文章编号:1671－6833(2005)02－0095－03

超导体的电磁波解

胥爱军[1], 王小珍[2]

(1.郑州大学物理工程学院,河南 郑州 450052; 2.郑州师范高等专科学校物理系,河南 郑州 550044)

摘　要: 在广义协变的伦敦方程基础上讨论了超导体的电动力学特性,并由此建立起超导体的电磁波动方程.通过对该方程的进一步分析后我们发现,在超导体中不仅存在电磁波动解,而且还存在类似于常规导体的电磁波趋肤效应,其趋肤尺度明显地依赖于电磁波的波动频率.具体地说就是,当电磁波频率 $\omega \sim \sqrt{\alpha/\varepsilon_0}$ 时,超导体将表现出与常规导体相似的趋肤特性;在高频情况下,两者的这种趋肤性质则会表现出比较显著的差别.

关键词: 超导体; 伦敦方程; 电磁场方程; 趋肤效应

中图分类号: O 511.2　　**文献标识码:** A

0　引言

为了解释超导体的电磁特性,伦敦曾唯象地提出超导电流与电磁矢量势的线性假设,即 $\boldsymbol{J}_s = \alpha\boldsymbol{A}$,其中参数 $\alpha = n_s e_s^2/m_s$, e_s, n_s 和 m_s 分别代表超导电子的电荷、密度以及质量.依据这一假设,伦敦成功地得到了一组有关超导体的电磁学方程[1]

$$\begin{cases} \alpha\boldsymbol{E} = \dfrac{\partial \boldsymbol{J}_s}{\partial t} \\ \alpha = -\nabla\times\boldsymbol{J}_s \end{cases} \tag{1}$$

该方程又被称为伦敦方程,它与麦克斯韦(Maxwell)方程

$$\begin{cases} \nabla\times\boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \nabla\cdot\boldsymbol{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \nabla\times\boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{J} + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}, \nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0 \end{cases} \tag{2}$$

一起,共同描述了超导体的电动力学行为.金斯勃格(Ginzburg)和朗道(Landau)随后发展了伦敦理论[2];他们强调,在超导体内部应该同时存在正常电流 $\boldsymbol{J}_n$ 与超导电流 $\boldsymbol{J}_s$(即总电流 $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}_n + \boldsymbol{J}_s$),其中正常电流满足欧姆(Ohm)定律:$\boldsymbol{J}_n = \sigma\boldsymbol{E}$,并与超导电流的变化成线性关系:$\boldsymbol{J}_n = (\sigma/\alpha)\boldsymbol{J}_s$ σ 为电导率.显而易见,当电流与场不随时间发生变化时,超导体内则只会存在超导电流[3,4].

值得指出的是,由于将超导电子视为经典粒子,伦敦理论本身并不协变.然而,如果能够将原有的伦敦假设加以推广,则伦敦方程便可以自然地获得相对论协变性.本文作者的目的就是在这种协变的伦敦理论基础上,对超导体的电磁波解进行讨论.

1　协变的伦敦方程

将伦敦假设 $\boldsymbol{J}_s = -\alpha\boldsymbol{A}$ 推广为四维协变形式 $J_{s\mu} = -\alpha A_\mu$,其实质在于认可四维超导电流 $J_{s\mu} = (\boldsymbol{J}_s, ic\rho_s)$ 与四维矢量势 $A_\mu = (\boldsymbol{A}, i\phi/c)$ 的对应关系.利用这一关系,可以直接得到推广的伦敦方程

$$\begin{cases} \alpha\boldsymbol{E} = \dfrac{\partial \boldsymbol{J}_s}{\partial t} + c^2\nabla\rho_s \\ \alpha\boldsymbol{B} = -\nabla\times\boldsymbol{J}_s \end{cases} \tag{3}$$

和相应的达朗贝尔(d'Alembert)形式

$$\begin{cases} \nabla^2\boldsymbol{J}_s - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \boldsymbol{J}_s}{\partial t^2} = \mu_0\alpha\boldsymbol{J} \\ \nabla^2\rho_s - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \rho_s}{\partial t^2} = \mu_0\alpha\rho \end{cases} \tag{4}$$

该方程反映了电流在超导体中的变化行为,具有明显的相对论协变性.

值得注意的是,金斯勃格－朗道关系 $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}_n + \boldsymbol{J}_s$ 和 $\boldsymbol{J}_n = (\sigma/\alpha)\boldsymbol{J}_s$ 可以进一步推广成为四维形式

$$\begin{cases} J_{n\mu} = (\sigma/\alpha)J_{s\mu} \\ J_\mu = J_{n\mu} + J_{s\mu} \end{cases} \tag{5}$$

收稿日期: 2005－01－30; **修订日期:** 2005－03－05

基金项目: 河南省教育厅自然科学基金资助项目(20011400017);河南省青年骨干教师基金资助项目

作者简介: 胥爱军(1967－),男,河南省许昌市人,郑州大学院讲师,主要从事物理教研工作.

这些关系能够帮助我们将式(4)改写成

$$\begin{cases}\nabla^2\boldsymbol{J}_s-\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\boldsymbol{J}_s}{\partial t^2}=\mu_o\alpha\boldsymbol{J}_s+\mu_o\sigma\dfrac{\partial\boldsymbol{J}_s}{\partial t}\\ \nabla^2\rho_s-\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\rho_s}{\partial t^2}=\mu_o\alpha\rho+\mu_o\sigma\dfrac{\partial\rho_s}{\partial t}\end{cases}\tag{6}$$

在稳定条件下,式(6)将变成泊松(Poisson)形式

$$\begin{cases}\nabla^2\boldsymbol{J}_s=\mu_o\alpha\boldsymbol{J}_s\\ \nabla^2\rho_s=\mu_o\alpha\rho_s\end{cases}\tag{7}$$

它们拥有如下的衰减解

$$\begin{cases}\boldsymbol{J}_s=\boldsymbol{J}_{so}\exp(-x/d)\\ \rho_s=\rho_{so}\exp(-x/d)\end{cases}\tag{8}$$

其中 $d=1/\sqrt{\mu_o\alpha}$,为超导电流在超导中的特征衰减尺度.方程(8)的第一式反映了超导电流的趋肤效应;而第二式则给出了参与流动的超导电子密度对深入尺度的依赖性.这样,超导体的电磁学性质完全可以在广义伦敦方程的基础上得到说明.

2 电磁场方程

为了给出有关超导体底电磁场 $\boldsymbol{E}$,$\boldsymbol{B}$ 的波动方程[5],我们分别用时间微商算子($\partial/\partial t$)和旋度算子($\nabla\times$)作用于方程式(6)的第一式,用梯度算子(∇)作用于第二式 并通过式(3)得到

$$\begin{cases}\nabla^2\boldsymbol{E}-\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}=\mu_o\alpha\boldsymbol{E}+\mu_o\sigma\dfrac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\\ \nabla^2\boldsymbol{B}-\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\boldsymbol{B}}{\partial t^2}=\mu_o\alpha\boldsymbol{B}+\mu_o\sigma\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\end{cases}\tag{9}$$

容易验证,电磁场方程(9)存在波动解

$$\begin{cases}\boldsymbol{E}(x,t)=\boldsymbol{E}_o\exp[\mathrm{i}(kx-\varphi)]\\ \boldsymbol{B}(x,t)=\boldsymbol{B}_o\exp[\mathrm{i}(kx-\varphi)]\end{cases}\tag{10}$$

这里,ω 代表波动频率,复波数 k 满足 $k^2=(\omega^2/c^2-\mu_o\alpha)+\mathrm{i}\mu_o\sigma\omega$,并且可以表达成为

$$k=k_++ik_-\tag{11}$$

其中,

$$k_\pm=\begin{cases}\dfrac{\omega}{\sqrt{2}c}\left\{\sqrt{1+\dfrac{\sigma^2\omega^2}{\varepsilon_o^2\omega^4}}\mp1\right\}^{1/2},\ \omega=\sqrt{\dfrac{\alpha}{\varepsilon_o}-\omega^2},\ \omega\leqslant\sqrt{\dfrac{\alpha}{\varepsilon_o}}\\ \dfrac{\omega}{\sqrt{2}c}\left\{\sqrt{1+\dfrac{\sigma^2\omega^2}{\varepsilon_o^2\omega^4}}\pm1\right\}^{1/2},\ \omega=\sqrt{\omega^2-\dfrac{\alpha}{\varepsilon_o}},\ \omega\leqslant\sqrt{\dfrac{\alpha}{\varepsilon_o}}\end{cases}\tag{12}$$

由此可以看出,波数 k 的虚部 k_- 应该体现着电磁场在超导体中的衰减

$$\begin{cases}\boldsymbol{E}(x,t)\ \boldsymbol{R}_o\exp(-k_-x)\exp[\mathrm{i}(k_+x-\varphi)]\\ \boldsymbol{B}(x,t)\ \boldsymbol{B}_o\exp(-k_-x)\exp[\mathrm{i}(k_+x-\varphi)]\end{cases}\tag{13}$$

其特征衰减尺度 $l=1/k_-$ 被称为趋肤效应深度,它表征着电磁波能够深入超导体内的尺度.而作为波数的实部 k_+ 则自然地决定了电磁波在超导体内传播的波长 λ、波度 V 以及相应的折射率 n:

$$\begin{cases}\lambda=\dfrac{2\pi}{k_+},\\ V=\dfrac{\omega}{k_+},\\ n=\dfrac{ck_+}{\omega}.\end{cases}\tag{14}$$

接下来,让我们首先考虑所谓的"假"超导体(对应着 $\omega\leqslant\sqrt{\alpha/\varepsilon}$)情况.当 $\sigma\omega/\varepsilon_o\omega^2\ll1$ 时,可以得到,

$$\begin{cases}k_+\cong\dfrac{\sigma\omega}{2\omega}\sqrt{\dfrac{\mu_o}{\varepsilon_o}},\\ k_-\cong\dfrac{\omega}{c}\end{cases}\tag{15}$$

从式(15)中容易发现,在极低频($\omega\sim0$)情况下,$k_+\sim\sigma\omega\sqrt{\mu_o}/(2\sqrt{\alpha}$;而此时(14)式所给出的各参量则将趋于如下形式

$$\lambda\to\infty,\quad V\to\frac{2}{\sigma}\sqrt{\frac{\alpha}{\mu}},\quad n\to\frac{\sigma}{2\sqrt{\alpha\varepsilon}}\tag{16}$$

相应地,趋肤效应尺度 $l=1/k_-\to d$,这一结果与式(8)一致.如果 $\omega\sim\sqrt{\alpha/\varepsilon}$,即 $\omega\sim0$,波数的实部与虚部将趋于相等,即

$$k_+\cong k_-\cong\sqrt{\frac{\sigma\mu_o\omega}{2}}\tag{17}$$

这意味着,在 $\omega\sim\sqrt{\alpha/\varepsilon_o}$ 时,超导体将表现出与常规导体相类似的特性,其趋肤效应尺度 l($1/k_-\propto1/\sqrt{\omega}$)会随着频率的增加而减小.

其次,我们考虑在所谓的"真"超导体(对应着 $\omega>\sqrt{\alpha/\varepsilon_o}$)情况下电磁波的高频行为.当 $\omega\gg\sqrt{\alpha/\varepsilon_o}$ 时,有,$\omega\cong\omega$,$\sigma\ll\varepsilon_o\omega$,进而得到

$$\begin{cases}k_+\cong\dfrac{\omega}{c},\\ k_-\cong\dfrac{\sigma}{2c\varepsilon_o}\end{cases}\tag{18}$$

式(18)表明,在超高频($\omega\to\infty$)条件下,λ、V 和 n 的取值则分别为

$$\lambda\to\frac{2\pi c}{\omega},\ V\to c,\ n\to1\tag{19}$$

而此时的趋肤尺度则趋近于常数,即 $l=1/k_-\to2c\varepsilon_o/\sigma$.由此可以看出,高频下的超导体将表现出与常规导体不同的性质特征.需要注意的是,我们这里所给出的有关"假"、"真"超导体的界定其实并没有绝对的意义,而所谓的"假"与"真"无非是体现着超导体在低频与高频条件下所表现出的不

同的电磁特征.

4 结论

在推广的协变伦敦方程与麦克斯韦方程基础上,我们得到了有关超导体的电磁波动方程,并进而给出了相应的电磁波动解.通过对该解的分析发现,超导体同样存在电磁趋肤效应,其趋肤深度明显地依赖于电磁波的波动频率.在频率接近 $\sqrt{\alpha/\varepsilon_0}$ 时,超导体将表现出与常规导体相类似的特性;在高频条件下,超导体会与常规导体表现出明显的差别.如果考虑频率 $\omega\to 0$ 时的情况,则超导体将自动恢复到伦敦理论的结果.

参考文献:

[1] TINKHAM M. Introduction to Superconductivity [M]. New York: McGraw, 1996. 124～132.

[2] KIM C K, RAKHIMOV A, YEE J H. Post gaussian effective potential in the ginzburg landau theory of superconductivity[J]. Eur Phys J B, 2004, 39: 301～308.

[3] KUSUMORI T, MUTO H. Superconductivity[J]. Physical C, 2001, 351: 221～286.

[4] ANNETT J F. Superconductivity, Superfluids and Condensates[M]. Oxford: Oxford University Press, 2004. 166～189.

[5] MUKHOPADHYAY P. Electromagnetic Theory and Applications[M]. Delhi: New Delhi Tata Mcgraw-Hill, 1993. 45～56.

Electromagnetic Wave in Superconductor

XU Ai-jun[1], WANG Xiao-zhen[2]

(1. School of Physical Engineering, Zhengzhou University, Zhengzhou 450052, China; 2. Department of Physics, Zhengzhou Normal College, Zhengzhou 550044, China)

Abstract: Based on the generalized London theory, this paper discusses the electrodynamics of superconductor, and further establishes the corresponding electromagnetic wave equation. Through the analysis of this wave equation, we find there exists the skin effect in the superconductor, of which the skin depth is dependent on the wave frequency. It shows that, when the wave frequency $\omega\sim\sqrt{\alpha/\varepsilon_0}$, the superconductors appear the similar skin properties to the usual conductors. However in the case of high frequency, the thing is quite different.

Key words: superconductor; London equation; electromagnetic field; skin effect