文章编号:1671-6833(2002)03-0078-03

无超调无静差系统的最优控制

向 兵[1],丁天增[2],冯冬青[1],李玉玲[1]

(1.郑州大学电气工程学院,河南 郑州 450002;2.河南省中州煤矿机械厂,河南 郑州 450052)

摘 要:针对线性连续定常系统二次型调节器问题,提出了一种新的控制方案,利用内模原理将原系统进行变换,建立一种被跟踪信号 y_0 的新模型来实现系统的无静差跟踪控制;利用二次型最优控制原理来计算系统的最优控制 $u(t)$;同时,再适当地选取加权矩阵 R 和 Q 来共同实现系统的动态响应.分析表明,这种控制也是一种鲁棒控制.最后,对系统进行了设计与仿真,仿真结果表明,这种控制方法完全符合设计要求.

关键词:无静差跟踪;二次型最优控制;目标函数;加权矩阵

中图分类号:TP 273.1 文献标识码:A

1 问题的提出

在工业控制的设计中,随着控制对象、控制品质的要求不同,相应的设计方法也有很大的差别,设计方法的不同将直接决定着控制效果的好坏.有时控制要求很多,既要求系统的动态响应,又要求控制无超调、无误差.这样一来,一种控制方法难以达到要求,就需要多种控制方法共同使用,各取所长,以提高自动控制的水平.例如某液体产品生产时,有一工序要求对泻放的液体物料进行称量,其被控对象的状态方程为

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu ; \\ y = Cx . \end{cases} \tag{1}$$

式中:x 为状态向量;y 为输出;u 为控制向量;系数矩阵 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -0.5 \end{bmatrix}$;$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.0105 \end{bmatrix}$;$C = [1 \quad 0]$.

要求在阶跃输入下,物料重量尽快地、准确地达到额定值,并且无任何超调.根据系统要求,我们就可以运用多种控制方法进行综合设计.

2 系统分析与设计

这是一个单输入单输出系统,属定值调节问题,也可以归结为确定性模型的跟踪问题,考虑到要求稳态误差为零和动态响应的双重要求,可以结合二次型最优控制原理和无静差跟踪问题原理来解决这个问题.

2.1 稳态误差的问题

在 PID 控制中,消除稳态误差的方法是引入积分运算,根据这一原理,我们可以把要跟踪的信号即参考信号可以看成是由动态系统模型

$$\begin{cases} \dot{x}_r = A_r x_r \\ y_0 = C_r x_r \end{cases} \tag{2}$$

所产生的.

式中:x_r 为动态系统的状态向量;A_r,C_r 为系数矩阵,将其进行变换,即把跟踪误差 e 作为它的输入,即可变换为

$$\begin{cases} \dot{x}_c = A_c x_c + B_c e ; \\ y_c = x_c . \end{cases} \tag{3}$$

式中:$e = y_0 - y$.此时,式(2)和式(3)所描述的动态系统就是在研究跟踪问题中对 y_0 所建立的信号模型.在这里,我们取 y_0 为单位阶跃信号.

将 u 取为状态反馈控制律[1]

$$u = [-k \quad k_c] \begin{bmatrix} x \\ x_c \end{bmatrix} , \tag{4}$$

或

$$u = [-k \quad k_r] \begin{bmatrix} x \\ x_r \end{bmatrix} , \tag{4'}$$

则可得到实现稳态误差为零即无静差闭环控制系统的结构,如图 1 所示.

收稿日期:2002-03-29;修订日期:2002-06-21

基金项目:河南省自然科学基金资助项目(011106300)

作者简介:向兵(1968-),男,湖南省长沙市人,郑州大学硕士研究生,工程师,主要从事计算机智能控制方面的研究.

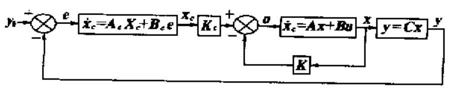

图 1　无静差跟踪控制系统结构图

Fig.1　No steady error control system

从图中可以看出,一个无静差跟踪控制系统,实际上是一个包含补偿器的输出反馈系统.其中,$\dot{x}_c = A_c x_c + B_c e$ 和 $u_1 = K_c x_c$ 部分相当于补偿器,它是一个动态系统,其主要作用是使系统实现渐进跟踪.由于控制量 u_1 中包含有误差 e 的积分部分,类似于 PID 中的积分控制,所以只要误差 e 不为零,u_1 就一直存在,直至完全消除稳态误差即实现无静差.另外,这个补偿器包含有 y_0 的不稳定信号模型,也称内模.利用内模原理来实现无静差跟踪控制的一个重要优点,是对除了内模以外的受控系统和补偿器的参数的变动不敏感.当这类参数出现摄动,只要闭环控制系统为渐近稳定,则系统仍具有无静差跟踪的属性,即控制具有鲁棒性.$u_2 = Kx$ 部分的主要作用是使整个反馈系统实现镇定.另外还可以看出,当稳态误差 $e = 0$ 时,就转化为最优跟踪系统的结构,如图 2 所示.

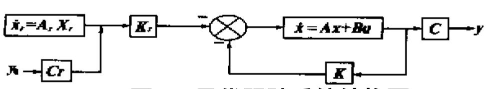

图 2　最优跟踪系统结构图

Fig.2　The optimum control system

2.2　最优跟踪问题

在上面我们提到了 u 取状态反馈控制律:$u = [-k \quad k_r]\begin{bmatrix} x \\ x_r \end{bmatrix}$.然而,这样的 u 可能很多,因为在无静差控制系统中,u 的作用只是实现渐进跟踪和反馈镇定,而最优跟踪问题就是要从中找出一个 u,使其满足某一个目标函数.确定跟踪问题最优解的一个比较方便的途径就是将跟踪的信号转化为稳定的动态模型式(2),将它与受控系统串联起来,这样就把跟踪问题转化成为等价的一个最优二次型调节问题,然后直接利用最优调节问题的有关结果,导出跟踪问题中相应的结论.当稳态误差 $e = 0$ 时,无静差跟踪系统的结构图同最优跟踪系统的结构图是一致的,所以我们可以利用最优二次型控制作为本系统的控制 u.为此,我们根据式(1)和式(2)来构造此串联系统的增广状态方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A_r \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ x_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u \,, \qquad (5)$$

考虑到系统的要求,定义二次型目标函数为[1]

$$J(u) = \int_0^\infty [e^T Q e + u^T R u]\,dt \,, \qquad (6)$$

其中,$e = y - y_r$;Q,R 为加权矩阵.将 $J(u)$ 进行如下变换

$$\begin{aligned} J(u) &= \int_0^\infty [(y - y_r)^T Q (y - y_r) + u^T R u]\,dt \\ &= \int_0^\infty [(x^T C^T Q C x - x^T C^T Q x_r + x_r^T Q x_r \\ &\quad - x_r^T Q C x) + u^T R u]\,dt \\ &= \int_0^\infty [[x^T, x_r^T]\begin{bmatrix} C^T Q C & -C^T Q \\ -QC & Q \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ x_r \end{bmatrix} + u^T R u]\,dt \,, \end{aligned} \qquad (7)$$

取　$\bar{Q} = \begin{bmatrix} C^T Q C & -C^T Q \\ -QC & Q \end{bmatrix}$,$\bar{x} = \begin{bmatrix} x \\ x_r \end{bmatrix}$,

$\bar{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A_r \end{bmatrix}$,$\bar{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}$,$\bar{R} = R$.

则可导出等价于上述跟踪问题的调节问题为

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{B}u \,; \\ J(u) = \int_0^\infty (\bar{x}^T \bar{Q} \bar{x} + u^T R u)\,dt \,, \end{cases} \qquad (8)$$

利用最优调节问题的基本结论即知,由式(8)所描述的无限时间定常 LQR 调节问题的最优控制 $\bar{u}$ 为

$$\bar{u}(t) = -\bar{k}\bar{x}(t) , \quad \bar{k} = \bar{R}^{-1}\bar{B}^T\bar{p} \,, \qquad (9)$$

其中,$\bar{p}$ 是如下的 Riccati 代数方程

$$\bar{p}\bar{A} + \bar{A}^T\bar{p} + \bar{Q} - \bar{p}\,\bar{B}\bar{R}^{-1}\bar{B}^T\bar{p} = 0 \qquad (10)$$

的唯一正定对称解阵.令

$$\bar{p} = \begin{bmatrix} P & p_{12} \\ p_{12}^T & p_{22} \end{bmatrix} ,$$

根据式(7),(10)可导出相对于 p,p_{12},p_{22} 的 Riccati 代数方程分别为

$$pA + A^T p + C^T Q C - pBR^{-1}B^T p = 0 \,; \qquad (11)$$

$$p_{12}A_r + A^T p_{12} - C^T Q - pBR^{-1}B^T p_{12} = 0 \,; \qquad (12)$$

$$p_{22}A_r + A_r^T p_{22} + Q - p_{12}^T BR^{-1}B^T p_{12} = 0 \,. \qquad (13)$$

因此,最优控制 $u(t)$ 为

$$\begin{aligned} u(t) &= -R^{-1}[B^T 0]\begin{bmatrix} p & p_{12} \\ p_{12}^T & p_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ x_r \end{bmatrix} \\ &= -R^{-1}B^T p x - R^{-1}B^T p_{12} x_c \\ &= -kx - k_r x_r \,. \end{aligned} \qquad (14)$$

式中:$k = R^{-1}B^T p$,$k_r = R^{-1}B^T p_{12}$.

2.3　无超调问题

在我们前面的控制设计中,强调的是稳态误

差 $e=0$ 即无静差和系统的动态响应,并没有考虑到超调量的问题,其实,目标函数的构成参量和形式确定之后,加权矩阵就直接决定着系统的动态响应特性.动态响应和超调量是系统相互矛盾的两个特性,要想实现无超调就要牺牲一些动态响应特性.

以式(8)为例进行分析,控制加权矩阵 R 一般取正定对称阵,增大 R 可以增大 u 在目标函数中的比重,为使 J 为最小,必须让 u 变小,从而系统响应变慢.相反,减小 R,控制量 u 的幅度会变大,响应也变快.误差加权矩阵 $Q=\begin{bmatrix} q_{11} & 0 \\ 0 & q_{22} \end{bmatrix}$ 中各元素的大小反映了状态变量在目标函数中的比例程度,一般取正定或半正定对角阵.文献[3]试验证明:对角阵上的元素 q_{11} 增加,相应的状态反馈增益增大,则系统响应加剧;q_{11} 减小,则系统响应减慢.元素 q_{22} 的值增加将使系统动态响应减慢,反之将加快.

3 仿真实例

以式(5)作为被控对象,以式(14)作为控制方程在MATLAB6.1环境下做系统仿真试验,其中,当 $R=0.004$,$Q=[10\ 0;0\ 1]$ 时,仿真结果如图3所示.仿真结果表明,系统稳态误差为零,无超调,上升时间19 s,结果比较令人满意.

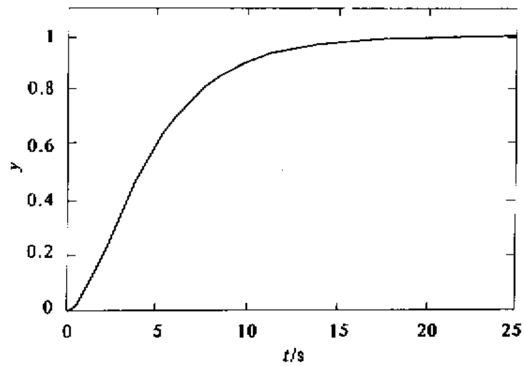

图3 系统控制仿真结果

Fig.3 The simulation result of control system

4 结束语

对于无超调、无静差系统,本文提出了一种新的控制设计方法,即将输入信号转为一动态模型,利用增广系统和最优控制原理把跟踪问题转变为二次型控制器问题,根据系统的无静差、无超调以及动态响应的特性进行综合设计.仿真验证表明,这种设计方法符合要求.

参考文献:

[1] 郑大钟.线性系统理论[M].北京:清华大学出版社,2000.

[2] 吴受章.应用最优控制[M].西安:西安交通大学出版社,1988.

[3] 冯冬青.线性最优控制系统加权矩阵的仿真研究[J].郑州工业大学学报,2000,21(1):11-14.

Optimum Control of No Over-shoot No Steady Error System

XIANG Bing[1], DING Tian-zeng[2], FENG Dong-qing[1], LI Yu-ling[1]

(1.College of Electric Engineering, Zhengzhou University, Zhengzhou 450002, China; 2.Zhongzhou Coal Mine Mechanical Plant, Zhengzhou 450052, China)

Abstract: According to the question of linear continuous time-invariant system quadratic regulator, the paper proposes a control program, utilizing internal model principles to build a new model to perform tracking control with no steady error and utilizing quadratic optimum control principles to calculate optimum control and through select weighted matrix to perform the dynamic response of system. The analysis shows that this is a robust control. According to the requirements of a practical controlled object, the paper designs and simulates the system, and the simulated results show that this control method entirely meets the requirements of design.

Key words: tracking with no steady error; quadratic optimum control; objective function; weighted matrix