

从物理现象看导数的跃变

张建华 单 槟 龚谋达

(郑州工业大学数力系)(河南电力职工大学, 郑州, 450052)

摘 要 提供了 3 个关于突变的物理实例, 其数学描述均涉及到导数有跃变, 而原函数连续。

关键词 物理现象; 导数; 跃变

中图分类号 O172.1

一函数的导数在其定义域内的某点产生跃变(对多元函数, 其偏导数跃变), 在图象上, 函数的曲线在该点将形成 1 个角点。这反映了物理学中的一类突变现象, 本文就热学、电学和力学领域中这种突变的现象各举 1 例, 以说明数学物理思想的普适性。

1 相变和偏导数跃变

一定数量的水封装在容器中形成 1 个单元系, 以温度和压力为自变量时, 系统的化学势就是 T, P 的函数: $\mu = \mu(T, P)$ 。设图 1 是水的相图(仅考虑汽、液两相)。若压力保持在 P_0 不变, 由液相开始加热升温, 代表系统状态的点 L 在相图中沿水平线向右移动, 与汽化线交于 Q 点。 Q 点是系统从液相变为气相的相变点, 化学势 μ 在该点是连续的, 但其偏导数 $s = \frac{\partial \mu}{\partial T}$ 与 $v = \frac{\partial \mu}{\partial P}$ 将产生跃变, 其中熵 s 的间断表示潜热的吸收, 比容 γ 的间断表示摩尔体积的突然变化。从图 2 可见, 化学势函数 μ 在图 1 标出的相变温度 T_0 处形成角点(为简便起见, 图中只画了温度变量)。

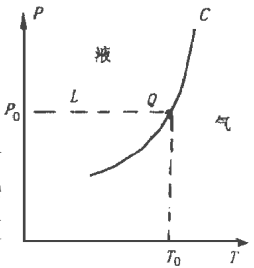


图 1 水相图

物理学家 Ehrenfest 将热力学势本身连续, 其第一阶导数不连续的状态突变, 称为一级相变(如上述的气液相变和在外磁场的超导转变等); 热力学势和其第一阶导数连续, 而第二阶导数不连续的状态突变, 称为二级相变(如铁磁性物质在温度升高时转变为顺磁性物质等); 并且推而广之: 凡是第 $K-1$ 阶以内导数连续, 而第 K 阶导数出现不连续的相变, 称为第 K 级相变^[1]。

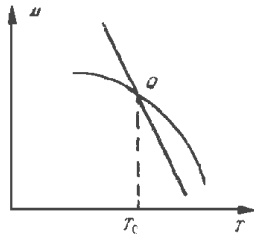


图 2 化学势和温度的关系

2 电路参数的突变和导数的跃变

由于线性电路的接通、切断、短路或电路结构突然改变(即换路)等, 电路中一些参数将连续变化(受能量不能突变的约束), 同时也会导致另外一些电路参数突变。换路定则关于线性电容部分的叙述是: 在换路瞬间, 当电容电流保持为有限值时, 电容上的电压是连续的,

收稿日期: 1997-09-04; 修改稿返回日期: 1998-03-12

第一作者 男 1946 年 2 月生 大学本科 副教授

但流过电容的电流可能产生突变。下面说明当电压对时间的导数在换路瞬间跃变时,流过电容的电流将产生突变。

若设换路时刻 $t=0$, 考虑到在任何时刻, 电容上的电压与电流具有关系^[2]

$$i_c = C \frac{du_c}{dt}$$

(1)

i_c 与 u_c 的参考方向见图 3。可以推测出电压在换路瞬间应具有有限的左、右导数 $u_-'(0)$ 及 $u_+'(0)$ 。这是因为左导数存在使 u_c 在 $t=0$ 左连续, 右导数存在使 u_c 在 $t=0$ 右连续, u_c 在 0 时刻既左连续又右连续, 等价于 u_c 在 $t=0$ 连续, 符合换路定则关于电压连续的结论。另外由式(1)可见, 当 $u_-'(0)=u_+'(0)$ 时, $i_c(0-)=i_c(0+)$, 电流 i_c 在 $t=0$ 连续; 当 $u_-'(0) \neq u_+'(0)$ 时, $i_c(0-) \neq i_c(0+)$, 电流 i_c 在 $t=0$ 产生突变, 符合换路定则关于电流可连续也可以突变的说法。在实际的电路换路现象中, 流过电容的电流常常是突变的, 从数学角度观察, 这种突变应归结于电压对时间的导数在换路瞬间的跃变。严格的数学证明可参考文献[3]。

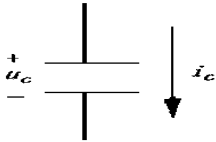


图 3 i_c 和 u_c 的参考方向

3 力学中的加速度突变

质点在运动过程中其加速度突变是由质点在其瞬间所受的合外力突变引起的, 这种突变现象在质点力学中时有出现。由于质点的运动常用能量积分、动量积分等积分过程来处理, 而对积分过程来说, 中间存在几个跃变间断点并不影响积分结果, 似乎加速度突变作为 1 种力学现象专门提出必要性不大, 但其数学物理机制与电路中的换路现象十分相似, 所以作为电路的力学类比是很合适的。请见图 4 所示之例。

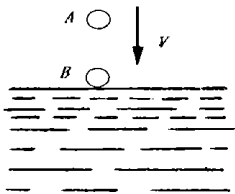


图 4 物体在不同介质中下落示意图

1 个物体在空中 A 点自由下落, 在 $t=0$ 时经过 B 点(空气与水的界面)平静入水, 然后在水中克服粘滞阻力作直线运动。考虑物体的下沉速率与时间的函数关系。

物体的加速度 $\frac{dv}{dt}$ 在 $t=0$ 时有个跃变, 这是因为物体在空中与在水中所受的合外力不同。但是这些合外力(重力、浮力和粘滞阻力)均是有限力, 所以加速度 $\frac{dv}{dt}$ 在 $t=0$ 点两侧是有限的, 即物体的速率在 $t=0$ 点存在左、右导数, 与电路中 u_c 的情形一致, 速率 v 在该点连续。由此可以确定物体下沉速率变化的初始条件, 实际上换路定则也是用来确定电路过渡过程的初始条件的。

综上所述, 我们说导函数的跃变代表了物理上 1 种突变模式, 因为它还意味着原来函数的连续。

参考文献

1 于渌, 郝柏林. 相变和临界现象. 北京: 科学出版社, 1984. 65~80

2 邱关源. 电路. 北京: 高等教育出版社, 1982. 13~18

3 菲赫金哥尔茨. 数学分析原理(第一卷, 第一分册). 北京: 人民教育出版社, 1959. 191~205

(下转 99 页)

Study on the preparation of Pd/C catalyst used to produce furan from furfural

Shi Jun

Wang Yaming

(Zhenqzhou University) (Institute of Solid State Physics)

Liu Jinting Zhao Wenjie

(Jilin Institute of Technology)

Abstract In this paper, the preparation of supported palladium catalyst used to produce furan from furfural is studied. The Pd/C catalyst is prepared by impregnation, calcination and activation. The optimum techniques for preparation of Pd/C catalyst is found through parallel and orthogonal tests.

Keywords catalyst ; palladium/ carbon; furfural; furan ;decarbonylation

(上接 91 页)

Leap of Derivative in Physical Phenomena

Zhang Jianhua Shan Bin

(Zhengzhou University of Technology)

Gong Mouda

(Henan Electric Power Vocation University)

Abstract This paper provides three examples of sudden change phenomenon involved leaps of derivative, and original function is continuous.

Keywords physical phenomenon ; derivative ; leap