文章编号:1007-6492(1999)03-0069-02

一类大型稀疏问题的齐次化算法

李学相[1], 安学庆[1], 苏 红[1], 苗晓虹[2]

(1.郑州工业大学数理力学系,河南 郑州 450002; 2.郑州纺织机械研究所,河南 郑州 450053)

摘 要: 基于行处理算法的思想,提出了一种用于求解一类大型稀疏问题的迭代算法,即齐次化法,讨论该算法的收敛性及稳定性.数值实验表明,该算法具有收敛速度快、计算精度高等特点.

关键词: 稀疏矩阵; 行处理; 齐次化

中图分类号: O 241.6　　**文献标识码**: B

0 引言

考虑下列问题

$$AX = b , \tag{1}$$

其中:A 是 $m \times n$ 非奇异稀疏矩阵,b 是 n 维向量.$A = [a_1, a_2, \cdots, a_n]$, $X = [x_1, x_2, \cdots x_n]^T$, a_i $(i = 1,2,\cdots,n)$是 A 的第 i 个列向量,式(1)可化为

$$AX = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = b . \tag{2}$$

从几何意义上看,求解方程组(2)的问题就是求向量 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的组合系数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的问题.当 A 非奇异时,即 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 线性无关,这些向量可组合成空间中任一向量.利用行处理算法的思想[1],让 b 向 a_1 向量投影得 a_1^0, 修正 b 得 $b_1 = b - a_1^0$,显然有 $\| b_1 \|_2 < \| b \|$;让 b_1 向 a_2 向量投影得 a_2^0, 修正 b_1 得 $b_2 = b_1 - a_2^0$,显然有 $\| b_2 \|_2 < \| b_1 \|_2$;…,如此反复下去,可知 $\| b_k \| \to 0 (k \to \infty)$,方程组(2)的右端向量不断减小,式(2)逐渐趋于齐次方程,同时通过上述迭代过程可求出式(2)的近似解.不妨形象地称此算法为齐次化法,其基本迭代过程描述如下.

1 齐次化算法(算法 1)[2]

记 $b^0 = b$, $X = 0$

(1) 求 $b^{(i-1)}$ 在 a_{k_i} 的投影 $\{ < b^{(i-1)}, a_{k_i} > / \| a_{k_i} \| \} \cdot a_{k_i}$;

(2) 修正 $b^{(i-1)}$, $b^{(i)} = b^{(i-1)} - \{ < b^{(i-1)}, a_{k_i} > / \| a_{k_i} \| \} \cdot a_{k_i}$;

(3) 迭代求解: $X + \{ < b^{(i-1)}, a_{k_i} > / \| a_{k_i} \| \} \cdot a_{k_i} \Rightarrow X$;

(4) 判别:如果 $\| b^{(i)} \|_2 < \epsilon$(精度要求),停机,否则转(1).这里 $k_i = i (\bmod n) (i = 1,2,\cdots, n,\cdots)$;$\epsilon$ 为精度.

2 算法改进

2.1 系数矩阵预处理

对于来源于用差分法或有限元法求解偏微分方程边值问题,系数矩阵 A 的各列常可分成若干组,使组内各列是互相正交的.例如:在 $\{0 \le x, y \le 1\}$ 区域上,用5点差分格式求解 Poisson 方程的边值问题时,如果取格网线数为3,则得9阶的方程组,其系数矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & & -1 & & & & & \\ -1 & 4 & -1 & & -1 & & & & \\ & -1 & 4 & & & -1 & & & \\ -1 & & & 4 & -1 & & -1 & & \\ & -1 & & -1 & 4 & -1 & & -1 & \\ & & -1 & & -1 & 4 & & & -1 \\ & & & -1 & & & 4 & -1 & \\ & & & & -1 & & -1 & 4 & -1 \\ & & & & & -1 & & -1 & 4 \end{bmatrix}_{9\times 9} . \tag{3}$$

可见,如下的列号分组{1,6},{2,7},{3,8},{4,9},{5}符合预期要求.

对于问题(1)中的稀疏阵 A,可按上述原则对

收稿日期:1999-02-03;**修订日期**:1999-05-21

作者简介:李学相(1965-),男,河南省淮阳县人,郑州工业大学讲师,硕士,主要从事计算机科学方面的研究.

其分组并标准化. 为简单计算,不妨把式(2)改写成

$$\sum_{k=1}^{t} a_k x_k = b , \quad (4)$$

其中:a_k 是列标准正交阵($k=1,2,\cdots,t$;t 是分块个数);x_k 是 X 的一些相应分量所组成的列向量.

2.2 分块齐次化算法(算法 2)[3]

下面给出式(4)的分块齐次化算法.

(1) 初始化,取 $b^{(1)}=b$,$X=0$ 精度为 EPS;

(2) 把 A 分块,使得每块 $a_k(k=1,2,\cdots,t)$ 都是列标准正交阵;

(3) 对 $i=1,2,3,\cdots$,

ⓐ令 $i_k=i-1(\mathrm{mod}\ t)$;

ⓑ$X+E_{i_k+1}a_{i_k+1}^{\mathrm{T}}b^{(i)}\Rightarrow X$;

ⓒ$b^{(i)}-E_{i_k+1}a_{i_k+1}^{\mathrm{T}}b^{(i)}\Rightarrow b^{(i+1)}$;

ⓓ如果($i_k=t-1$)$\wedge\|b^{(i)}\|_2<$ EPS,转步骤(4),否则转步骤(3);

(4) 输出 X.

其中:E_{ik} 是 E_i 中的列向量,E_k 是由一些相应于 a_i 的单位向量构成的排列阵. 对于算法 2,有如下收敛性定理:

定理 1 设 A 是非奇异稀疏阵,则算法 2 是收敛的.

证明 按算法 2 迭代一次后,方程组(4)右端向量化为

$$\tilde{b} = \prod (I - a_{i_k+1}a_{i_k+1}^{\mathrm{T}})b,$$

由于 $I-a_{i_k+1}a_{i_k+1}^{\mathrm{T}}$ 是射影阵,所以

$$\|\tilde{b}\|_2 \leqslant \|I-a_{i_k+1}a_{i_k+1}^{\mathrm{T}}\|_2\|b\|_2 \leqslant \|b\|_2.$$

现证上式中只有"<"成立,否则有

$$\prod (I - a_{i_k+1}a_{i_k+1}^{\mathrm{T}})b = b,$$

于是 $b^{\mathrm{T}}a_{i_k+1}=0$, $i_k=0,1,\cdots,t-1$.

又由 $[a_1,a_2,\cdots,a_t]$ 非奇异可推得 $b=0$,矛盾,故有 $\|\tilde{b}\|_2<\|b\|_2$.

3 算法讨论

算法 2 具有下列特点:

(1) 计算量小. 算法 2 迭代过程中的主要计算量花在计算 $a_{i_k+1}a_{i_k+1}^{\mathrm{T}}b^{(i)}$ 上,包括求出所有 $a_{i_k+1}a_{i_k+1}^{\mathrm{T}}b^{(i)}(i_k=0,1,\cdots,t-1)$ 总的乘法次数少于 $2np$,这里 p 是 A 的稀疏度.

(2) 运算速度快. 由于算法 2 对系数矩阵 A 进行了预处理,并充分利用了系数矩阵 A 的特点,使得算法 2 比算法 1 具有更快的运算速度.

(3) 保持稀疏性. 由于齐次化算法采用行处理算法的思想,每次只处理系数矩阵 A 的一列,而不改变 A 的原始特征,因而该算法具有保持 A 的稀疏性的特点.

(4) 稳定性好. 对 9 阶至 9000 阶矩阵做过数值实验,效果良好,特别是对对角占优阵,该算法效果更好.

参考文献:

[1] 熊西文. 数值代数[M]. 武汉:华中理工大学出版社,1983.

[2] CENSOR Y. Row - action method for huge and sparse systems and their applications[J]. SIAM Review, 1981, 23: 444 - 466.

[3] EIFVING E. Block - iterative methods for consistent and inconsistent linear equations[J]. Numer Math, 1980, 35: 23 - 30.

A Homogeneous Method for Solving Sparse System

LI Xue - xiang[1], AN Xue - qing[1], SU Hong[1], MIAO Xiao - hong[2]

(1. Department of Mathematics, Physics & Mechanics, Zhengzhou University of Technology, Zhengzhou 450002, China; 2. Research Institute of Zhengzhou Textile Machinery Factory, Zhengzhou 450053, China)

Abstract: In this paper, a new algorithm - block homogeneous method is given for solving sparse linear systems, using line processing method. The convergence and stability of this algorithm are discussed. The numerical experiments show that this algorithm has certain practical value.

Key words: sparse system; line processing; homogeneous