第19卷 第3期 郑州工业大学学报 Vol.19 No.3
1998年 9 月 Journal of Zhengzhou University of Technology Sep. 1998

注塑模Z—MOLD系统中的曲面求交算法*

逯晓勤 曹 伟 余晓容 董斌斌 赵艳霞
(郑州工业大学橡塑模具研究所) (郑州工业高等专科学校,450003)

摘 要 介绍了曲面求交的关键算法,给出了高效的曲面求交初判方法,并对传统的交点有效性检验法进行了补充。

关键词 注塑模;曲面求交;离散法

中图分类号 TP39

注塑模Z—MOLD系统是注塑模结构设计CAE软件。几何造型模块是结构分析的基础,而曲面求交是几何造型中的核心问题,曲面间的裁剪、过渡、投影、联接等功能都依赖于它,求交的准确性和效率直接影响着造型的可靠性和实用性。曲面求交方法一般取决于曲面的描述形式。Z—MOLD系统中曲面的生成方法有4种:导动面、旋转面、直纹面及边界面。4种方法所构造的曲面除平面外均可视为基本造型体素的集合,如直线集面、弧集面、圆集面、样条集面,而自由曲面则可视为小三角平面片集。因此,Z—MOLD系统中的曲面求交问题主要是平面、柱面与基本体素集合面之间的求交问题。显然离散方法是处理这类曲面求交的最佳选择。

根据离散求交的基本思想,自由曲面间的求交运算实际上是对离散后的小三角平面片集对进行求交的,而平面与平面之间的求交则是平面的边界与另一平面的求交,即直线与平面的求交。所以平面、直线集面、样条集面及自由曲面间的求交皆为直线与平面的求交。同理,圆、弧集面与其它类型曲面的求交处理的是圆弧与平面的求交。柱面是1个二次曲面,与柱面的求交可归结为直线与柱面的求交。因此,直线与平面求交、圆弧与平面求交、直线与柱面求交是曲面求交中的3个基本函数,其算法思想及相关的初始判断方法和交点的有效性检验将在下面给以详细介绍。

1 初始判断的改进

在处理平面、自由曲面之间的求交时,本文给出1种简单快速的平面检测方法,对于被包围盒初判有交的小三角平面对再进行平面检测,排除掉包围盒相交而实际无交的小三角平面对,可以大大提高自由曲面的求交速度。具体方法如下:

①设两平面片的角点分别为 $\boldsymbol{p}_i, \boldsymbol{q}_j$($i=1,2,\cdots,n$; $j=1,2,\cdots,m$),当平面片为四边形时,$n, m=4$;当平面片为三角形时,$n, m=3$。

* 国家自然科学基金资助项目(19632004)
收稿日期:1998—01—20
第一作者 女 1958年2月生 硕士学位 副教授

取出1个平面的3个角点 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3$，建立其平面方程

$$A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \tag{1}$$

把 $\boldsymbol{q}_j (j=1,2,\cdots,m)$ 分别代入式(1)，得

$$f_j = A_1 x_j + B_1 y_j + C_1 z_j + D_1 \qquad (j = 1,2,\cdots,m)$$

如果所有 f_j 同号，说明由角点 $\boldsymbol{q_j}$ 定义的平面片在由角点 $\boldsymbol{p_i}$ 定义的平面的同一侧，两平面片无交。否则，进行第②步。

②取另一平面的3个角点 $\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \boldsymbol{q}_3$，建立其平面方程

$$A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \tag{2}$$

把 $\boldsymbol{p}_i (i=1,2,\cdots,n)$ 分别代入式(2)得

$$g_i = A_2 x_i + B_2 y_i + C_2 z_i + D_2 \qquad (i = 1,2,\cdots,n)$$

同样，所有的 g_i 同号，两平面无交；否则进行两小三角平面片的求交运算。

上述方法也可以运用到直线与平面求交的初判上，区别是当直线的两个端点在平面的同侧时无交，异侧时则可能有交，还要看交点是否落在定义平面的多边形有效区域之内。

2　点与平面有效区域相对位置的检验

直线与平面的交点 $\boldsymbol{p}$ 是否落在定义平面的多边形有效区域之内，是决定交点是否有效的关键。因为式(1)或式(2)定义的平面方程是1个无界平面，而几何造型中的平面或三角平面片均是有界区域，只有当交点落在有界区域之内，则认为直线与平面相交，否则不相交。一般进行自由曲面求交计算的平面片均是凸多边形，可采用适合凸多边形的叉积判断法来检验交点与多边形有效区域的相对位置。

文献[1]中给出的点与多边形相对位置的叉积判断法如图1所示，多边形顶点按顺序排列为 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p_n}$，令 $\boldsymbol{v_i} = \boldsymbol{p_i} - \boldsymbol{p} (i=1,2,\cdots,n)$，$\boldsymbol{v}_{n+1} = \boldsymbol{v}_1$，那么交点 $\boldsymbol{p}$ 在多边形内的充要条件是叉积 $\boldsymbol{v_i} \times \boldsymbol{v}_{i+1} (i=1,2,,n)$ 的符号相同。但仅此还远远不够，如果交点 $\boldsymbol{p}$ 在多边形的顶点上或在多边形的某条边上或边的延长线上，将有某个 $\boldsymbol{v_i}=0$，或某一叉积 $\boldsymbol{v_i} \times \boldsymbol{v}_{i+1}=0$，这将使得判断失效，所以在进行叉积法判断时，应考虑上述情况，图2给出了完整实用的叉积判断法。

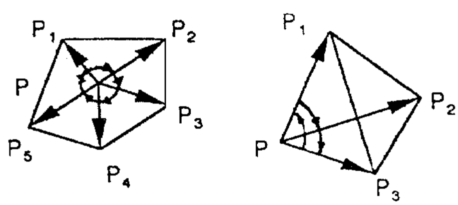


图1　叉积判断法

3　直线与平面求交算法

设直线端点分别为 $\boldsymbol{s}(x_s, y_s, z_s)$、$\boldsymbol{e}(x_e, y_e, z_e)$，平面方程为

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

其有效区域由凸多边形顶点 $\boldsymbol{p}_i (i=1,2,\cdots,n)$ 确定。其求交步骤为：

①根据上面介绍的初判方法，把 $\boldsymbol{s}, \boldsymbol{e}$ 代入平面方程，若结果同号，说明直线段在平面的同侧，直线与平面无交；否则进行第②步。

②设直线的方向矢量 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{e} - \boldsymbol{s}$，参数为 t 的直线方程为

$$\begin{cases} x = x_s + v_x t \\ y = y_s + v_y t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ z = z_s + v_z t \end{cases} \tag{3}$$

把式(3)代入平面方程

$$A(x_s + v_x t) + B(y_s + v_y t) + C(z_s + v_z t) + D = 0$$

即

$$(Av_x + Bv_y + Cv_z)t + (Ax_s + By_s + Cz_s + D) = 0$$

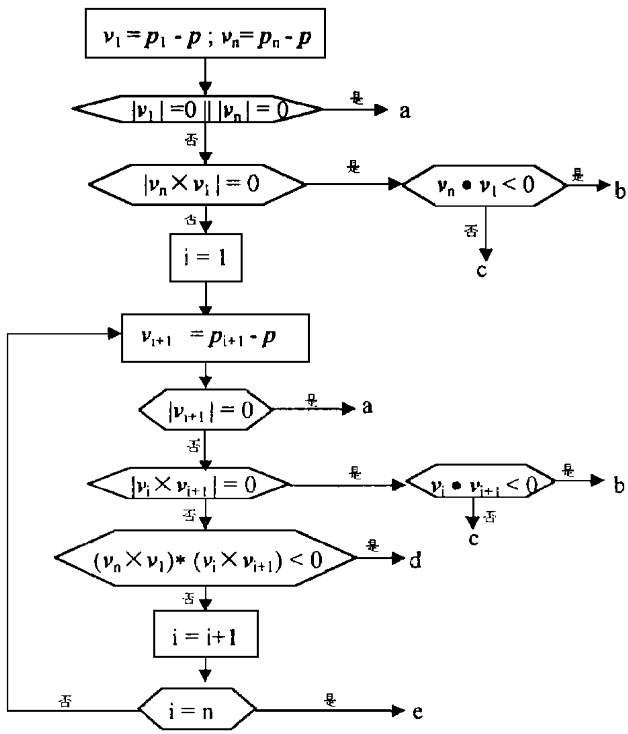
可得参数

$$t = -\frac{(Ax_s + By_s + Cz_s + D)}{(Av_x + Bv_y + Cv_z)}$$

把 t 代入式(3)即可求出交点 $\boldsymbol{p}(x, y, z)$。

③把 $\boldsymbol{p}$ 和 $\boldsymbol{p}_i$($i=1, 2, \cdots, n$)代入图 2 所示框图判断是否为有效交点。

该算法的步骤①，实际上排除掉了直线与平面平行($Av_x + Bv_y + Cv_z = 0$)及交点在直线的延长线上($t<0$ 或 $t>1$)两种情况，所以该算法快速高效。图 3 为自由曲面与直纹面求交示意图。



a. $\boldsymbol{p}$ 在多边形顶点上，有效； b. $\boldsymbol{p}$ 在多边形边上，有效；
c. $\boldsymbol{p}$ 在多边形边的延长线上，无效；
d. $\boldsymbol{p}$ 在多边形外，无效； e. $\boldsymbol{p}$ 在多边形内，有效；

图 2 完善的叉积判断法

4 圆、圆弧与平面求交算法[2]

设圆半径为 r，圆心为 $\boldsymbol{c}$，圆平面法矢为 $\boldsymbol{u}$；平面法矢为 $\boldsymbol{w}$，多边形顶点为 $\boldsymbol{p}_i$($i=1, 2, \cdots, n$)。其步骤为：

①初判

当 $\boldsymbol{u} /\!/ \boldsymbol{w}$ 时，无论圆是否落在平面上，均作无交处理；

计算圆心 $\boldsymbol{c}$ 到平面的距离 d，如果 $d>r$，无交。

②计算初始解

转换坐标系，使圆心 $\boldsymbol{c}$ 位于新坐标系的原点，$\boldsymbol{u}$ 与新坐标系的 z' 轴重合，记正转换矩阵为 M、逆转换矩阵为 M^{-1}。在新坐标系下的圆参数方程为

$$\begin{cases} x' = r\cos\theta \\ y' = r\sin\theta \\ z' = 0 \end{cases} \tag{4}$$

平面在新坐标系下的方程为

$$mx' + ny' + kz' + q = 0 \tag{5}$$

把式(4)代入式(5)，得

$$m r\cos\theta + n r\sin\theta + q = 0 \tag{6}$$

把 $\cos\theta = (1-\sin^2\theta)^{1/2}$ 代入式(6)，整理得

$$a\sin^2\theta + 2b\sin\theta + c = 0 \tag{7}$$

其中 $a = m^2 + n^2$；$b = n\dfrac{q}{r}$；$c = \dfrac{q^2}{r^2} - m^2$

当 $b^2 - ac \geqslant 0$ 时，有

$$\sin\theta_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}$$

舍去 $\sin\theta_{1,2}$ 中大于 1，小于 －1 的正弦值。

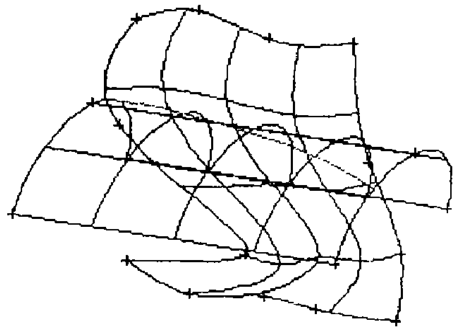


图 3　自由曲面与直纹面求交示意图

③确定角度的有效性

因为 $\sin(\pi-\theta) = \sin\theta$，当 θ 满足式(7)时，$\pi-\theta$ 也同时满足，哪个是有效角度还要代入式(6)进行检验。当 $m=0$ 时，θ 和 $\pi-\theta$ 都是有效角度；当 $m\neq 0$ 时，$\because \cos(\pi-\theta) = -\cos\theta$，只有满足式(6)的才是有效角度。

如果考察的是圆与平面的求交情况，执行⑤；否则执行④。

④检查有效角度是否在圆弧的张角之内

取出弧的张角 angle 以及弧的端点，算出弧的端点在新坐标系下相应的起始角 θ_s 和终止角 θ_e。为方便起见，待检查角度 θ 及 θ_s 和 θ_e 都取正值，且 θ_s 和 θ_e 也统一转换成逆时针方向排列。只有当 $\theta \geqslant \theta_s$ 同时 $\theta \leqslant \theta_s + \text{angle}$ 或者 $\theta \leqslant \theta_e$ 同时 $\theta_s + \text{angle} - \theta_e = 2\pi$ 时，θ 则在弧的张角之内，θ 才可视为有效角度。

⑤检查交点的有效性

把有效角度代入式(4)，得新坐标系下可能的交点 $\boldsymbol{p}'$，在原坐标系下可能的交点为 $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}' M^{-1}$，把 $\boldsymbol{p}$ 及平面多边形顶点 $\boldsymbol{p}_i$ 代入图 2，即可判断出 $\boldsymbol{p}$ 是否有效。图 4 为弧集面与平面求交示图。

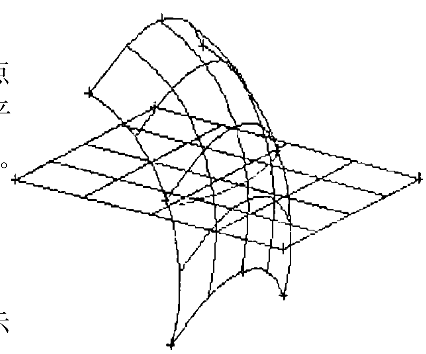


图 4　弧集面与平面求交示意图

5　直线与柱面求交算法

直线与柱面求交采用几何求交法。公式(3)所示直线方程的几何形式为

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{s} + \boldsymbol{v}t \tag{8}$$

对于半径为 $\boldsymbol{r}$，柱高为 $\boldsymbol{h}$，底面中心为 $\boldsymbol{c}$，对称轴方向为 $\boldsymbol{n}$ 的圆柱体，其几何定义为：

$$(\mathrm{p}-\mathrm{c})(\mathrm{p}-\mathrm{c}) - (\mathrm{n}\cdot(\mathrm{p}-\mathrm{c}))^2 - r^2 = 0 \tag{9}$$

$$\boldsymbol{n}\cdot(\mathrm{p}-\mathrm{c}) \geqslant 0 \tag{10}$$

$$\boldsymbol{n}\cdot(\mathrm{p}-(\mathrm{c}+\mathrm{hn})) \leqslant 0 \tag{11}$$

其求交步骤为：

①初判

把直线两端点 $\boldsymbol{s}$，$\boldsymbol{e}$ 代入式(9)，若均小于 0，说明直线位于柱面内腔，与柱面无交。

②求初始解

把式(8)代入式(9)

$$(\boldsymbol{s}+\boldsymbol{v}t-c)\cdot(\boldsymbol{s}+\boldsymbol{v}t-c)-(\boldsymbol{n}\cdot(\mathrm{s}+\mathrm{v}t-\boldsymbol{c}))^2-r^2=0$$

化简得

$$at^2+2bt+c=0 \tag{12}$$

其中

$$a=\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{v}-(\mathrm{n}\cdot\mathrm{v})^2;$$
$$b=\boldsymbol{v}\cdot(\mathrm{s}-\mathrm{c})-(\mathrm{n}\cdot\mathrm{v})(\mathrm{n}\cdot(\mathrm{s}-\mathrm{c}));$$
$$c=(\mathrm{s}-\mathrm{c})\cdot(\mathrm{s}-\mathrm{c})-(\mathrm{n}\cdot(\mathrm{s}-\mathrm{c}))^2-\boldsymbol{r}^2$$

当 $b^2-ac\geqslant 0$ 时,式(12)的解为

$$t_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-ac}}{a}$$

若 $t_{1,2}<0$ 或 $t_{1,2}>1$,说明交点在线段的延长线上,解无效;否则执行③。

③检查交点是否在柱面上

把②中的有效解 t 代入式(8),得直线与无界柱面的交点 $\boldsymbol{p}(\mathrm{t})$,把 $\mathrm{p}(\mathrm{t})$代入不等式(10),(11),同时满足两个不等式的 $\mathrm{p}(\mathrm{t})$,在柱面的有效范围之内,$\mathrm{p}(\mathrm{t})$有效。再用5中的④,检验交点是否在柱面的有效张角之内。图5为柱面与双线性面(直纹面的1种)求交示意图。

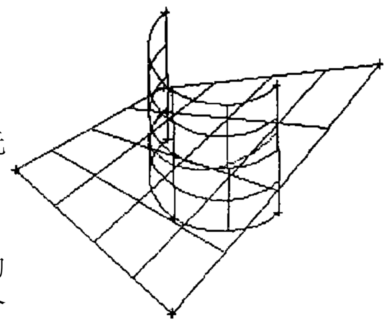


图5 柱面与双线性面求交示意图

6 结束语

上述交点初判方法、交点有效性检验方法及3个基本函数的算法,是曲面求交的关键所在,系统运行证明,方法高效可靠。

参考文献

1 孙家光,杨长贵.计算机图形学.北京:清华大学出版社,1996.388~508

2 施法中.计算机辅助几何设计与非均匀有理B样条(CAGD & NURBS).北京:北京航空航天大学出版社,1994.50~59

The Algorithm of Surface/Surface Intersection on Injection Molding Z—mold System

Lu Xiaoqin Cao Wei Yu Xiaorong Dong Binbin

(*Zhengzhou University of Technology*)

Zhao Yanxia

(*Zhengzhou Mechanical Institute*)

Abstract Finding the intersection of two surfaces is important for computer—aided engineering concerned with the surface modeling. An adaptive algorithm of plane detection is developed for first—step determining surface/surface intersection, which is efficient, convenient and speedy.

Keywords injection molding; surface/surface intersection; division algorithm