文章编号:1671-6833(2003)03-0075-03

Newton 迭代法的吸引域及其Julia 集

李向明

(北京邮电大学网络教育学院,北京 100088)

摘　要:用Newton 迭代法讨论$f(z)=z^{\alpha}-1$在复平面上零点的吸引域及其Newton 迭代函数的Julia 集随α的不同的变化.当α是整数时$f(z)=z^{\alpha}-1$的零点的吸引域及Julia 集是次旋转对称的;当α是非整数时,不具有旋转对称性,是一种过渡状态,并且这种过渡状态对α从奇数变成偶数与从偶数变成奇数的过渡形式是不同的,而且从奇数变成偶数时情况更为复杂.在某一范围内的α值,在复平面上存在一个包含开区域的点集,其Newton 迭代不收敛于任何不动点,从而进一步说明:即使简单的复迭代系统还有许多复杂和未知现象需要我们去探讨.

关键词:吸引域;Newton 迭代法;分形

中图分类号:TP 391.4　　**文献标识码**:A

0　引言

复动力系统的研究,最早是由A.Cayley 开始的.当时主要致力于复Newton 迭代法的研究,分析复平面上方程$z^3-1=0$的三个解及其特性.20世纪30年代,G.Julia 和P.Faton 对复多项式迭代进行了深入研究,但是由于缺乏计算机的辅助,研究基本上处于停滞不前的状态.直到1980年,Mandelbrot 率先用计算机绘制了第一张引人入胜的Mandelbrot 分形图,开创了复动力系统分形几何的研究.

Newton 迭代法是用来解非线性方程$f(x)=0$的一个经典的方法,当应用于复数域时产生了许多意想不到的结果[1~5].本文用Newton 迭代法研究$f(z)=z^{\alpha}-1$($\alpha=k+\varepsilon, k\geqslant 3$,为正整数,$0\leqslant\varepsilon<1$)的零点吸引域的情况.对$\varepsilon=0$即α是正整数时零点吸引域分布,及$\varepsilon\neq 0$时,对$k$为奇数、偶数的零点吸引域及其Julia 集进行了讨论.

1　复Newton 迭代法及其吸引域

考虑复平面C上的一非线性方程

$$f(z)=0$$

求解它的Newton 迭代法可写为

$$N_f(z_n)=z_{n+1}=z_n-\frac{f(z_n)}{f'(z_n)},(n=0,1,2,\cdots)$$

$N_f: C\cup\{\infty\}\to C\cup\{\infty\}$,$N_f(z)$的不动点是$f(z)$的零点及∞.由$N_f'(z)=\frac{f(z)f''(z)}{[f'(z)]^2}$,所以,如果$f'(z)\neq 0$,则$f(z)$的零点是$N_f$的超吸引不动点,∞是$N_f(z)$的斥性不动点,记

$$A(\omega)=\{z \mid z\in C, N_f^n(z)\to\omega, n\to\infty\}$$

为$f(z)$的零点的吸引域,即在Newton 迭代下收敛于ω的初始点集.$A(\omega)$是一个包含ω在内的开集,$A(\omega)$的边界$J(N_f)=\partial A(\omega)$称为Julia 集[1].

2　$f(z)=z^{\alpha}-1$的零点及吸引域

$f(z)=z^{\alpha}-1$的Newton 迭代函数形式为

$$z_{n+1}=z_n-\frac{z_n^{\alpha}-1}{\alpha z_n^{\alpha-1}}=\frac{\alpha-1}{\alpha}z_n+\frac{1}{\alpha z_n^{\alpha-1}}.$$

对$z^{\alpha-1}$的计算用

$$z^{\alpha}=r^{\alpha}(\cos\alpha\theta+i\sin\alpha\theta, r=|z|, \theta=\arg z).$$

因此

$$\begin{cases} x_{n+1}=\dfrac{\alpha-1}{\alpha}x_n+\dfrac{1}{\alpha}r^{1-\alpha}\cos(1-\alpha)\theta \\ y_{n+1}=\dfrac{\alpha-1}{\alpha}y_n+\dfrac{1}{\alpha}r^{1-\alpha}\sin(1-\alpha)\theta \end{cases} \quad (*)$$

计算步骤过程如下:

Step 1.给出指数α,收敛判定条件δ,及最大迭代次数N.

Step 2.确定z_0的取值范围:x_{min}, x_{max}, y_{min}, y_{max}.

收稿日期:2003-03-01;**修订日期**:2003-06-02

作者简介:李向明(1964-),男,山东省潍坊市人,北京邮电大学副教授,主要从事混沌、分形及其计算机模拟方面的研究.

Step 3. 在 z_0 取值范围选取一值,迭代次数 $n=0$.

Step 4. 按(*)式进行迭代计算,$n \leftarrow n+1$.

Step 5. 判断:$|z_{n+1}-z_n|<\delta$,结束该点迭代;否则进一步判定 $n<N$,满足转到Step 4,否则结束该点迭代.

Step 6. 根据收敛到不同的点,给 z_0 所对应的像素点着色,不收敛则不着色,并转到Step 3.

对 $f(z)=z^{\alpha}-1$ 零点的吸引域,分两种情况考虑. 当 $\alpha=k$($k\geqslant 3$ 是正整数)时,$f(z)=z^k-1$ 有 k 个零点 $\omega_j=e^{i\frac{2\pi}{k}j}$, $j=0,1,\cdots,k-1$. 设 $\rho(z)=ze^{i\frac{2\pi}{k}}$,则 $\rho(z)$ 是绕原点转动 $\frac{2\pi}{k}$ 的旋转变换,$N_f(\rho(z))=\rho(N_f(z))$,即 ρ 是 f 到自身的共轭变换. 所以对这 k 个零点,绕原点旋转 $\frac{2\pi}{k}$ 都把每个 ω 相应的 $A(\omega)$ 映射到 $A(\omega e^{i\frac{2\pi}{k}})$ 上,其Julia 集有关于原点对称的 k 个部分. 每个 $A(\omega)$ 包含一个环绕 ω 的开区域,在一个 $A(\omega)$ 的边界上的任何点都在所有 k 个边界上,是一个"k 重点". 图形具有旋转不变性. 图1给出了 $k=3$ 的吸引域及其边界Julia 集. 其Julia 集是由原点出发的3个"链"组成. 这些链具有精细结构,任意接近 $J(N_f)$ 的每一点图形都是 $A(\omega)$ 在原点图形的"轻微变形"的复制,$J(N_f)$ 表现了拟自相似性.

当 $\alpha=k+\varepsilon$ 时,$f(z)=z^{\alpha}-1$ 的零点及其吸引域不再具有对称性及旋转不变性. 由于 α 不是整数,$f(z)=z^{\alpha}-1$ 实际上是一多值函数. 因为在 α 不是整数时,

$$\begin{cases}\cos\alpha\theta=\cos(\alpha\theta+2\pi\alpha)\\ \sin\alpha\theta=\sin(\alpha\theta+2\pi\alpha)\end{cases}$$

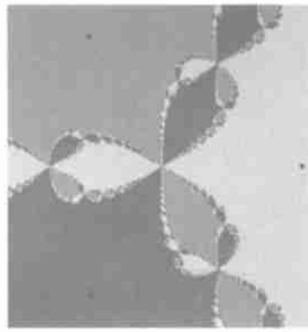


图1 $f(z)=z^3-1$ 的零点及吸引域

Fig.1 The basins of attraction for zero points of $f(z)=z^3-1$

不成立,所以 θ 的不同取值范围会影响 $z^{\alpha-1}$ 的计算,在此仅考虑其主分支,辐角主值取 $\theta\in(-\pi,\pi]$,图形关于实轴对称. 又由于在负实轴处 θ 不连续,所以对图形也会有影响. 下面分k为奇数和偶数两种情况分析.

(1) k 为奇数时(图2),$f(z)=z^k-1$ 的零点仅在正实轴上有 $z=1$ 一点(图1),其余零点对称分布在上下半平面,但其吸引域的边界Julia 集的链形结构有一支分布在负实轴的周围. 随着 ε 从零逐渐增加,N_f 的Julia 集其它部分基本不变,沿负实轴分布的一条逐渐变宽结构更加复杂. 当 ε 大于某一值时(在0.8～0.9之间)沿负实轴的这一条链分成两支,这两支间形成一个包含开区域的点集(图2(c)),在这集合内的点迭代不收敛于任何不动点,可能达到一周期态,甚至出现混沌的性态,当 $\omega\to 1$ 时出现第 $k+1$ 个零点,这一区域变成它的吸引域.

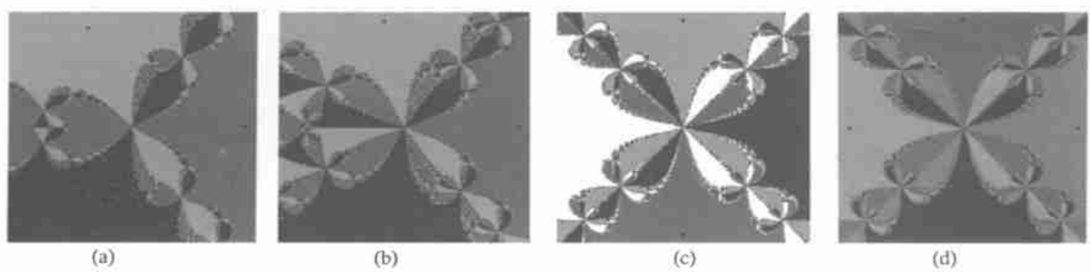
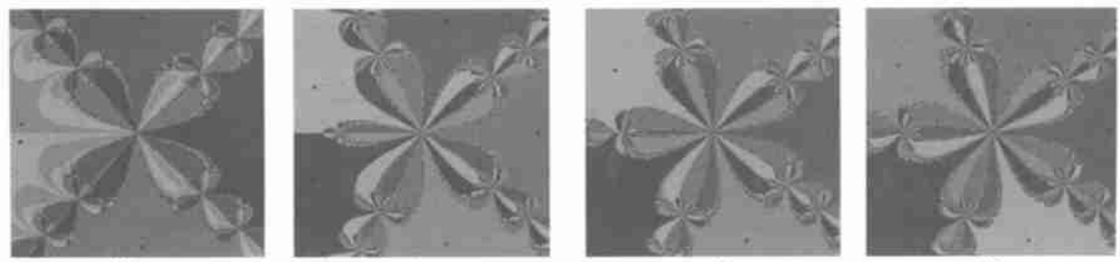


图2 非整数阶的吸引域及Julia 集(k 为奇数)

Fig.2 The basins of attraction for non-integral order and its Julia set(k is odd)

(2) k 为偶数时(图3),$f(z)=z^k-1$ 的零点在实轴上有 $z=\pm1$ 两个点(图2(d)),其余零点对称分布在上下半平面.Julia 集的"链"形结构关于实轴、虚轴对称. 当 $\theta=k+\varepsilon$ 时,由于 $f(z)=z^k-1$ 的零点 $z=-1$ 位于负实轴上,在负实轴出现 θ 不连续,所以随 ε 由零开始增加,零点 $z=-1$ "分成两个",在一个解析区域内($-\pi<\arg z\leqslant\pi$)有 $k+1$ 个零点. 开始时,这两个零点的吸引域间的边界是一直线,随 ε 的增加沿负实轴逐渐生长出一条具有分形结构的"链",即在负实轴周围的

点不再简单地属于这两个零点的吸引域，而可能属于任一零点的吸引域.



(a) (b) (c) (d)

图3　非整数阶的吸引域及Julia 集(k 为偶数)

Fig.3　The basins of attraction for non-integral order and its Julia set (k is even)

从以上我们可以看到 α的变化对$f(z)=z^{\alpha}-1$零点及吸引域的影响，特别是在 $\alpha=k$ 附近变化时的影响.如果k 是奇数，α从小于k 变到大于k，其零点的个数不变，其整个图形也是连续变化的.如果k 是偶数，则当 $\alpha<k$ 时，零点数是$k-1$；当 $\alpha=k$ 时，零点数是k；当 $\alpha>k$ 时，零点数是$k+1$.从小于k 的方向增加到k，零点数增加一个，一个不收敛的开集突变到第k 个零点及其吸引域.α继续增加则出现第$k+1$个零点.

3　结束语

本文讨论了$f(z)=z^{\alpha}-1$当 α是正数时其Newton 迭代法的不动点及其吸引域的情况.当 α是整数时，不动点的吸引域及其Julia 集有完美的对称形式；当 α不是整数时，则不再具有完美的对称形式，但可看作是从一种完美形式向另一种完美形式的过渡状态，α从奇变偶与从偶变奇的过渡形式是不同的.关于$f(z)=z^{\alpha}-1$，还可考虑α取负实数的情形，甚至可考虑 $\alpha=a+ib$ 的情形，可能会得到更加丰富的结果.

参考文献：

[1]　CURRY James H, GARNETT Lucy, SULLIVAN Dennis. On the iteration of a rational function: computer experiments with newton's method[J]. Commun Math Phys, 1983, 91: 267～277.

[2]　PEITGEN H-O, RICHTER P H. The Beauty of Fractals [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1986.

[3]　PEITGEN Heinz-Otto, SAUPE Dietmar. The Science of Fractal Images[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1988.

[4]　肯尼思•法尔科内.分形几何[M].曾文曲，译.沈阳：东北大学出版社，1991.

Basins of Attraction and Julia Set with Newton's Iteration Method

LI Xiang-ming

(School of Network Education, Beijing University of Posts and Telecommunications, Beijing 100088, China)

Abstract: Newton's Iteration method is applied to $f(z)=z^{\alpha}-1$ in the complex plane. And its basins of attraction for zero points and its Julia set are discussed. With the α change, the basins of attraction and Julia set change. If α is integer, the basins of attraction and Julia set is α spin symmetry. If α is non-integer, it has not spin symmetry. It is a transitional state. The transitional state for α change from odd to even is different to from even to odd, it is more complicated. If α is within a certain range there is a set containing open region of starting points, the Newton's method does not converge to any fixed points. Therefore, even the simple complex iterated systems, there are much complicated and unknown phenomena to be discussed.

Key words: basins of attraction; Newton's method; fractal