

文章编号:1671-6833(2008)03-0039-04

基于奇异值分解的 Box-Jenkins 模型参数估计算法

郭建军, 张端金, 张中华

(郑州大学 信息工程学院, 河南 郑州 450001)

摘 要: 基于奇异值分解和递推广义增广最小二乘原理, 提出了 Box-Jenkins 模型参数估计的一种递推算法. 常规的递推广义增广最小二乘算法对舍入误差较为敏感, 会导致协方差矩阵失去正定性和对称性, 产生病态条件问题, 引起数值不稳定现象. 为了改善参数估计的性能, 利用协方差矩阵的奇异值分解技术, 推导出 Box-Jenkins 模型估计算法. 该算法辨识精度高, 收敛速度快, 数值稳定性好. 仿真表明, 随着噪信比的增大, 新算法仍然具有良好的性能.

关键词: 参数估计; 奇异值分解; 递推广义增广最小二乘法; Box-Jenkins 模型

中图分类号: N 945.14; TP 13

文献标识码: A

0 引言

对于系统辨识的一般形式 Box-Jenkins 模型, 由于包含有色噪声, 因此常规最小二乘参数估计是有偏的^[1]. 为了得到模型参数的无偏估计值, 文献[2]将辨识 CARMA 模型的 RELS 法推广到 Box-Jenkins 模型, 提出了递推广义增广最小二乘法(RGELS). 文献[3]采用 UD 分解, 得到了 Box-Jenkins 模型结构和参数的同时估计. 文献[4-5]借助于偏差补偿原理, 推导了偏差补偿最小二乘辨识法及其递推形式.

矩阵分解在系统控制与估计领域具有广泛的应用. 奇异值分解(SVD)是一种很重要的矩阵分解方法, 具有良好的数值稳定性, 且易于实现, 因而在滤波与辨识等方面受到重视^[6-9]. 文献[8]将 SVD 应用于加权最小二乘法(WLS), 提高了数值稳定性, 但该算法为批处理算法, 计算量较大. 文献[9]基于 SVD 和递推最小二乘法(RLS), 给出了 ARMA 模型参数估计方法.

笔者将辨识 ARMA 模型的 SVD 方法推广应用于 Box-Jenkins 模型. 仿真实例证明了该算法的有效性和优越性.

1 Box-Jenkins 模型描述

考虑 Box-Jenkins 模型^[1-2]:

$$A(q^{-1})y(k) = B(q^{-1})u(k) + \frac{C(q^{-1})}{D(q^{-1})}w(k) \quad (1)$$

式中:

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1 q^{-1} + \cdots + a_{n_a} q^{-n_a},$$

$$B(q^{-1}) = b_0 + b_1 q^{-1} + \cdots + b_{n_b} q^{-n_b},$$

$$C(q^{-1}) = 1 + c_1 q^{-1} + \cdots + c_{n_c} q^{-n_c},$$

$$D(q^{-1}) = 1 + d_1 q^{-1} + \cdots + d_{n_d} q^{-n_d}.$$

式中: q^{-1} 为单位滞后算子; $u(k)$ 和 $y(k)$ 表示过程的输入和含噪声的输出; $w(k)$ 为零均值的白噪声.

定义如下参数向量和数据向量:

$$\theta = [\theta_1^T \quad \theta_c^T]^T,$$

$$\theta_1 = [a_1, \cdots, a_{n_a}, b_0, \cdots, b_{n_b}]^T, \theta_c = [c_1, \cdots, c_{n_c}, d_1, \cdots, d_{n_d}]^T,$$

$$h(k) = [h_1^T(k) \quad h_c^T(k)]^T,$$

$$h_1(k) = [-y(k-1), \cdots, -y(k-n_a), u(k), \cdots, u(k-n_b)]^T,$$

$$h_c(k) = [-e(k-1), \cdots, -e(k-n_c), w(k-1), \cdots, w(k-n_d)]^T.$$

并记

$$e(k) = \frac{C(q^{-1})}{D(q^{-1})}w(k).$$

可将式(1)化成最小二乘形式:

$$y(k) = h_1^T(k)\theta_1 + e(k) \quad (2)$$

收稿日期:2008-06-06; 修订日期:2008-07-22

基金项目:河南省自然科学基金资助项目(0311011600)

作者简介:郭建军(1983-),男,河南焦作人,郑州大学硕士研究生,主要从事系统辨识与参数估计研究;通讯作者:

张端金,郑州大学教授,博士, email:djzhang@zzu.edu.cn.

$$y(k) = \mathbf{h}^T(k) \boldsymbol{\theta}_1 + w(k) \quad (3)$$

由此可得未知参数的无偏估计, $\mathbf{h}_e(k)$ 包含不可测量的噪声量 $e(k-1), \dots, e(k-n_e), w(k-1), \dots, w(k-n_d)$, 它可用相应的估计值代替, 即

$$\hat{w}(k) = y(k) - \mathbf{h}^T(k) \hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1) \quad (4)$$

$$\hat{e}(k) = y(k) - \mathbf{h}_1^T(k) \hat{\boldsymbol{\theta}}_1(k) \quad (5)$$

由式(2)和(3)可得如下递推广义增广最小二乘法(RGELS)的一般形式^[2]:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(k) = \hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1) + \mathbf{K}(k) [y(k) - \mathbf{h}^T(k) \hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1)] \quad (6)$$

$$\mathbf{K}(k) = \mathbf{P}(k-1) \mathbf{h}(k) [1 + \mathbf{h}^T(k) \mathbf{P}(k-1) \mathbf{h}(k)]^{-1} \quad (7)$$

$$\mathbf{P}(k) = [\mathbf{I} - \mathbf{K}(k) \mathbf{h}^T(k)] \mathbf{P}(k-1) \quad (8)$$

算法的初值选为:

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{\theta}}_1(0) = \varepsilon (0 \leq \varepsilon \ll 1) & \hat{\boldsymbol{\theta}}_e(0) = 0 \\ \mathbf{P}(0) = \text{diag}[\mathbf{P}_1(0) \quad \mathbf{P}_e(0)] \\ \mathbf{P}_1(0) = a^2 \mathbf{I} \quad (a \gg 1) \\ \mathbf{P}_e(0) = a^2 \mathbf{I} \quad (0 < a \leq 1) \end{cases} \quad (9)$$

由于在实际系统辨识计算中, 协方差矩阵 $\mathbf{P}(k)$ 的更新方程对舍入误差很敏感, 将导致 $\mathbf{P}(k)$ 失去正定性和对称性, 从而出现递推算法的数值稳定性问题^[10-11]. 因而在递推过程中利用矩阵的奇异值分解来代替 $\mathbf{P}(k)$ 的更新计算, 从而保证协方差矩阵 $\mathbf{P}(k)$ 的对称正定性, 提高辨识精度和算法的鲁棒性.

2 协方差矩阵的 SVD 递推更新

由式(7)和(8), 得

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(k) &= [\mathbf{I} - \mathbf{K}(k) \mathbf{h}^T(k)] \mathbf{P}(k-1) \\ &= \mathbf{P}(k-1) - \mathbf{P}(k-1) \mathbf{h}(k) [1 + \mathbf{h}^T(k) \mathbf{P}(k-1) \mathbf{h}(k)]^{-1} \mathbf{h}^T(k) \mathbf{P}(k-1) \end{aligned} \quad (10)$$

利用矩阵求逆引理:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{C} \mathbf{C}^T)^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1} \mathbf{C} (\mathbf{I} + \mathbf{C}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^T \mathbf{A}^{-1} \quad (11)$$

则式(10)可化为:

$$\mathbf{P}^{-1}(k) = \mathbf{P}^{-1}(k-1) + \mathbf{h}(k) \mathbf{h}^T(k) \quad (12)$$

对协方差矩阵 $\mathbf{P}(k)$ 、 $\mathbf{P}(k-1)$ 进行奇异值分解^[12], 可得:

$$\mathbf{P}(k) = \mathbf{U}_p(k) \mathbf{D}_p^2(k) \mathbf{U}_p^T(k) \quad (13)$$

$$\mathbf{P}(k-1) = \mathbf{U}_p(k-1) \mathbf{D}_p^2(k-1) \mathbf{U}_p^T(k-1) \quad (14)$$

则式(12)可变为

$$\begin{aligned} &[\mathbf{U}_p(k) \mathbf{D}_p^2(k) \mathbf{U}_p^T(k)]^{-1} \\ &= [\mathbf{U}_p(k-1) \mathbf{D}_p^2(k-1) \mathbf{U}_p^T(k-1)]^{-1} + \mathbf{h}(k) \mathbf{h}^T(k) \\ &= [\mathbf{U}_p^T(k-1)]^{-1} [\mathbf{D}_p^{-1}(k-1) + \mathbf{U}_p^T(k-1) \mathbf{h}(k) \end{aligned}$$

$$\mathbf{h}^T(k) \mathbf{U}_p(k-1)] [\mathbf{U}_p(k-1)]^{-1} \quad (15)$$

构造矩阵

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}^T(k) \mathbf{U}_p(k-1) \\ \mathbf{D}_p^{-1}(k-1) \end{bmatrix} \quad (16)$$

对上式进行奇异值分解, 得

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \begin{bmatrix} \mathbf{h}^T(k) \mathbf{U}_p(k-1) \\ \mathbf{D}_p^{-1}(k-1) \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{U}_x(k-1) \begin{bmatrix} \mathbf{D}_x(k-1) \\ 0 \end{bmatrix} [\mathbf{V}_x(k-1)]^T \end{aligned} \quad (17)$$

则

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^T \mathbf{X} &= \mathbf{D}_p^{-1}(k-1) + \mathbf{U}_p^T(k-1) \mathbf{h}(k) \mathbf{h}^T(k) \mathbf{U}_p(k-1) \\ &= \mathbf{V}_x(k-1) [\mathbf{D}_x(k-1)]^2 [\mathbf{V}_x(k-1)]^T \end{aligned} \quad (18)$$

将上式代入式(15), 得

$$\begin{aligned} &[\mathbf{U}_p(k) \mathbf{D}_p^2(k) \mathbf{U}_p^T(k)]^{-1} \\ &= [\mathbf{U}_p^T(k)]^{-1} \mathbf{D}_p^{-2}(k) \mathbf{U}_p^{-1}(k) \\ &= [\mathbf{U}_p(k-1) \mathbf{V}_x(k-1)]^T [\mathbf{D}_x(k-1)]^2 \cdot \\ &\quad [\mathbf{U}_p(k-1) \mathbf{V}_x(k-1)]^{-1} \end{aligned} \quad (19)$$

由上式可得

$$\mathbf{U}_p(k) = \mathbf{U}_p(k-1) \mathbf{V}_x(k-1) \quad (20)$$

$$\mathbf{D}_p(k) = [\mathbf{D}_x(k-1)]^{-1} \quad (21)$$

以上完成了协方差矩阵 $\mathbf{P}(k)$ 的更新, 由 $\mathbf{U}_p(k)$ 和 $\mathbf{D}_p(k)$ 的更新代替协方差矩阵 $\mathbf{P}(k)$ 的更新, 从而避免递推广义增广最小二乘法中协方差矩阵 $\mathbf{P}(k)$ 更新时失去对称正定性的问题, 提高数值稳定性和辨识精度.

则增益矩阵可表示为

$$\mathbf{K}(k) = \mathbf{U}_p(k) \mathbf{D}_p^2(k) \mathbf{U}_p^T(k) \mathbf{h}(k) \quad (22)$$

即直接由上述结果经简单计算得到.

综上, 可得递推辨识算法如下:

第一步, 由式(14)对 $\mathbf{P}(k-1)$ 进行奇异值分解;

第二步, 按照式(16)构造矩阵 \mathbf{X} ;

第三步, 根据式(17)对矩阵 \mathbf{X} 进行奇异值分解, 求出 $\mathbf{D}_x(k-1)$, $\mathbf{V}_x(k-1)$;

第四步, 利用式(20)和(21)更新 $\mathbf{U}_p(k)$, $\mathbf{D}_p(k)$;

第五步, 由式(22)计算增益矩阵 $\mathbf{K}(k)$;

第六步, 按照式(6)更新参数 $\hat{\boldsymbol{\theta}}(k)$;

第七步, 把 $\mathbf{U}_p(k)$, $\mathbf{D}_p(k)$ 作为 $\mathbf{U}_p(k-1)$, $\mathbf{D}_p(k-1)$, 返回第二步, 循环递推.

3 仿真结果

考虑 Box-Jenkins 模型描述的仿真对象

$$\begin{aligned} A(q^{-1}) &= 1 + a_1q^{-1} + a_2q^{-2} + a_3q^{-3} \\ &= 1 - 2.851q^{-1} + 2.717q^{-2} - 0.865q^{-3}, \\ B(q^{-1}) &= b_0 + b_1q^{-1} + b_2q^{-2} = 1 + q^{-1} + q^{-2}, \\ C(q^{-1}) &= 1 + c_1q^{-1} + c_2q^{-2} = 1 + 0.7q^{-1} + 0.2q^{-2}, \\ D(q^{-1}) &= 1 + d_1q^{-1} + d_2q^{-2} = 1 + 0.3q^{-1} + 0.02q^{-2}. \end{aligned}$$

式中:输入 $u(k)$ 采用幅值为 ± 1 的伪随机二进制序 (PRBS); $w(k)$ 采用均值为 0、方差为 σ^2 的正态白噪声,改变 σ^2 可以控制系统的噪声比 δ_n . 系统的噪声比定义为输出中 $v(k)$ 的方差 $\text{var}[v(k)] = \sigma_v^2$ 与无噪输出 $x(k)$ 的方差 $\text{var}[x(k)] = \sigma_x^2$ 之比的平方根^[13],用数学关系式表示为

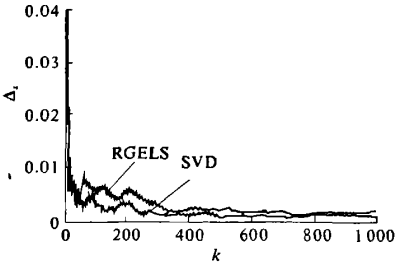
$$\delta_n = \sqrt{\frac{\text{var}[v(k)]}{\text{var}[x(k)]}} \times 100\% = \frac{\sigma_v}{\sigma_x} \times 100\%,$$

$$x(k) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u(k), v(k) = \frac{1}{A(q^{-1})}e(k).$$

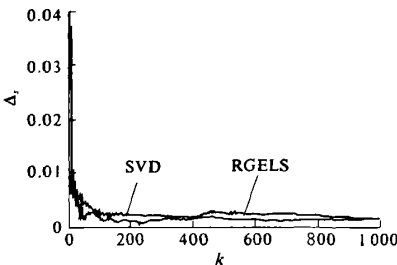
则当 $\sigma^2 = 0.1^2$ 时,对应的系统噪声比为 $\delta_n = 120.13\%$;当 $\sigma^2 = 0.05^2$ 时,对应的系统噪声比为 $\delta_n = 79.89\%$. 该系统的 SVD、RGELS 估计及其误差如图 1 和表 1 所示,其中数据长度为 1 000, k 为参数估计步数, $\Delta_i = \|\hat{\theta}_i(k) - \theta_i\| / \|\theta_i\|$ 为系统模型参数估计误差.

从图 1 和表 1 的仿真结果可以看出:对于 Box-Jenkins 模型, SVD 算法的辨识精度高,收敛速度快,跟踪曲线平稳,优于 RGELS,尤其在噪声

比 δ_n 较大的输入情况下,尽管 SVD 算法每步递推计算都要进行奇异值分解,需要稍大的计算量,但是在一般系统辨识问题中,辨识阶次不高,计算量增加不多,且该算法易于并行实现,亦可弥补其不足.



(a) 方差 $\sigma^2 = 0.1^2$



(b) 方差 $\sigma^2 = 0.05^2$

图 1 参数估计误差 Δ_i

Fig. 1 The estimation errors Δ_i

表 1 参数估计结果 ($\sigma^2 = 0.05^2$)
Tab. 1 Parameter estimation results ($\sigma^2 = 0.05^2$)

算法	k	a_1	a_2	a_3	b_0	b_1	b_2	$\Delta_i/\%$
SVD	100	-2.849 58	2.713 46	-0.862 90	1.004 12	1.015 68	1.021 82	0.627 38
	200	-2.847 20	2.709 00	-0.860 76	1.001 14	1.011 20	1.003 09	0.347 61
	300	-2.848 19	2.710 41	-0.861 21	0.999 10	1.007 05	1.006 18	0.283 15
	500	-2.850 23	2.715 04	-0.863 78	1.000 87	1.006 43	1.004 37	0.186 55
	1 000	-2.850 92	2.716 96	-0.865 01	0.999 87	1.003 14	1.006 12	0.156 88
RGELS	100	-2.848 17	2.710 53	-0.861 20	1.009 07	1.018 00	1.027 69	0.801 49
	200	-2.851 14	2.716 56	-0.864 32	1.011 17	1.015 63	1.014 79	0.552 80
	300	-2.851 09	2.717 15	-0.865 00	1.009 93	1.012 02	1.009 95	0.421 61
	500	-2.851 20	2.716 98	-0.864 77	1.008 23	1.009 90	1.010 49	0.378 43
	1 000	-2.853 03	2.720 13	-0.866 09	1.007 81	1.012 91	1.003 63	0.364 72
真值		-2.851	2.717	-0.865	1	1	1	

4 结束语

利用矩阵的奇异值分解,给出了 Box-Jenkins 模型参数估计的递推算法,该算法无论在辨识精度、收敛速度还是在数值稳定性方面都能得到较好的效果.

参考文献:

[1] LJUNG L. System Identification: Theory for the User

[M]. 2nd edition. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1999.

[2] 丁 锋. 辨识 Box-Jenkins 模型参数的递推广义增广最小二乘法[J]. 控制与决策, 1990, 5(6): 53-56.

[3] 张端金, 张文英, 吴 捷. Box-Jenkins 模型阶次与参数同时估计的递推算法[J]. 电机与控制学报, 2003, 7(2): 157-160.

[4] 杨慧中, 张 勇. Box-Jenkins 模型偏差补偿方法与

- 其他辨识方法的比较[J]. 控制理论与应用, 2007, 24(2): 215-222.
- [5] 张勇, 杨惠中. 有色噪声干扰输出误差系统的偏差补偿递推最小二乘辨识方法[J]. 自动化学报, 2007, 33(10): 1053-1060.
- [6] CHU D S, CHEN M, LI L. A SVD-based optimal filtering for multi-channel system with correlated multiplicative noises[C]// Proc the 5th World Congress on Intelligent Control and Automation, Hangzhou, China. Piscataway: IEEE Press, 2004: 1567-1570.
- [7] ZHANG Y M, DAI G Z, ZHANG H C, et al. A SVD-based extended Kalman filter and applications to aircraft flight state and parameter estimation[C]// Proc the 1994 American Control Conference, Baltimore, USA. Piscataway: IEEE Press, 1994: 1809-1813.
- [8] MOORE W C, FRANKLIN G F. An SVD-based identification algorithm for self-tuning control[C]// Proc the 29th IEEE Conference on Decision and Control. Honolulu, USA. Piscataway: IEEE Press, 1990: 3249-3250.
- [9] 张友民, 李庆国, 戴冠中, 等. 基于奇异值分解的递推辨识方法[J]. 控制理论与应用, 1995, 12(2): 224-229.
- [10] LJUNG L, SODERSTROM T. Theory and Practice of Recursive Identification[M]. Cambridge, Mass: MIT Press, 1983.
- [11] ASTROM K J, WITTENMARK B. Adaptive Control[M]. 2nd edition. Boston, Mass: Addison-Wesley Publishing Company, 1995.
- [12] GOUB G H, VAN LOAN C F. Matrix Computations[M]. 3rd edition. Baltimore, Maryland: The Johns Hopkins University Press, 1996.
- [13] 丁锋, 杨家本. 系统噪信比的计算[J]. 清华大学学报:自然科学版, 1998, 38(9): 107-110.

Parameter Estimation Algorithm of Box-Jenkins Model Based on Singular Value Decomposition

GUO Jian-jun, ZHANG Duan-jin, ZHANG Zhong-hua

(School of Information Engineering, Zhengzhou University, Zhengzhou 450001, China)

Abstract: Based on singular value decomposition (SVD) and recursive generalized extended least squares (RGELS), a new recursive algorithm of parameter estimation for Box-Jenkins model is proposed. The traditional RGELS algorithm is sensitive to the calculation error of the covariance matrix, and is easy to cause the ill-conditioned problems. In order to improve the parameter estimation performance, SVD based Box-Jenkins model estimation algorithm is derived. Compared with the RGELS algorithm, the proposed method can obtain higher estimation accuracy, faster convergence rate, and better numerical stability. Simulation results show that with the increase of the noise signal ratio, the algorithm still has good estimation performance.

Key words: parameter estimation; singular value decomposition; recursive generalized extended least squares; Box-Jenkins model