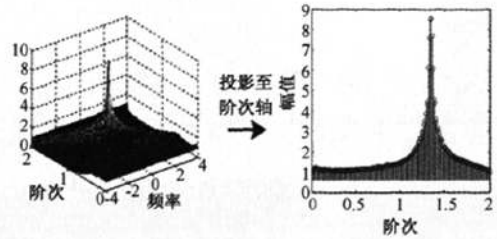


图1 FrFT 模函数检测器的建立

Fig.1 The establish of FrFT modulus detector

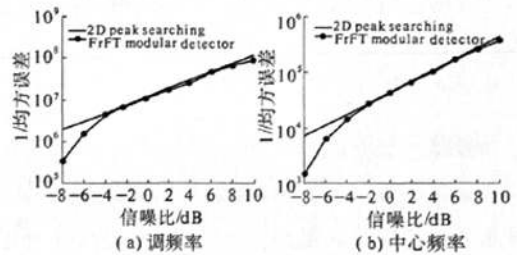


图2 调频率及中心频率检测均方误差曲线

Fig.2 MSE of the chirp rate and center frequency

由图 2 可见,信号调频率和初始频率在输入信噪比大于 -4 dB 时,仿真结果非常接近 Cramer-Rao 下限. 而随着信噪比的降低,仿真结果渐渐偏离 Cramer-Rao 下限,这一现象是由于在小信噪比的情况下,粗估计值因噪声淹没模函数峰值而造成所确立的拟合子域节点空间出现偏差. 这一现象可通过增加拟合子域空间节点个数或增加粗估计阶数值精度来进一步改善.

4 运算量分析

设序列长度为 N ,按实际所需精度使 α 离散个数为 m ,二维搜索算法中,对每一阶数的搜索都需进行一次 FrFT,而 FrFT 可分解为 chirp 调制、卷积、再一次 chirp 调制的过程,其中卷积计算可采用快速 FFT 实现. 因此,通过分解法可使一次 FrFT 计算量逼近于 $O(N \log_2 N)$,则二维搜索算法计算量可统计为 $O(mN \log_2 N)$. 利用笔者需提出的移动最小二乘拟合方法对子域节点的采样为 $n(n \leq m)$,拟合空间总拟合点数为 M ,一次移动最小二乘拟合的运算量为 $4nM$,则笔者所提出算法总计算量为 $O(nN \log_2 N) + 4nM$. 不计粗搜索共同运算部分,二维搜索方法在粗搜索后对区间进

行分级运算.图3可统计提出算法与其在运算量上的比较.

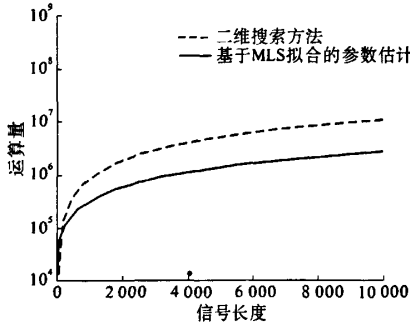


图3 运算量统计对比

Fig.3 The comparison of computational statistics

由此可知,利用移动最小二乘曲线拟合法对模函数进行曲线拟合的方法可在保证精度的情况下,计算量明显降低,很好的提高估计的效率和质量.

5 结论

笔者在文献[6]的基础提出通过建立 FrFT 模函数峰值检测向量确定拟合子域空间,并利用移动最小二乘曲线拟合技术将复杂的二维搜索问题通过一维曲线拟合来解决,大大简化了估计问题的复杂度,解决了基于 FrFT 参数估计因计算量过大而造成旋转角度采样不足产生的栅栏效应.通过对比分析可知笔者方法在运算量上也有显著提高.未来还将尝试用拟合技术处理多分量 LFM 信号的检测问题.

参考文献:

[1] BOASHASH B. Estimating and interpreting the in-

stantaneous frequency of a signal[J]. Proc. IEEE, 1992, 80(4): 519-569.

- [2] DJURIC P M, KAY S M. Parameter estimation of chirp signal[J]. IEEE Trans on ASSP, 1990, 38(12): 2118-2126.
- [3] RAO P, TAYLOR F J. Estimation of instantaneous frequency using the discrete wigner distribution[J]. Electronics Letters 1990, 26(4): 246-248.
- [4] PORTNOFF M R, Time-frequency representation of digital signals and systems based on short-time fourier analysis[J]. IEEE transactions on acoustics, speech, and Signal Processing, 1980, 28(1): 55-69.
- [5] TAO Ran, DENG Bing, WANG Yue. Research progress of the fractional Fourier transform in signal processing[J]. Science in China: Series F Information Sciences, 2006, 49(1): 1-25.
- [6] QI Lin, TAO Ran, ZHOU Si-yong, et al. Detection and parameter estimation of multicomponent LFM signals based on the fractional Fourier transform [J]. Science in China: Series F Information Sciences, 2004, 47(2): 184-198.
- [7] 曾清红,卢德唐.基于移动最小二乘法的曲线曲面拟合[J].工程图学学报,2004,25(1):84-88.
- [8] NAMIAS V. The fractional order Fourier transform and its application in quantum mechanics[J]. Inst. Appl. Math, 1980, 25(3): 241-265.
- [9] 赵兴浩,邓兵,陶然.分数阶傅里叶变换数值计算中的量纲归一化[J].北京理工大学学报, 2005, 25(4): 360-364.

Parameter Estimation of LFM Signal Via MLS Approximation

QI Lin, ZHANG Fang, CHEN En-qing

(School of Information Engineering, Zhengzhou University, Zhengzhou 450001, China)

Abstract: To solve the problem of peak deviation estimate in the parameter estimation of Linear Frequency Modulated (LFM) signal based on the Fractional Fourier Transform (FrFT) with the method of two-dimensional search, an algorithm is proposed to approximate the projection of discrete FrFT modular detector with various orders by using moving least-squares (MLS) curve fitting method and precisely estimate the value of curve peak. Using this method, the complex two-dimensional peak searching can be simplified to a problem of one-dimensional curve fitting. Theoretical analysis and simulation results show that it can retain the high estimation accuracy and also greatly reduce the computational complexity at the same time. Moreover, it is verified that it is possible to make real-time detection for the LFM signal based on FrFT.

Key words: fractional fourier transform; moving least square method; LFM