

文章编号:1007-6492(2002)01-0014-04

# 基于双曲线回归三参模型的分析方法研究

李宗坤<sup>1</sup>, 郑晶星<sup>1</sup>, 王伟<sup>2</sup>

(1. 郑州大学环境与水利学院, 河南 郑州 450002; 2. 河南省水利科学研究所, 河南 郑州 450003)

**摘要:** 针对双曲线回归常用两参数模型的不足, 引入第三参数, 建立了双曲线回归三参模型. 从理论上证明了其建模原理的可靠性及建模思想的合理性, 并给出确定各参数的方法, 以陆浑水库大坝沉降观测资料分析为例, 通过对建立起的双曲线回归三参模型、双曲线回归常用模型及其它模型的成果对比分析, 充分验证了该双曲线回归三参模型的实用性.

**关键词:** 数学模型; 双曲线回归; 沉降; 土石坝

**中图分类号:** TV 698.21; O 175.27 **文献标识码:** A

原型观测资料分析方法及其应用的研究越来越受到工程界的重视. 随着数学方法的完善和坝工理论的发展, 原型观测资料分析已经可用数学模型来反映大坝性状各项参数的内在规律. 目前, 定量分析模型主要有统计模型、确定性模型和混合模型3种. 对于土石坝工程来说, 土体的非线性及效应的滞后性等特点使得后两种模型的应用遇到了困难, 而统计模型因其方法简单、适应性强而得到广泛的使用, 并取得较好的效果.

根据固结理论和工程实践, 土石坝沉降量主要为时效位移, 并随时间衰减<sup>[1]</sup>, 其累计沉降量采用双曲线模型  $y = \frac{x}{b+a \cdot x}$  (即  $\frac{1}{y} = a + b \cdot \frac{1}{x}$ ), 通常能很好地反映沉降的变化趋势, 取得较好的建模效果. 但是, 由于该模型灵活性及自适应能力差, 不能通过自身的调节使模型进一步优化, 因而无法充分发挥双曲线模型的建模优势, 达不到双曲线模型的最佳建模效果.

本文针对双曲线回归常用模型的不足, 引入第三参数  $c$ , 建立双曲线回归三参模型  $\frac{1}{y+c} = a + b \cdot \frac{1}{x}$ , 从理论上证明该模型能达到双曲线回归的最佳建模效果, 同时给出确定三参数  $a, b, c$  的两种计算方法. 结合一工程实例, 其计算分析成果表明, 该模型具有很好的实用价值.

## 1 双曲线回归三参模型建模原理

### 双曲线回归三参模型

收稿日期:2001-06-10; 修订日期:2001-09-25

作者简介:李宗坤(1961-), 男, 河南省邓州市人, 郑州大学副教授, 大连理工大学博士研究生, 主要从事水工结构和大坝安全性评价方面的研究.

$$\frac{1}{y+c} = a + b \cdot \frac{1}{x} \quad (1)$$

### 1.1 确定参数 $a, b$

#### 1.1.1 将双曲线回归化为线性回归

令  $u = \frac{1}{y+c}, v = \frac{1}{x}$ ,  
则  $u = a + b \cdot v$ .

#### 1.1.2 由最小二乘原理确定参数 $a, b$ <sup>[2]</sup>

定义偏差  $Q = \sum_{i=1}^n (\hat{u}_i - u_i)^2 = Q(a, b)$ ,

为使  $Q$  最小, 则

$$\frac{\partial Q}{\partial a} = 0, \frac{\partial Q}{\partial b} = 0.$$

可得

$$\begin{cases} b = \frac{\sum_{i=1}^n (v_i - \bar{v})(u_i - \bar{u})}{\sum_{i=1}^n (v_i - \bar{v})^2} = b(c); \\ a = \bar{u} - b \cdot \bar{v} = a(c), \end{cases} \quad (2)$$

式中:  $u_i = \frac{1}{y_i+c}, \bar{u} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{y_i+c}, v_i = \frac{1}{x_i}, \bar{v} =$

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}.$$

### 1.2 确定参数 $c$

#### 1.2.1 参数 $c$ 的数值解

定义总偏差  $E = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - y_i)^2$ ,

则

$$E(c) = \sum_{i=1}^n \left( \frac{x_i}{b + a \cdot x_i} - c - y_i \right)^2, \quad (3)$$

为使  $E$  最小,则

$$\frac{\partial E}{\partial c} = 0,$$

即

$$\sum_{i=1}^n \left\{ \left( \frac{x_i}{b + a \cdot x_i} - c - y_i \right) \cdot \left[ \frac{x_i \cdot (b' + a' \cdot x_i)}{(b + a \cdot x_i)^2} + 1 \right] \right\} = 0.$$

令

$$f(c) = \sum_{i=1}^n \left\{ \left( \frac{x_i}{b + a \cdot x_i} - c - y_i \right) \cdot \left[ \frac{x_i \cdot (b' + a' \cdot x_i)}{(b + a \cdot x_i)^2} + 1 \right] \right\},$$

则问题转化为求解非线性方程

$$f(c) = 0.$$

采用牛顿切线法求解该非线性方程<sup>[3]</sup>.取一初值  $c_0$ ,进行如下迭代:

$$b_k = b(c_k);$$

$$a_k = a(c_k);$$

$$c_{k+1} = c_k - \frac{f(c_k)}{f'(c_k)} \quad (k=0, 1, 2, \dots),$$

式中:

$$f'(c) = \sum_{i=1}^n \left\{ \left[ \frac{-x_i \cdot (b' + a' \cdot x_i)}{(b + a \cdot x_i)^2} - 1 \right] \cdot \left[ \frac{x_i \cdot (b' + a' \cdot x_i)}{(b + a \cdot x_i)^2} + 1 \right] + \left( \frac{x_i}{b + a \cdot x_i} - c - y_i \right) \cdot \frac{x_i \cdot (b'' + a'' \cdot x_i)(b + a \cdot x_i) - 2(b' + a' \cdot x_i)^2}{(b + a \cdot x_i)^3} \right\}.$$

若  $|c_{k+1} - c_k| \leq \text{EPS}$ ,则迭代结束.且  $c = c_k, b = b_k, a = a_k$ .

### 1.2.2 参数 $c$ 的优选解

当牛顿迭代格式不满足收敛条件时,可采用下述方法确定参数  $c$ .

由 1.2.1 中的分析可知,参数  $c$  的确定问题亦即函数  $E(c)$  的最小值求解问题.而由式(2)、式(3)可知, $E$  与  $c$  的函数关系极为复杂,直接从函数的表达式中求解最小值是非常困难的.在实际工程应用中,可以通过描点绘制出函数  $E(c)$  的图像,利用图像优选出参数  $c$ .

由大量实例可得出函数  $E(c)$  的一般图形规律,如图 1 所示.对于定义域为  $(-\infty, +\infty)$  的实数  $c$ ,存在一振荡区间  $[c_{k1}, c_{k2}]$ ,在此区间内,函数取值变化很大;而在区间  $(-\infty, c_{k1}), (c_{k2}, +$

$\infty)$  内,函数值较为稳定,且当  $c \rightarrow -\infty$  或  $c \rightarrow +\infty$  时,函数值一般可收敛.

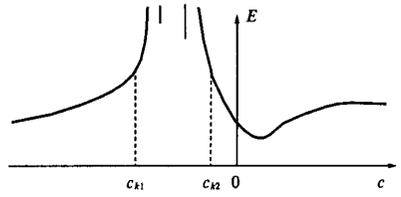


图 1  $E(c)$  函数图像

Fig. 1 Curve of function  $E(c)$

给定一初始区间  $[c_L, c_R]$ ,将其  $m$  等分,得  $m + 1$  个点:  $c_j = (c_R - c_L) \cdot \frac{j}{m} + c_L, (j = 0, 1, 2, \dots, m)$ .利用式(2)求出参数  $a_j, b_j$ ;利用式  $\hat{y} = \frac{x}{b_j + a_j \cdot x} - c_j$  求出  $\hat{y}$ ,从而得到总偏差  $E_j = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - y_i)^2$ .由  $(c_j, E_j)$  可作出函数  $E(c)$  在区间  $[c_L, c_R]$  内的图像.对于以下 3 个条件:①  $[c_{k1}, c_{k2}] \subset [c_L, c_R]$ ; ②  $|(E_0 - E_1) / E_1| \leq \epsilon$ ; ③  $|(E_m - E_{m-1}) / E_{m-1}| \leq \epsilon$ .若不能同时满足,应继续扩大  $c$  的取值区间  $[c_L, c_R]$ ,重新计算;若能同时满足,则一般可认为  $[c_L, c_R]$  已足够大,认为该图像即为函数  $E(c)$  在整个定义域内的图像.

令  $E_p = \min(E_0, E_1, E_2, \dots, E_m)$ ,则  $c_p$  即为参数  $c$  在区间  $[c_1, c_2]$  内的优选解,亦可近似认为是在整个定义域内的优选解,且  $c = c_p, b = b_p, a = a_p$ .

### 1.3 确定模型解

将三参数  $a, b, c$  的值代入式(1),即得模型解为

$$\hat{y}_i = \frac{x_i}{b + a \cdot x_i} - c \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

## 2 工程实例

下面以陆浑水库大坝 P29 测点的实测沉降量为例,对双曲线回归三参模型的理论及计算方法加以论证,并与其它模型加以比较.

陆浑水库大坝 P29 测点累计沉降量实测资料如表 1 中第 2~4 列,沉降量与历时关系曲线如图 2 中实线所示.

本例建立的双曲线回归三参模型为  $\frac{1}{y} = a + b \cdot \frac{1}{x}$ ,采用数值解确定参数  $c$ ,编制计算程序.取  $c_0 = 5.0, \text{EPS} = 10^{-5}$ ,经 10 次迭代结束: $c = 24.526$ .计算成果如表 1 中第 5,6 列所示.

为了便于论证,本例还分别建立了双曲线回归常用模型: $\frac{1}{y} = a + b \cdot \frac{1}{x}$ 、对数回归模型: $y = a + b \cdot \ln x$ , 灰色 GM(1, 1) 模型: $y^{(1)}(k+1) =$

$(y^{(0)}(1) - \frac{u}{a}) e^{-a \cdot k} + \frac{u}{a}$  [4,3] 并进行对比分析, 计算成果见表 1 中第 7~12 列所示.

表 1 双曲线回归三参模型与其它模型计算成果表

Tab. 1 Calculation result of hyperbola regression three-parameter model and other models

| 项目    | 序号 | 历时/d  | 累积沉降/mm | 双曲线回归三参模型  |       | 双曲线回归常用模型                           |        | 对数回归模型                            |        | 灰色 GM(1, 1) 模型                                 |       |
|-------|----|-------|---------|--|-------|-------------------------------------|--------|-----------------------------------|--------|--|-------|
|       |    |       |         | 计算值/mm   | 残差/%  | 计算值/mm                              | 残差/%   | 计算值/mm                            | 残差/%   | 计算值/mm   | 残差/%  |
|       | 1  | 4332  | 6.10    | 6.79   | 11.35 | 8.10                                | 32.74  | 6.02                              | -1.31  | 6.10   | 0.00  |
|       | 2  | 4697  | 9.50    | 8.75   | -7.87 | 9.05                                | -4.76  | 8.36                              | -12.00 | 10.41  | 9.57  |
|       | 3  | 5062  | 10.30   | 10.64  | 3.25  | 10.06                               | -2.34  | 10.53                             | 2.23   | 11.77  | 14.30 |
|       | 4  | 5428  | 12.40   | 12.45  | 0.41  | 11.14                               | -10.17 | 12.56                             | 1.29   | 13.14  | 5.94  |
|       | 5  | 5793  | 14.00   | 14.19  | 1.38  | 12.29                               | -12.22 | 14.44                             | 3.14   | 14.50  | 3.58  |
|       | 6  | 6158  | 16.90   | 15.87  | -6.09 | 13.52                               | -20.00 | 16.22                             | -4.02  | 15.87  | -6.12 |
|       | 7  | 6523  | 17.80   | 17.49  | -1.75 | 14.84                               | -16.64 | 17.89                             | 0.51   | 17.23  | -3.21 |
|       | 8  | 6889  | 19.90   | 19.05  | -4.27 | 16.26                               | -18.29 | 19.47                             | -2.16  | 18.59  | -6.57 |
|       | 9  | 7254  | 21.80   | 20.56  | -5.71 | 17.79                               | -18.4  | 20.96                             | -3.85  | 19.96  | -8.45 |
|       | 10 | 7619  | 23.00   | 22.01  | -4.31 | 19.44                               | -15.47 | 22.39                             | -2.65  | 21.32  | -7.30 |
| 拟合值   | 11 | 7984  | 22.00   | 23.41  | 6.42  | 21.24                               | -3.48  | 23.74                             | 7.91   | 22.69  | 3.12  |
|       | 12 | 8350  | 23.10   | 24.77  | 7.24  | 23.19                               | 0.40   | 25.04                             | 8.40   | 24.05  | 4.11  |
|       | 13 | 8715  | 24.10   | 26.08  | 8.23  | 25.32                               | 5.08   | 26.28                             | 9.05   | 25.41  | 5.45  |
|       | 14 | 9080  | 26.60   | 27.35  | 2.83  | 27.66                               | 0.99   | 27.47                             | 3.27   | 26.78  | 0.67  |
|       | 15 | 9445  | 28.20   | 28.58  | 1.36  | 30.24                               | 7.23   | 28.62                             | 1.49   | 28.14  | -0.20 |
|       | 16 | 9811  | 31.30   | 29.78  | -4.87 | 33.10                               | 5.74   | 29.72                             | -5.05  | 29.51  | -5.73 |
|       | 17 | 10176 | 31.30   | 30.93  | -1.18 | 36.27                               | 15.89  | 30.78                             | -1.66  | 30.87  | -1.37 |
|       | 18 | 10541 | 33.60   | 32.05  | -4.61 | 39.83                               | 18.55  | 31.80                             | -5.36  | 32.24  | -4.06 |
|       | 19 | 10906 | 32.40   | 33.14  | 2.27  | 43.84                               | 35.32  | 32.79                             | 1.20   | 33.60  | 3.71  |
|       | 20 | 11272 | 33.50   | 34.19  | 2.07  | 48.42                               | 44.53  | 33.74                             | 0.72   | 34.97  | 4.37  |
|       | 21 | 11637 | 35.70   | 35.22  | -1.35 | 53.65                               | 50.28  | 34.67                             | -2.89  | 36.33  | 1.76  |
| 预测值   | 22 | 12002 | 36.46   | 36.21  | -0.68 | 59.71                               | 63.76  | 35.56                             | -2.46  | 37.69  | 3.38  |
|       | 23 | 12365 | 37.60   | 37.17  | -1.14 | 66.76                               | 77.56  | 36.43                             | -3.12  | 39.06  | 3.88  |
| 参数值   |    |       |         | $a = 0.0077294$<br>$b = 104.84012$<br>$c = 24.526$ |       | $a = -0.043545$<br>$b = 723.645972$ |        | $a = -236.7501$<br>$b = 28.99157$ |        | $a = -2.2728 \times 10^{-5}$<br>$u = 60008.36$ |       |
| 总偏差 E |    |       |         | 21.10  |       | 820.87                              |        | 23.07                             |        | 25.48  |       |

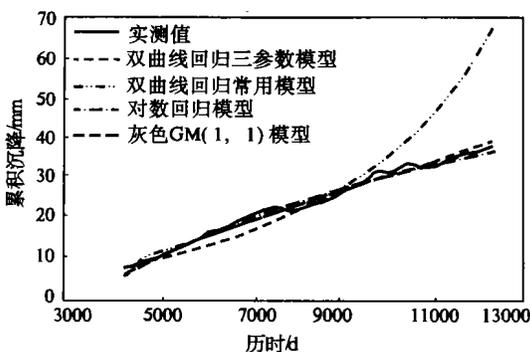


图 2 双曲线回归三参模型与其它模型计算成果对比图

Fig. 2 Calculation result contrast between hyperbola regression three-parameter model and other models

### 3 结论

(1) 对建立的双曲线回归三参模型与双曲线回归常用模型的计算成果进行对比分析(见图 2), 可以看出:前者建模精度较高, 建模效果好, 能确切反映土石坝沉降变化规律, 而后者由于参数少, 自身调节的灵活性差, 致使建模效果较差. 说明双曲线回归三参模型通过引入第三个参数, 确实增强了双曲线模型的自身调节、自身优化和自适应的能力, 使双曲线模型发挥了最佳的建模效果.

(2) 对建立的双曲线回归三参模型与对数回归模型、灰色模型的计算成果进行对比分析(见图 2), 可以看出, 对土石坝沉降观测资料建立此 3 种

数学模型均具有相当高的精度,均可以作为土石坝观测资料分析的常用方法.另外,从实例中的模型拟合精度及预测精度来看,建立双曲线回归三参模型还要略优于其它两种模型.

(3) 本文建立了双曲线回归三参模型,给出了建模原理的推导过程及各参数的确定方法,从理论上证明了该模型较之双曲线回归常用模型的优越性及合理性.并通过工程实例的各数学模型的对比分析,进一步论证了该模型的理论价值和实际意义,为原型观测资料分析提供了新的有实用价值的数学模型.

## 参考文献:

- [ 1 ] 吴中如.水工建筑物安全监控理论及其应用[M].南京:河海大学出版社,1990.
- [ 2 ] 白新桂.数据分析与实验优化设计[M].北京:清华大学出版社,1986.
- [ 3 ] 段银田,孟树锁.数值算法和程序过程[M].北京:海洋出版社,1993.
- [ 4 ] 贺北方,刘正才.灰色系统理论方法与应用[M].北京:气象出版社,1995.
- [ 5 ] 贺北方,吴泽宁,杨建水.复杂系统的灰色综合评估研究[J].郑州工业大学学报,1999,20(1):46-49.

## Study on Method of Analysis Based on Hyperbola Regression Three-parameter Model

LI Zong-kun<sup>1</sup>, ZHENG Jing-xing<sup>1</sup>, WANG Wei<sup>2</sup>

(1.College of Environmental & Hydraulic Engineering, Zhengzhou University, Zhengzhou 450002,China; 2.Hydraulic Science Research Institute of Henan, Zhengzhou 450003,China)

**Abstract**: In view of the shortcoming of the general hyperbola regression two-parameter model, this paper introduces the third parameter, establishes the hyperbola regression three-parameter model. The reliability of the modeling principle and rationality of the modeling method have been proven theoretically, and two kinds of methods to calculate each parameter are given. In the example of the observed data analysis of Luhun Dam settlement, the hyperbola regression three-parameter model, the general hyperbola regression model and other models have been established. The contrast analysis of the result shows that it is very effective in establishing such hyperbola regression three-parameter model.

**Key words**: mathematical model; hyperbola regression; settlement; earth-rock dam