

节水型洗衣机设计的数学模型

贾军国 王书彬 钟燕辉 兰海洋 蒋雪根

(郑州工业大学数力系)

摘 要 以节水为出发点,根据洗衣机的工作原理,经对有关指标进行分析、假设和量化,建立了两个动态规划数学模型。鉴于衣物的尘污程度和洗涤的干净程度本属模糊概念,为便于评价、识别,模型 I、II 中分别引入了两个阈值 α_0 、 β_0 ,从而实现对衣物在洗涤中的尘污比及尘污量进行控制。厂家可由不同要求确定阈值大小,即可由模型得相应的最佳节水洗衣程序。

关键词 节水型洗衣机;数学模型;动态规划;阈值

中图分类号 O 29

1 问题的提出与分析

我国淡水资源有限,节约用水人人有责。洗衣服在家庭用水中占有相当大的份额,因此节约洗衣机用水十分重要。假设在放入衣物和洗涤剂后洗衣机的运行过程为:加水—漂洗—脱水;加水—漂洗—脱水;…;加水—漂洗—脱水(称“加水—漂洗—脱水”为运行一轮)。我们需要解决的问题就是在满足一定洗涤效果的条件下,确定一次洗涤衣物所需运行的轮数和每轮加水量,使总的用水量最少从而达到节水的目的。

目前,洗衣机的类型较多,但它们的工作原理基本相同:一方面靠各种机械力(包括水的上下翻滚、涡旋与器壁相撞产生的力)的作用去污;另一方面这种机械力又加强了洗涤剂对尘污的湿润、乳化、分散、增溶和脱离等基本去污功效。整个洗涤过程,我们可认为洗涤剂能和衣物上的全部尘污充分发生反应,使之乳化为可溶于水的微粒,并且在各轮清洗中,该微粒在各种机械力的作用下均匀扩散到水中。

对于衣物的洗涤效果,我们可以分别从洗涤后衣物上尘污的相对含量和绝对含量两方面进行考虑。

2 问题的假设

根据问题的背景和考虑问题简便起见,我们作如下几点假设:

(1) 洗涤剂一次性加入,即洗衣机的整个洗衣过程为一轮洗涤(加洗涤剂),多轮清洗(不加洗涤剂);

* 本文系 1996 年全国大学生数学建模竞赛全国一等奖论文整理缩写而成

收稿日期:1997—05—27;修改稿返回日期:1997—09—03

第一作者 男 1962 年生 硕士学位 副教授

- (2) 洗涤剂的加入量适当,即洗涤剂能与衣物上的全部尘污发生反应,生成溶于水的乳
化微团,但不过量,不转变成尘污;
- (3) 每一轮漂洗中,残留于衣物中的尘污成分都能均匀扩散到水中;
- (4) 衣物中所含尘污的体积和重量相对于水来说可忽略;
- (5) 每一轮漂洗后水溶液密度近似取为 1 千克/升。

3 模型的建立与求解

对于衣物的洗涤效果,我们可从衣物洗涤后所含尘污的相对含量进行评价。先给出如
下定义:

尘污比:第*n* 轮漂洗脱水后衣物上所含尘污量 *m_n* 与未洗涤前衣物上所含尘污量 *m₀* 之
比,记为 *α*。

即
$$\alpha = \frac{m_n}{m_0}$$

衣物的尘污程度和洗涤的干净程度本是模糊的概念,为便于评价,我们引入尘污比阈值
α₀,并认为当 *α* ≤ *α₀* 时,使达到了洗涤效果。

这里先解释一下洗衣机的一个性能参数:

脱水率 洗涤前干衣物重量与脱水后衣物重量之比值,即

$$r = \frac{W_d}{W_w}$$

式中 *r* ——洗衣机的脱水率,为常数;

W_d ——洗涤前干衣物的重量;

W_w ——脱水后衣物的重量。

脱水后衣物所含尘污水溶液的体积为

$$V_c = \frac{W_w - W_d}{\rho} = \frac{\frac{W_d}{r} - W_d}{\rho} = W_d(\frac{1}{r} - 1)$$

式中 *V_c* ——脱水后衣物所含水溶液的体积;

ρ ——水溶液的容重,取 *ρ*=1kg/L。

根据假设 3 可知第*i* 轮漂洗过程中,水溶液所含的尘污量应等于(*i* - 1) 轮漂洗脱水后衣
物中所含尘污量,于是

$$m_i = \frac{m_{i-1} \cdot V_c}{V_i + V_c}$$

递推可得
$$\begin{aligned} m_n &= \frac{m_{n-1} \cdot V_c}{V_n + V_c} = \frac{m_{n-2} \cdot V_c^2}{(V_n + V_c)(V_{n-1} + V_c)} \\ &= \dots = \frac{m_0 \cdot V_c^n}{(V_n + V_c)(V_{n-1} + V_c) \dots (V_2 + V_c) \cdot V_1} \end{aligned}$$

式中 *m_i* ——第*i* 轮漂洗脱水后衣物中所含尘污量 (2 ≤ *i* ≤ *n*) ;

m₀ ——未洗涤前衣物所含尘污量

所以有
$$\alpha = \frac{m_n}{m_0} = \frac{V_c^n}{V_1 \cdot (V_2 + V_c) \cdots (V_n + V_c)}$$

要达到洗涤效果,则尘污比

$$\alpha = \frac{V_c^n}{V_1 \cdot (V_2 + V_c) \cdots (V_n + V_c)} \leq \alpha_0$$

洗衣机的用水量跟机器性能有关,有两个限制:

(1) 保证洗及机能正常运转的最小水量 V_{\min} ;

(2) 受洗衣缸容量限制的最大水量 V_{\max} ;

其中保证洗衣机正常运转的最小水量 V_{\min} 与需洗涤衣物的重有关,可以满足关系

$$V_{\min} = a + b \cdot W_d$$

根据以上分析,我们首先建立模型 I 如下:

目标函数
$$min f = \sum_{i=1}^n V_i$$

约束条件
$$V_{\min} \leq V_i \leq V_{\max}, \quad V_{\min} + V_c \leq V_1 \leq V_{\max} + V_c$$

$$V_c = W_d \frac{1}{r} - 1$$
$$V_{\min} = a + b \cdot W_d$$
$$\frac{V_c^n}{V_1 \cdot (V_2 + V_c) \cdots (V_n + V_c)} \leq \alpha_0$$

f : 总的用水量;

V_i : 各轮加水量 ($1 \leq i \leq n$) 。

该模型的求解需要确定洗涤轮数 n 和各轮加水量 V_i ($1 \leq i \leq n$) ,使总用水量 f 最少。我们利用求极值的思想,在固定 n 的情况下,求出局部最优解,再以 n 为变量,求出全局最优解。

对于一定的 n ,根据

定理 对于 $V_{x1}, x_2, \cdots, x_m \geq 0$,有

$$x_1, x_2, \cdots, x_m \geq m \sqrt{x_1, x_2, \cdots, x_m}$$

当且仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_m$ 时,取等号。

对目标函数进行变换

$$f = \sum_{i=1}^n V_i = V_1 + (V_2 + V_c) + \cdots + (V_n + V_c) - (n - 1) V_c$$

有
$$f \geq n \sqrt{V_1 + (V_2 + V_c) \cdots (V_n + V_c)} - (n - 1) V_c$$

又由约束条件

$$\frac{V_c^n}{V_1 (V_2 + V_c) \cdots (V_n + V_c)} \leq \alpha_0$$

可得
$$V_1 + (V_2 + V_c) \cdots (V_n + V_c) \geq \frac{V_c^n}{\alpha_0}$$

所以
$$f \geq n \sqrt{V_1 + (V_2 + V_c) \cdots (V_n + V_c)} - (n - 1) V_c$$

$$\geq n \sqrt[n]{\frac{V_c^n}{\alpha_0}} - (n - 1) V_c = n \left(\frac{1}{\sqrt[n]{\alpha_0}} - 1 \right) V_c + V_c$$

当 $V_1=V_2+V_c=\dots=V_n+V_c=\frac{V_c}{\sqrt[n]{\alpha_0}}$ 时取等号,此时

$$minf=n(\frac{1}{\sqrt[n]{\alpha_0}}-1)V_c+V_c\tag{*}$$

当视 n 为变量时,(*) 式对 n 求导

$$\begin{aligned}\frac{df}{dn}&=V_c(\frac{1}{\sqrt[n]{\alpha_0}}-1)'+V_c\frac{Ln\alpha_0}{n^{\frac{1}{n}}\sqrt[n]{\alpha_0}}\\ \frac{d^2f}{dn^2}&=\frac{V_c}{n^3}\frac{Ln\alpha_0}{\sqrt[n]{\alpha_0}}\\ &\because 0<\alpha_0<1,n>0\\ &\therefore \frac{d^2f}{dn^2}>0\\ &\text{又}\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{df}{dn}=0\\ &\therefore \frac{df}{dn}<0\end{aligned}$$

可知 f 在 $n\in(0,+\infty)$ 上单调递减。这说明在没有边界条件限制下,漂洗轮数越多,总用水量 f 越小。

考虑极限情况:

$$\text{当 } n\rightarrow\infty \text{ 时 } \sqrt[n]{\alpha_0}\rightarrow 1\quad (0<\alpha_0<1)$$

由罗必塔法则可求得

$$\lim_{n\rightarrow\infty}f=(1-Ln\alpha_0)V_c$$

此时 $V_1\rightarrow V_c,V_2=V_3=\dots=V_n\rightarrow 0$

事实上,用户要使用水量最小,则要求每一滴水都充分利用,即使脱去的水溶液含污量尽量大,极限情况正说明了这一点。

当有边界约束时

由 $V_2=V_3=\dots=V_n=\frac{V_c}{\sqrt[n]{\alpha_0}}-V_c\geqslant V_{min}$

得
$$n\leqslant \frac{\ln\frac{V_c}{V_c+V_{min}}}{\ln\alpha_0}$$

令
$$n_0=\left\lceil \frac{\ln\frac{V_c}{V_c+V_{min}}}{\ln\alpha_0}\right\rceil$$

符号“ $[Z]$ ”表示取不大于 Z 的最大整数。

当 $n=n_0$ 且无边界约束时最小用水量为

$$f^{[n_0]}=n(\frac{1}{\sqrt[n_0]{\alpha_0}}-1)V_c+V_c$$

当 $n=n_0+1$ 时,必然有各轮加水量为 V_{min} ,使总用水量最小,为

$$f^{[n_0+1]}=(n_0+1)V_{min}+V_c$$

模型的解与下面两个条件有关

- (1) $V_i^{[n_0]} = \frac{V_c}{\sqrt[n_0]{\alpha_0}} \leq V_{max} \quad (2 \leq i \leq n)$
- (2) $f^{[n_0]} \leq f^{[n_0+1]}$
- $V_i^{[n_0]} f^{[n_0]}$:洗 n_0 轮无边界约束时第 i 轮加水量和总的用水量 $(2 \leq i \leq n)$;
- $V_i^{[n_0+1]} f^{[n_0+1]}$:洗 (n_0+1) 轮第 i 轮加水量和总的用水量 $(2 \leq i \leq n)$ 。
- 当条件(1) 、(2) 同时满足时,模型的解为:

$$n = n_0$$
$$V_1 = \frac{V_c}{\sqrt[n_0]{\alpha_0}}$$
$$V_2 = \dots = V_n = \frac{V_c}{\sqrt[n_0]{\alpha_0}} - V_c$$

可 知
$$f = n_0 \left[\frac{1}{\sqrt[n_0]{\alpha_0}} - 1 \right] V_c + V_c$$

当条件(1) (2) 不能同时满足时,模型的解为:

$$n = n_0 + 1$$
$$V_1 = V_{min} + V_c$$
$$V_2 = \dots = V_n = V_{min}$$
$$f = (n_0 + 1) V_{min} V_c^+$$

模型 I 的结果与实际情况有很多相同之处,但其对洗涤效果采用衣物的尘污比进行评价,有一些不妥之处。因为采用尘污比阈值进行控制,会使原来很脏的依物洗涤后不能达到用户要求的干净程序;而对较干净的衣物用相同的尘污比阈值进行控制,又没有必要。因此我们考虑采用衣物上尘污的绝对含量评价洗涤效果。

设衣物的总表面积为 S ,衣物上的尘污量显然应与其表面积 S 成正比,也与衣物的重量 W_d 成正比,可设

$$m_0 = K W_d S$$

第 n 轮洗涤后,衣物上尘污可认为均匀分布于表面,与面积 S 成正比

$$m_n = \beta S$$

- 式中 k ——尘污系数
- β ——衣物的单位面积尘污量

则

$$\frac{m_n}{M_0} = \frac{\beta}{k W_d S} = \frac{\beta}{K W_d}$$
$$\beta = K W_d \frac{m_n}{m_0} = \frac{k W_d V_c^n}{V_1 (v_2 + V_c) \dots (V_n + V_c)}$$

引入衣物单位面积尘污量阈值 β_0 ,并认为当 $\beta \leq \beta_0$ 时,达到洗涤效果。
建立模型 II 如下:

目标函数 $min f = \sum_{i=1}^n V_i$

结束条件 $V_{min} \leq V_i \leq V_{max}$, $V_{min} \leq V_c \leq V_1 \leq V_{max} + V_c$ ($1 \leq i \leq n$)

$$\begin{aligned} V_c &= W_d(\frac{1}{r} - 1) \\ V_{min} &= a + b \cdot W_d \\ \frac{k \cdot W_d \cdot V_c^n}{V_1(V_2 + V_c) \cdots (V_n + V_c)} &\leq \beta_0 \end{aligned}$$

模型Ⅱ的求解方法与结果类同于模型Ⅰ,略。

4 模型结果的数据比较与应用

每次洗涤的衣物量,由资料统计可得如下四个期望值:

- Wd₁=1kg 单身家庭一次所洗衣量
- Wd₂=1.5kg 三口之家一次所洗衣量
- Wd₃=2kg 五口之家一次所洗衣量
- Wd₄=3kg 洗较重的衣物如毛毯等

衣物的尘污系数

K₁=0.05 较脏衣物 K₂=0.02 一般衣物 K₃=0.01 较净衣物

衣物单位面积尘污量阈值 $\beta_0=0.0001$

洗衣机最大用水量取为 $V_{max}=50$ 升

洗衣机脱水率 $r=50\%$

由数据统计,借助 **Mat he matica** 软件包拟合得洗衣机最小用水量 $V_{min}=17.9515+6.7633W_d$ 升,模型Ⅰ的求解结果见表 1

表 1 模型Ⅰ的求解结果(取整)

尘污比阈值	洗涤量			
	1kg	1.5kg	2kg	3kg
$\alpha_0=0.01$	$n=2$ $f=49L$ $v_1=25L$	$n=2$ $f=56L$ $v_1=28L$	$n=2$ $f=63L$ $v_1=31L$	$n=2$ $f=76L$ $v_1=38L$
	$n=2$ $f=49L$ $v_1=25L$	$n=2$ $f=56L$ $v_1=28L$	$n=2$ $f=63L$ $v_1=31L$	$n=2$ $f=82L$ $v_1=42L$
	$n=3$ $f=74L$ $v_1=25L$	$n=3$ $f=84L$ $v_1=28L$	$n=3$ $f=94L$ $v_1=31L$	$n=2$ $f=115L$ $v_1=38L$

用户根据自己所洗衣物的重量和尘污程度选择相应的洗衣操作程序。

模型Ⅱ求解的洗衣机运行程序结果见表 2。

表 2 模型Ⅱ 求解结果(取整)

尘污系数	洗涤量			
	1kg	1.5kg	2kg	3kg
k=0.01 (较干净)	n=2	n=2	n=2	n=2
	f=49L	f=56L	f=63L	f=76L
	v ₁ =25L	v ₁ =28L	v ₁ =31L	v ₁ =38L
k=0.02 (一般)	n=2	n=2	n=2	n=2
	f=49L	f=56L	f=63L	f=82L
	v ₁ =25L	v ₁ =28L	v ₁ =31L	v ₁ =42L
k=0.005 (较脏)	n=2	n=2	n=2	n=3
	f=49L	f=56L	f=71L	f=115L
	v ₁ =25L	v ₁ =28L	v ₁ =37L	v ₁ =38L

从表中数据来看,随衣物的尘污程度和洗衣量的增加,用水量呈增大趋势,这与实际相符。

以下为两种不同型号洗衣机的洗衣程序:

表 3 三洋牌全自动洗衣机洗衣程序

洗 涤 量	每轮用水量	轮 数	总用水量
5kg	52L	3	156L
3kg	41L	3	123L
1.8kg	30L	3	90L
0.5kg	22L	3	66L

表 4 小天鹅牌全自动洗衣机洗衣程序

洗 涤 量	每轮用水量	轮 数	总用水量
3kg	35L	3	105L
2kg	32L	3	96L
1.5kg	28L	3	84L
1kg	24L	3	72L

模型的求解结果与目前常用洗衣机相比,总的用水量少,表明了模型的优越性。
厂家可在洗衣机的操作板上,按衣物的重量 W_d 和尘污程序(k) 设置按钮如下表。

表 5 按衣物重量和尘污程序设置按钮

	少 量	适 量	大 量
一 般	C ₁₁	C ₁₂	C ₁₃
较 脏	C ₂₁	C ₂₂	C ₂₃

C_{ij} : 对应于衣物的尘污程度和重量组合 (K_i, W_j) 由模型Ⅱ 所得运行程序的开关按钮
用户根据具体情况, 按一下相应的按钮, 洗衣机就按相关程序运行。
对于手工洗涤衣物, 模型也具指导意义, 那就是每轮用水尽量少, 每轮把衣物中的水尽量拧干, 多漂洗几轮, 可使达到相同干净程度的洗涤总用水量减少。

参考文献

1 盛福·身边的科学:轻工业出版社·1987 年第一版
2 中国青年出版社·青年家用机械电器手册:中国青年出版社·1985 年第一版
3 机械工程手册·电机工程手册编辑委员会·电机工程手册:机械工业出版社·1982 年第一版
4 福建科学技术出版社·家用机械电器手册:福建科学技术出版社·1982 年第一版
5 自主,东放,邵军,无一·新编家用电器 800 问:兵器工业出版社·1991 年第一版

Mathematic Models Designed in Water-saving Washers

Jia Junguo Wang Shubin Zhong Yanhui Lan Haiyang Jiang Xuegen
(Zhengzhou University of Techuology)

Abstract From the viewpoint of saving water ,two dynamic programming mathematic models are developed after analysizing , assuming and quantifying some related indexes , based on the working principle of washers .Because the dirt degree of clothes and neat degree for washing are fuzzy conceptions ,threshold value x_0 is introduced in model i and threshold value β_0 in model Ⅱ to simplify the evaluating and identifying process ,therefore control of dirt ratio and dirt quantity in washing colthes can be carried out .The washer factories can determine the threshold values α_0 and β_0 and then the models will give the corresponding optimal water-saving programs .
Keywords water-saving washer ;mathematic model ;dynamic programming ;threshold value