文章编号:1671 - 6833(2010)05 - 0048 - 04

简支梁横向振动固有频率的误差分析

葛素娟，李静斌

(郑州大学 土木工程学院,河南 郑州 450001)

摘　要：采用欧拉－伯努利梁理论求解等直梁的固有频率存在一定的误差，而考虑剪切变形及转动惯量影响的铁摩辛柯梁理论求解的固有频率较为精确. 结合工程实际，在常用设计参数范围内，以矩形、圆形、薄壁圆管、工字形和箱形等工程常用典型截面的简支混凝土梁或钢梁为研究对象，计算分析了欧拉－伯努利梁理论求解横向振动固有频率的误差. 计算结果表明：矩形、圆形截面混凝土梁的第1阶频率误差均在5%以内，可满足工程需要；工字形、箱形、圆管截面钢梁的第1阶频率误差，只有在高跨比较小时方可满足5%的限值；而对于第2阶及更高阶频率，误差通常远远超过5%，即该理论不再适用.

关键词：简支梁；横向振动；固有频率；误差分析

中图分类号：TU311.3　　　**文献标识码**：A

0　引言

简支梁板桥是桥梁工程常用的桥型，特别是中部平原地区，简支梁板桥约占所建桥梁的90%以上. 大跨径简支梁板桥在车辆荷载、风荷载、地震作用等外部动力荷载的激励下，当荷载的频率与梁的自振频率比较接近时，易激发结构产生共振，因此需要求解简支梁板桥的振动频率. 在结构健康监测和损伤识别研究中，也经常会通过结构动态测试手段求得梁结构的各阶固有频率，并与其理论值进行对比，从而判断结构是否损伤[1]. 因此，梁结构横向振动固有频率的精确求解是一个基本也非常重要的问题. 简支梁板桥可简化为等截面直梁，其横向振动固有频率通常采用欧拉－伯努利梁理论的解析表达式求解，该表达式虽然形式简单，但因在理论推导中未考虑剪切变形和转动惯量对梁横向振动频率的影响，因此计算得到的固有频率值有一定的误差. 如果采用铁摩辛柯梁理论来求解，虽然计算结果较为精确，但因其解析表达式过于复杂又不便被工程设计人员所采用. 因此，对于工程实际中的各种典型截面的等直梁，在常规设计参数的范围内，采用欧拉－伯努利梁理论求解其横向振动固有频率，计算误差究竟有多大，能否满足工程设计的容许误差要求，需要进行深入研究以得出适合工程应用的结论.

1　欧拉－伯努利梁的横向振动固有频率

对于等截面直梁，取梁未变形时的轴线为 x 轴，横向振动平面内与轴线垂直的方向为 u 轴. 横向挠度为 $u=u(x,t)$. 对于等截面直梁，其抗弯刚度为常数，可用 EI 表示；梁的线密度也为常数，可用 ρA 表示，其中 ρ 为梁的质量密度，A 为梁的横截面面积. 则欧拉－伯努利梁的横向自由振动微分方程为[2]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\left(\frac{EI}{\rho A}\right)\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=0 \qquad (1)$$

采用分离变量法，可求得方程式(1)的通解为

$$u(x,t)=(C_1\sin\beta x+C_2\cos\beta x+C_3\mathrm{sh}\beta x+C_4\mathrm{ch}\beta x)(C_5\sin\omega t+C_6\cos\omega t) \qquad (2)$$

式中：ω 为横向振动频率；$\beta^4=\omega^2\rho A/(EI)$；常数 $C_1\sim C_4$ 决定于边界条件；常数 $C_5\sim C_6$ 决定于初始条件.

对于简支梁，代入梁两端的边界条件后可求得其横向自由振动的振型函数和固有频率. 若设 L 为梁长，则固有频率的解析表达式为

$$\omega_n=\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\sqrt{\frac{EI}{\rho A}},\quad n=1,2,3,\cdots \qquad (3)$$

收稿日期:2010 - 04 - 09;**修订日期**:2010 - 05 - 19

基金项目:河南省2009年度高等学校青年骨干教师资助计划

作者简介:葛素娟(1972 -),女,河南范县人,郑州大学副教授,硕士,主要从事桥梁结构分析方面的研究,E - mail:gesujuan@ zzu. edu. cn.

2 铁摩辛柯梁的横向振动固有频率

在分析梁的横向振动时,计入剪切变形和转动惯量影响的梁称为铁摩辛柯梁. 如忽略弯矩与剪力之间的相互影响,则铁摩辛柯等截面直梁的横向自由振动微分方程为[3]

$$\rho A\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+EI\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}-\rho Ar^2\left(1+\frac{E}{\kappa G}\right)\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial t^2}+\frac{\rho^2Ar^2}{\kappa G}\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}=0 \tag{4}$$

式中:G 为剪切弹性模量;κ 为剪应力不均匀系数;$r=\sqrt{I/A}$为梁横截面回转半径,其它符号含义同式(1). 比较式(4)与式(1),前2项完全相同,后2项即为考虑剪切变形和转动惯量的影响项.

对于简支梁,仍可用正弦函数来表达其横向自由振动的振型. 其固有频率的解析式为

$$\omega_n'=\frac{\omega_n}{\sqrt{1+\left(\frac{n\pi r}{L}\right)^2\left(1+\frac{E}{\kappa G}\right)}},\quad n=1,2,3,\cdots \tag{5}$$

式中:ω_n 为不考虑剪切变形和转动惯量影响的欧拉-伯努利梁的横向振动固有频率,即式(3).

由式(5)可知,铁摩辛柯梁理论比欧拉-伯努利梁理论求解得到的固有频率低. 即当计入剪切变形和转动惯量后,梁固有频率要降低,降低的程度同梁长细比 L/r、梁横截面剪应力不均匀系数 κ、梁材料的弹性模量与剪切弹性模量之比 E/G有关,且高阶频率比低阶频率降低的幅度更大. 若设(5)式为等直梁横向振动固有频率的精确解,则欧拉-伯努利梁横向振动各阶频率的误差为

$$\Delta=\frac{\omega_n-\omega_n'}{\omega_n'}=\sqrt{1+\left(\frac{n\pi r}{L}\right)^2\left(1+\frac{E}{\kappa G}\right)}-1,\quad n=1,2,3,\cdots \tag{6}$$

3 典型截面等直梁固有频率误差计算

工程应用中,典型的梁截面有矩形、圆形、薄壁圆管、工字形、箱形等,常用材料有混凝土及钢材. 选择上述5种典型截面等直梁,计算参数为:

(1)矩形截面混凝土梁:$E/G\approx2.5$;剪应力不均匀系数 $\kappa=5/6$;回转半径 $r=\sqrt{I/A}=h\sqrt{3}/6$;长细比 $L/r=2\sqrt{3}L/h$;h 为矩形截面高.

(2)圆形截面混凝土梁:$E/G\approx2.5$;$\kappa=9/10$;$r=D/4$;长细比 $L/r=4L/D$;D 为圆截面直径.

(3)薄壁圆管截面钢梁:$E/G\approx2.6$;设圆管壁厚 t 远小于圆管外径 D;则 $\kappa\approx1/2$,$r\approx\sqrt{2}D/4$,长细比 $L/r=2\sqrt{2}L/D$.

(4)工字形截面钢梁:$E/G\approx2.6$;$\kappa=A_{web}/A$,即腹板面积与全截面面积之比[4]. 考虑常规设计,设工字形截面的 $\kappa\approx2/5$,$r\approx0.43h$[5]. 则长细比 $L/r\approx2.33L/h$,h 为工字形截面高.

(5)箱形截面钢梁:$E/G\approx2.6$;$\kappa=A_{web}/A$,即腹板面积与全截面面积之比[4]. 考虑常规设计,设箱形截面的 $\kappa\approx4/7$,$r\approx0.40h$[5]. 则长细比 $L/r\approx2.5L/h$,h 为箱形截面高.

在工程设计中,对梁而言,高跨比 h/L(或 D/L)比长细比 L/r 更为直观. 因此,下面的误差计算中用高跨比代替长细比,分别考虑高跨比为1/6,1/8,1/10,1/12,1/15及1/18的不同值. 将上述5种典型截面等直梁的计算参数代入式(6)后,计算得到的固有频率误差结果列于表1.

表1 典型截面等直梁固有频率误差值

Tab.1 Natural frequency error value of typical section straight beams %

类型	频率阶次	高跨比 h/L 或 D/L 1/6	1/8	1/10	1/12	1/15	1/18
矩形砼梁	1	4.47	2.54	1.63	1.14	0.73	0.51
	2	16.86	9.80	6.38	4.47	2.88	2.01
	3	35.00	20.94	13.85	9.80	6.38	4.47
	4	56.91	35.00	23.55	16.86	11.08	7.82
	5	81.24	51.17	35.00	25.35	16.86	11.98
圆形砼梁	1	3.19	1.80	1.16	0.81	0.52	0.36
	2	12.20	7.03	4.56	3.19	2.05	1.43
	3	25.80	15.23	9.99	7.03	4.56	3.19
	4	42.68	25.80	17.17	12.20	7.97	5.60
	5	61.81	38.21	25.80	18.51	12.20	8.62
圆管钢梁	1	10.11	5.81	3.75	2.62	1.69	1.17
	2	36.01	21.58	14.28	10.11	6.58	4.62
	3	70.65	44.07	29.94	21.58	14.28	10.11
	4	109.80	70.65	49.13	36.01	24.25	17.38
	5	151.20	99.70	70.65	52.58	36.01	26.10
工字形钢梁	1	17.48	10.18	6.62	4.64	3.00	2.09
	2	58.77	36.21	24.40	17.48	11.50	8.12
	3	110.30	71.02	49.39	36.21	24.40	17.48
	4	166.10	110.30	78.60	58.77	40.47	29.46
	5	224.10	151.9	110.30	83.74	58.77	43.39
箱形钢梁	1	11.51	6.63	4.29	3.00	1.93	1.34
	2	40.49	24.41	16.21	11.51	7.51	5.27
	3	78.64	49.41	33.75	24.41	16.21	11.51
	4	121.30	78.64	54.99	40.49	27.41	19.70
	5	166.20	110.30	78.64	58.79	40.49	29.47

由表1可见:对于矩形混凝土梁,第1阶频率

的最大误差为4.47%,这说明在表中所列常用高跨比范围内,欧拉-伯努利梁理论求解的横向振动第1阶频率,误差在工程容许的5%以内,其精度可以接受.但2阶频率在高跨比为1/10时,误差为6.38%,已超出工程容许范围.随着求解频率阶次的升高,欧拉-伯努利梁理论的误差也越来越大,3阶及以上频率的误差均超过了5%的容许值.

对于圆形混凝土梁,第1阶频率的最大误差为3.19%,这说明在表中所列常用高跨比范围内,欧拉-伯努利梁理论求解的基频,其精度是可以接受的.但对于2阶频率,当高跨比为1/8时,误差为7.03%,已超出工程容许范围.

对于薄壁圆管钢梁,即使仅考虑第1阶频率,当高跨比为1/8时,误差就达到了5.81%,已超出工程容许范围.对于深梁的第1阶频率,第2阶及更高阶频率,其计算误差更加显著.

对于工字形钢梁,即使仅考虑第1阶频率,当高跨比为1/10时,误差就达到了6.62%,已超出工程容许范围.对于深梁的第1阶频率,第2阶及更高阶频率,其计算误差更加显著.

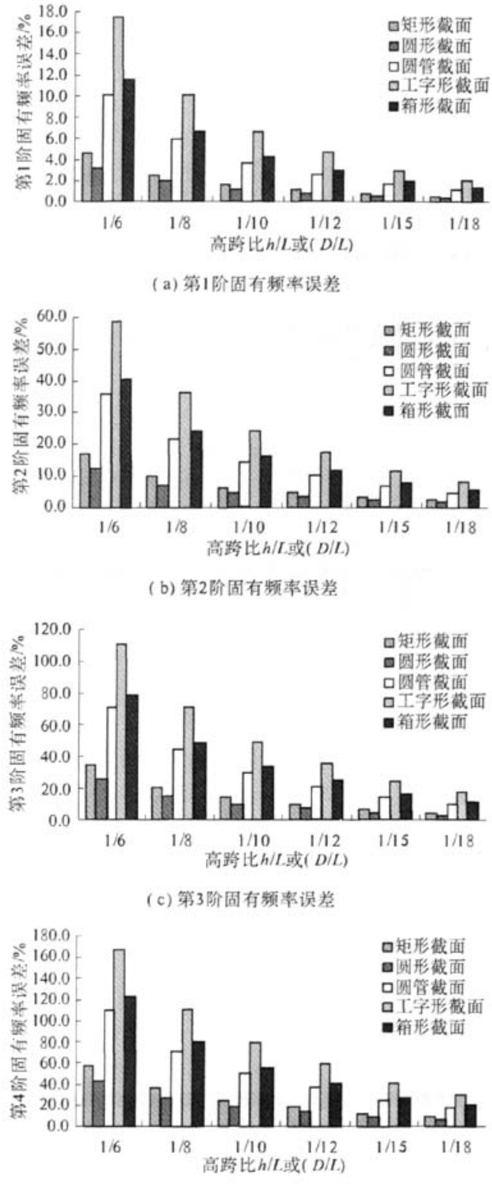
对于箱形钢梁,即使仅考虑第1阶频率,当高跨比为1/8时,误差就达到了6.63%,已超出工程容许范围.对于深梁的第1阶频率,第2阶及更高阶频率,其计算误差更加显著.

4 固有频率误差分析

为更直观地分析各种典型截面等直梁采用欧拉-伯努利梁理论求解固有频率的误差.将表1所列5种典型截面梁在各种高跨比下的前4阶频率的误差值绘于图1.

由图1可见,各种典型截面等直梁采用欧拉-伯努利梁理论求解固有频率普遍存在较大的误差,其中又以工字形截面最为显著.同一高跨比下,矩形、圆形等实腹式截面混凝土梁的计算误差相对较小,而工字形、箱形、圆管等薄壁截面钢梁的计算误差相对较大.

如以工程容许误差值5%为可接受误差的上限,则对于第1阶频率,只有高跨比≤1/6的矩形截面混凝土梁、圆形截面混凝土梁,高跨比≤1/10的箱形截面钢梁、圆管截面钢梁,以及高跨比≤1/12的工字形截面钢梁,欧拉-伯努利梁理论求解固有频率的误差可被接受.对于第2阶及更高阶的固有频率,欧拉-伯努利梁理论的计算误差就更大了.在梁的高跨比为1/6的深梁情况下,第2阶频率的最大误差为58.77%(工字形截面),远远超出了工程容许的误差范围;即使在梁的高跨比为1/18的细长梁情况下,第2阶频率的最大误差也达到了8.12%(工字形截面),这说明采用欧拉-伯努利梁理论求解简支梁的高阶频率,其计算精度通常是难以满足要求的.



(a)第1阶固有频率误差

(b)第2阶固有频率误差

(c)第3阶固有频率误差

(d)第4阶固有频率误差

图1 典型截面等直梁固有频率误差直方图

Fig.1 Histogram of natural frequency error value of typical section straight beams

5 结论

(1)采用欧拉-伯努利梁理论求解简支梁的

各阶频率,通常都具有较为显著的误差,这是因为在欧拉 - 伯努利梁理论中忽略了转动惯性的影响,因而采用该理论求解得到的横向振动固有频率比精确解高.

(2)采用铁摩辛柯梁理论求解简支梁的横向振动固有频率时考虑了剪切变形和转动惯量的影响,考虑前者使体系的柔度增大,考虑后者使体系的惯性增大,计入这两方面的因素均会使求解得到的频率值降低,因此采用该理论会使解得的横向振动固有频率更加接近于简支梁的精确解.

(3)同一高跨比下,矩形、圆形等实腹式截面混凝土梁的误差相对较小,而工字形、箱形、圆管等薄壁截面钢梁的误差相对较大. 例如当高跨比为 1/10 时:对于第 1 阶频率,矩形、圆形实腹式截面混凝土梁的误差分别为 1.63% 和 1.16%,工字形、箱形、圆管薄壁截面钢梁的误差分别为 6.62%、4.29% 和 3.75%. 这主要是由于薄壁截面钢梁同实腹式截面混凝土梁相比,剪切变形在梁的全部挠曲变形(弯曲 + 剪切)中所占的比例更大,因此剪切变形对频率的影响也就更加突出.

(4)对于矩形、圆形截面混凝土梁,欧拉 - 伯努利梁理论求解的第 1 阶频率的误差均在 5% 以内,可以满足工程容许误差的限值规定;而对于工字形、箱形、圆管截面钢梁,即使是第 1 阶频率,也只有在高跨比较小的细长梁情形下方可满足.

(5)在求解简支梁的第 2 阶以及更高阶频率的大多数情况下,误差都远远超过了 5%,此时必须采用考虑剪切变形及转动惯量影响的铁摩辛柯梁理论.

(6)笔者计算得到的各种典型截面等直梁的频率误差,实际上就是欧拉 - 伯努利梁理论近似解相对于铁摩辛柯梁理论解的升高程度,该结果可为工程人员计算简支梁固有频率选用相关理论模型时提供直观的参考.

参考文献:

[1] 孙增寿,韩建刚,任伟新. 基于曲率模态和小波变换的简支梁桥损伤识别方法[J]. 郑州大学学报:工学版, 2005,26(3): 24 - 27.

[2] CLOUGH R, PENZIEN J. 结构动力学[M]. 王光远,译. 北京:高等教育出版社, 2006:283 - 290.

[3] CHOPRA A K. 结构动力学理论及其在地震工程中的应用[M]. 谢礼立,吕大刚,译. 北京: 高等教育出版社, 2007:475 - 480.

[4] 吴鸿庆,任侠. 结构有限元分析[M]. 北京: 中国铁道出版社, 2000:183 - 186.

[5] 戴国欣. 钢结构[M]. 武汉: 武汉理工大学出版社, 2007:144 - 155.

Error Analysis of Transverse Vibration Natural Frequency of Simply Supported Beam

GE Su - juan, LI Jing - bin

(School of Civil Engineering, Zhengzhou University, Zhengzhou 450001, China)

Abstract: Using the Euler - Bernoulli beam theory to calculate the transverse vibration natural frequency of uniform cross section beam exists certain error. The solution of the Timoshenko beam theory considering the influence of shear deformation and rotational inertia can be sufficiently precise. In combination with the engineering practice, within the common scope of design parameters, the calculation error of natural vibration frequency based on the Euler - Bernoulli beam theory has been computed about the rectangular section, the circular section, the thin circular tube section, the I - shape section and the box section for simply supported concrete or steel beam. The results show that, using the Euler - Bernoulli beam theory, for the rectangular section and the circular section concrete beam, the calculation error of the first natural vibration frequency is usually less than 5%, which can meet the engineering need. For the I - shape section, the box section and the thin circular tube section steel beam, the calculation error of the first natural vibration frequency is not more than 5% only when the beam's depth - span ratio is small. And concerning the second or higher frequencies, the calculation errors are often far more than 5%, so Euler - Bernoulli beam theory does not work well.

Key words: simply supported beam; transverse vibration; natural vibration frequency; error analysis