

文章编号:1671-6833(2005)02-0072-04

钢筋混凝土平面问题的含梁组合单元模型

王家林^{1,2}, 陈山林²

(1. 重庆交通学院土木建筑学院, 重庆 400074; 2. 重庆大学土木工程学院, 重庆 400044)

摘 要: 将混凝土内的钢筋模拟为能承受轴向力、抵抗弯曲变形的梁单元, 在梁元节点位移服从平面单元位移场的基本假设下, 应用虚功原理建立了单元内任意位置含钢筋梁元的钢筋混凝土平面组合单元模型. 通过与现有钢筋混凝土平面单元模型比较, 本模型更准确全面地反映了钢筋的力学性能, 钢筋在平面单元内的位置不再有任何限制, 混凝土和钢筋可以各自独立地进行网格划分, 为单元离散提供了便利.

关键词: 钢筋混凝土; 有限元; 梁单元; 平面单元模型

中图分类号: TU 131.1 **文献标识码:** A

0 引言

在钢筋混凝土结构的有限元分析中, 正确反映钢筋的布置及对混凝土整体结构的影响是单元模型需要解决的问题. 单元模型能否反映结构的实际力学性能, 对计算结果起着至关重要的作用, 模型离散的复杂程度也直接影响计算工作量和计算效率. 目前, 钢筋混凝土的单元模型有整体式、分离式和组合式 3 种^[1~3].

整体式模型是将钢筋均匀弥散于整个单元中, 通过配筋率来计算钢筋对混凝土的增强效果. 若只需要在线性范围内求解外荷载下的宏观反应(如结构的总体位移和应力分布), 且钢筋布置规则, 整体式模型是比较简单适用的选择; 对于钢筋稀疏、复杂分布的混凝土结构, 各方向的配筋率本身就难以计算, 应用整体式模型会出现困难.

分离式是最早用于钢筋混凝土结构有限元分析的方法, 该模型将钢筋和混凝土作为不同的单元处理, 其优点是概念简单, 可以在钢筋和混凝土节点之间插入联结单元来模拟钢筋和混凝土之间的粘结和滑移; 缺点是要求钢筋单元和混凝土单元的节点具有相同的几何位置. 这给混凝土的单元离散增加了困难, 导致建模工作量很大.

组合式模型将钢筋视为独立的单元植入混凝土单元的内部, 两种单元的组合基于位移协调条件: 钢筋单元的节点位移服从混凝土单元的位移

场. 组合式模型可比较准确地反映钢筋的位置分布, 结合了整体式模型离散简单和分离式模型能准确考虑钢筋分布情况的特点.

在钢筋混凝土的平面问题中, 目前的单元模型^[4]考察了一根或多根钢筋贯穿四边形单元对边布置的情况如图 1 所示.

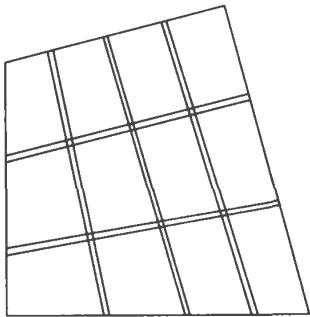


图 1 含多根纵横钢筋的四边形单元模型
Fig. 1 Quadrangle element models with longitudinal and transverse bars

对于钢筋在四边形单元内任意布置的问题, 没有相应的单元模型, 一般还是通过在离散四边形单元时使得钢筋单元贯穿四边形单元对边, 转化为目前单元模型能模拟的问题, 这样做给四边形单元的离散带来了复杂性, 会增加建模的工作量. 另外, 钢筋单元通常采用只有轴向抗拉压能力的杆单元模拟, 忽略了钢筋对于混凝土结构的横

向加强作用. 鉴于梁单元是比杆单元更一般的单元, 除了具有杆单元的抗拉压能力以外, 还能横向抗弯、抗剪, 可以发生弯曲变形, 能更全面地模拟钢筋的力学性能, 因此用梁单元模拟钢筋能较全面地反映钢筋对混凝土结构的增强作用^[3].

本文作者用梁单元模拟钢筋, 对于钢筋在平面单元内的任意分布情况进行研究, 通过虚功原理建立了一种新的钢筋混凝土平面单元模型.

1 平面单元位移场

设单元节点个数为 n , 以 $\{u_i, v_i\}^T$ 表示 i 节点的位移, N_i 表示 i 节点的形函数, 单元内任意位置的位移为:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} \quad (1)$$

在小转动情况下, 根据弹性理论, 单元内任一点的转角为 $\theta = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$, 结合位移插值模式, 有

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & \Lambda & N_n & 0 \\ 0 & N_1 & \Lambda & 0 & N_n \\ -\frac{\partial N_1}{2\partial y} & \frac{\partial N_1}{2\partial x} & \Lambda & -\frac{\partial N_n}{2\partial y} & \frac{\partial N_n}{2\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ M \\ u_n \\ v_n \end{Bmatrix} = [S] \{\delta_p\} \quad (2)$$

上式中, 各位移均相对于整体坐标系, $\{\delta_p\}$ 为平面单元的节点位移向量, $[S]$ 建立了平面单元内任一点位移和转角与单元节点位移向量之间的关系, 可称 $[S]$ 为广义形函数矩阵.

2 梁单元与平面单元的位置与位移关系

不失一般性, 考虑如图 2 所示平面四边形单元内含有一个钢筋梁元, 且钢筋梁元的两个节点均位于平面单元内部的情况, 梁元节点位于平面单元边界只是位于内部的特殊情况. 为方便说明, 称钢筋梁元所在的混凝土单元为母单元.

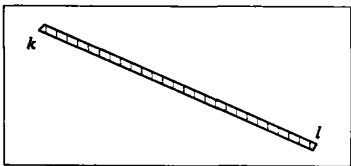


图 2 钢筋在平面单元内任意布置

Fig. 2 A bar random disposed in a quadrangle element

钢筋梁元节点设为 k, l , 其在所处母单元内的局部坐标可由平面单元的坐标插值模式解出:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \end{Bmatrix} \quad (3)$$

在有限元离散的基本理论下, 钢筋梁元与母单元的联系简化为通过梁元节点实现, 梁元节点处的位移服从母单元的位移场式 (2), 于是有

$$\{\delta_k\} = [S_k] \{\delta_p\} \quad (4)$$

$$\{\delta_l\} = [S_l] \{\delta_p\} \quad (5)$$

式中 $[S_k], [S_l]$ 分别为梁元节点 k, l 处的广义形函数矩阵. 于是梁单元的节点位移可由母单元的节点位移来表示为

$$\{\delta_B\} = \begin{Bmatrix} \delta_k \\ \delta_l \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_k \\ S_l \end{bmatrix} \{\delta_p\} \quad (6)$$

式 (6) 建立了钢筋梁单元节点位移与混凝土母单元节点位移之间的关系. 由于钢筋单元只在节点处满足母单元的位移场, 而两者的位移插值函数不同, 使得钢筋单元内部的位移场和母单元并不连续. 但若把混凝土单元内的一根钢筋细化为很多个梁单元, 每个梁单元以及整个钢筋段与母单元的位移连续性都会增加; 极限情况下, 细化为无限多个梁单元的话, 钢筋段与母单元能实现位移的完全连续. 后面的分析表明, 细分钢筋梁元不会增大结构整体刚度阵的计算规模, 必要情况下可采用细分钢筋梁元来提高分析精度.

3 梁单元与平面单元的复合

为全面模拟钢筋的力学性能, 把某钢筋段作为一个梁单元, 基于有限元离散理论, 钢筋单元与母单元的关系简化为通过节点联系. 钢筋单元在节点处满足母单元的位移场, 其与母单元的相互作用力也简化为通过钢筋单元的节点传递.

对于钢筋梁单元, 设节点为 k, l , 整体坐标系下的节点位移向量和节点力向量可表示为

$$\{\delta_B\} = \{u_k \ v_k \ \theta_k \ u_l \ v_l \ \theta_l\}^T;$$

$$\{F_B\} = \{X_k \ Y_k \ M_k \ X_l \ Y_l \ M_l\}^T,$$

两者之间存在下式:

$$[K_B] \{\delta_B\} = \{F_B\} \quad (7)$$

式中 $[K_B]$ 为梁单元在整体坐标系下的单元刚度矩阵, 可由单元局部坐标系的单元刚度阵经坐标转化得到. 式 (7) 对应的虚功形式为

$$\delta \{\delta_B\}^T [K_B] \{\delta_B\} = \delta \{\delta_B\}^T \{F_B\} \quad (8)$$

将式 (6) 带入式 (8), 有

$$\delta \{\delta_p\}^T \begin{bmatrix} S_k \\ S_l \end{bmatrix} [K_B] \begin{bmatrix} S_k \\ S_l \end{bmatrix} \{\delta_p\} = \delta \{\delta_p\}^T \begin{bmatrix} S_k \\ S_l \end{bmatrix}^T \{F_B\} \quad (9)$$

由虚位移 $\delta \{\delta_p\}$ 的任意性, 有

$$\begin{bmatrix} S_k \\ S_l \end{bmatrix}^T [K_B] \begin{bmatrix} S_k \\ S_l \end{bmatrix} \{\delta_p\} = \begin{bmatrix} S_k \\ S_l \end{bmatrix} \{F_B\}^T \quad (10)$$

记 $[K_B]$ 、 $\{F_B\}$ 分别为钢筋梁单元相对于所在平面单元的节点位移向量 $\{\delta_p\}$ 的单元刚度矩阵和等效节点力向量:

$$[K_B] = \begin{bmatrix} S_k \\ S_l \end{bmatrix}^T [K_B] \begin{bmatrix} S_k \\ S_l \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\{F_B\} = \begin{bmatrix} S_k \\ S_l \end{bmatrix}^T \{F_B\} \quad (12)$$

式(10) 成为

$$[K_B] \{\delta_p\} = \{F_B\} \quad (13)$$

单元组装过程中,按照节点位移向量 $\{\delta_p\}$ 将 $[K_B]$ 和 $\{F_B\}$ 装配到结构的整体刚度阵和荷载向量中,即可实现钢筋梁元与平面单元的复合.

对于钢筋梁元与母单元之间的分布作用力,由于两者是作用力与反作用力关系,以及两者界面处位移的连续性假设,它们在任何位移上做的功都为零,因此其相互作用力引起的等效节点力不要组装到整体荷载向量中去,这和常规有限元方法不组装单元节点之间的相互作用力一样.

为计算简便,混凝土平面单元的刚度可按照无钢筋的完整混凝土进行计算.如果要考虑钢筋对混凝土的挖空效应,可以通过折减钢筋的弹性模量来反映:用 E_s 、 E_c 分别表示钢筋和混凝土的弹性模量,在用式(11) 计算钢筋梁元对组合单元的刚度贡献时,取 $E = E_s - E_c$ 为钢筋梁元的弹性模量.平面单元内可以有多个任意布置的钢筋段,一个钢筋段又可以划分为多个梁元,因此平面单元内可以有多个钢筋梁元.用 $[K_p]$ 表示无钢筋平面单元在整体坐标系下的刚度矩阵,以 $[K_B^i]$ 表示第 i 个钢筋梁元对组合单元的刚度贡献,则组合单元的刚度矩阵为

$$[K] = [K_p] + \sum [K_B^i] \quad (14)$$

通过上述单元复合和结构整体平衡方程的求解,直接得到的是平面单元的节点位移;钢筋梁元的节点位移按式(5) 即可得到,进一步可按常规单元计算其内力、应力等.

从上述过程可以看出,钢筋梁元的复合在平面单元的单元分析过程中即可完成,其节点位移不出现在整体结构自由度中,因此钢筋梁元的数量不会增大结构整体刚度阵的计算规模.这样,可以通过把平面单元内的钢筋段划分为多个钢筋梁元来提高分析精度.

4 模型比较

文献[4] 分析了平面单元内有多根钢筋按贯

穿方式布置的情况,其模型中钢筋用杆单元模拟.图3为文献[4] 的模型例子,其平面单元的厚度为 t ,钢筋弹性模量为 E_s ,横截面面积为 A_s ,横向配筋率为 $\rho_x = \frac{A_s}{2bt}$.

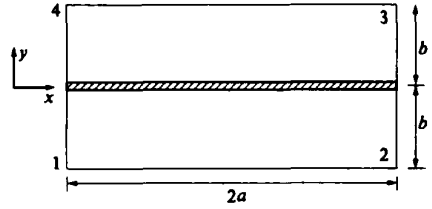


图3 沿纵向配筋的四边形单元

Fig.3 A quadrangle element with a longitudinal bar

文献[4] 采用平面四边形4节点单元比较了整体式和组合式下钢筋对平面单元的贡献,按整体式模型计算得到钢筋的刚度贡献为

$$[K_s] = \frac{E_s A_s}{24a} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

按杆单元和平面四边形单元组合得到钢筋的刚度贡献为

$$[K_s] = \frac{E_s A_s}{8a} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

对于图3问题,按本文梁元模型计算得到的钢筋的刚度贡献为

$$[K_s] = [K_s^A] + [K_s^I] \quad (17)$$

其中 $[K_s^A]$ 反映了钢筋的轴向刚度,与式(16) 完全相同 $[K_s^I]$ 反映了钢筋的抗弯刚度.用 I 表示钢筋的抗弯惯矩, $\beta = a/b$ 表示四边形单元长宽比,则 $[K_s^I]$ 可表示为

$$[K_s^I] = \frac{EI}{32a^3} \begin{bmatrix} 4\beta^2 & 3\beta & 2\beta^2 & -3\beta & -2\beta^2 & -3\beta & -4\beta^2 & 3\beta \\ 3\beta & 3 & 3\beta & -3 & -3\beta & -3 & -3\beta & 3 \\ 2\beta^2 & 3\beta & 4\beta^2 & -3\beta & -4\beta^2 & -3\beta & -2\beta^2 & 3\beta \\ -3\beta & -3 & -3\beta & 3 & 3\beta & 3 & 3\beta & -3 \\ -2\beta^2 & -3\beta & -4\beta^2 & 3\beta & 4\beta^2 & 3\beta & 2\beta^2 & -3\beta \\ -3\beta & -3 & -3\beta & 3 & 3\beta & 3 & 3\beta & -3 \\ -4\beta^2 & -3\beta & -2\beta^2 & 3\beta & 2\beta^2 & 3\beta & 4\beta^2 & -3\beta \\ 3\beta & 3 & 3\beta & -3 & -3\beta & -3 & -3\beta & 3 \end{bmatrix}$$

钢筋作为梁单元的抗弯惯矩一般很小, 导致 $[K_s]$ 的各元素数值与 $[K_c]$ 相比不大, 却是钢筋的横向抗弯能力的体现. 同时考察钢筋的轴向抗拉压能力和抗弯能力, 能较全面地反映钢筋的力学行为.

5 算例

考察如图 4 所示的悬臂板. 尺寸单位为 $m \cdot q = 1\,400\,kN/m$. 混凝土为 C30, 弹性模量取 $3.0 \times 10^4\,MPa$, 泊松比取 0.167, 每根钢筋均为 $\Phi 20$, 弹性模量取 $2.0 \times 10^5\,MPa$.

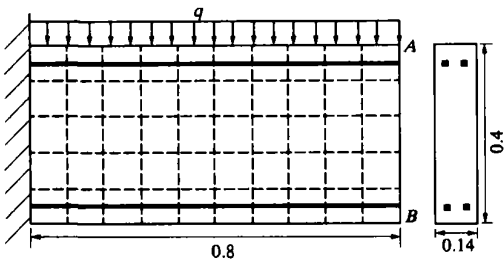


图 4 钢筋混凝土悬臂板

Fig. 4 A reinforced concrete cantilever plate

采用平面四边形四节点划分的单元网格见图 4 中虚线, 将钢筋分别模拟为杆单元和梁单元的计算结果见表 1.

表 1 两种钢筋单元模型挠度的计算结果

Tab. 1 Displacement results of under two models mm

钢筋模型	A 点挠度	B 点挠度
杆单元解	3.287	3.221
梁单元解	3.285	3.219

从表 1 可看出, 钢筋的杆单元模型与梁单元模型对结果的影响不显著, 说明本例中钢筋的横向效应不强, 但也说明钢筋的抗弯性能在梁单元模型中得到了体现.

6 结束语

将钢筋单元由只具有轴向性能的杆单元推广为同时具有轴向、横向性能的梁单元, 能更全面地反映钢筋在混凝土中的力学效应.

基于弹性理论得到平面单元内任一点的转角位移, 通过梁元节点位移服从平面单元位移场的连续条件, 应用虚功原理建立了单元内任意位置含钢筋梁元的钢筋混凝土平面单元模型.

与现有钢筋混凝土平面单元模型比较, 钢筋在平面单元内的位置和性能都得到了更准确、全面的反映. 模型能适应钢筋在平面单元内的任意布置方式, 混凝土和钢筋可独立进行网格划分, 可为实际应用时单元离散提供方便.

参考文献:

[1] 朱伯芳. 有限单元法原理与应用 [M]. 第二版. 北京: 中国水利水电出版社, 1998.

[2] 吕西林, 金国芳, 吴晓涵. 钢筋混凝土结构非线性有限元理论与应用 [M]. 上海: 同济大学出版社, 1996.

[3] 沈聚敏, 王传志, 江见鲸. 钢筋混凝土有限元与板壳极限分析 [M]. 北京: 清华大学出版社, 1991.

[4] 朱海堂, 吉瑞林, 张 静. 钢筋混凝土平面问题单元模型研究 [J]. 郑州大学学报(工学版), 2002, 23(4): 60~63.

[5] 王家林. 钢筋混凝土结构空间有限元分析的体梁组合单元 [J]. 工程力学, 2002, 19(6): 131~135.

A Beam embedded Hane Finite Element Model of Reinforced Concrete

WANG Jia -lin^{1,2}, CHEN Shan -lin²

(1. College of Civil Engineering, Chongqing Jiaotong University, Chongqing 400074, China ; 2. College of Civil Engineering, Chongqing University, Chongqing 400044, China)

Abstract : The reinforcing steel bars are regarded as beam elements in concrete plane elements , which can endure axial forces and bear bending . Based on the hypothesis that the displacements of beam nodes are consistent with the displacement field of the plane element , a beam - embedded plane finite element model can be built by employing the virtual work principles . Compared with other applied plane element model , this model describes the structure performances of reinforcements more exactly and generally , and allows them to distribute in the plane element without any restraint . The concrete and reinforcement elements can be meshed independently and this provides convenience for discrete elements .

Key words : reinforced concrete ; finite element ; beam element ; plane element model