第19卷 第1期 郑州工业大学学报 Vol.19 No.1
1998年 3 月 Journal of Zhengzhou University of Technology Mar. 1998

波动方程一阶导数系数反问题解的整体稳定性

吕延华

(河南教育学院,郑州,450003)

摘 要 文献[1]研究了波动方程一阶导数系数反问题解的局部存在性、唯一性与局部稳定性。本文利用波动方程解的特征线性质将文献[1]的局部稳定性结论推广至整体稳定性。

关键词 反问题;特征线;整体稳定性

中图分类号 O175.22

1 问题

本文考虑文献[1]中的波动方程:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+q(x)\dfrac{\partial u}{\partial x}=0 & -\infty<x<+\infty \quad t>0 & (1.1)\\
u|_{t=0}=\varnothing(x),\ u_t|_{t=0}=\psi(x) & -\infty<x<+\infty & (1.2)\\
u|_{x=x_0}=f_1(t),\ u_x|_{x=x_0}=f_2(t) & t>0 & (1.3)
\end{cases}
$$

由 $\varnothing(x)$、$\psi(x)$、$f_1(x)$、$f_2(x)$来确定函数偶(u,q)的反问题。

由于稳定性对于算法设计的有效性有着重要的理论意义,因而本文着重研究其整体稳定估计问题,在文献[1]的基础上,利用波动方程解的特性给出了整体稳定估计。

2 一些引理及记号

为了本文的完整性,我们给出一些必要的结论和记号。

对于给定的(x_0,t_0),记

$\triangle(x_0,t_0)=\{(x,t)\mid x_0-t_0+t\leqslant x\leqslant x_0+t_0-t\}$

引理2.1 若对 $t_0=0$, $\varnothing(x)\in C^2[x_0-t_0,x_0+t_0]$, $\psi(x)\in C^1[x_0-t_0,x_0+t_0]$, $f_1(t)\in C^2[0,t_0]$, $f_2(t)\in C^1[0,t_0]$, $\varnothing(x_0)=f_1(0)$, $\psi(x_0)=f_1'(0)$, $\varnothing'(x_0)=f_2(0)$, $\psi'(x_0)=f_2'(0)$,且$|\psi'(x)|\geqslant\alpha>0$,对 $x\in[x_0-t_0,x_0+t_0]$,某个 $\alpha>0$ 成立,那么存在 h, $0<h\leqslant t_0$,使反问题在$[x_0-h,x_0+h]$上解存在、唯一,且 $q(x)\in[x_0-h,x_0+h]$。

引理2.2 在引理1的条件下,若反问题的解存在,且 $q(x)\in C(x_0-t_0,x_0+t_0)$,则它是

收稿日期:1996-10-09;修改稿返回日期:1997-06-12

第一作者 女 1963年10月生 学士学位 讲师

唯一的。

上述二个引理的证明见[1]。

若记 $V(x,t)=\frac{\partial u}{\partial x}$, $q_0(x)=\frac{1}{\psi'(x)}\Big[-f_1''(|x-x_0|)-f_2'(|x-x_0|)$

$\cdot\, sign(x-x_0)+\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+sign(x-x_0)\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}\right)u_0(x,t)\,\Big|\, x=0,\ t=|x-x_0|\Big]$

$$u_0(x,t)=\frac{1}{2}[\varnothing(x+t)+\varnothing(x-t)]+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}\psi(\xi)\,d\xi$$

$$\nabla^*(x,t)=\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}u_0(x,t)-\frac{1}{2}[q_0(x+t)\varnothing'(x+t)-q_0(x-t)\varnothing'(x-t)]$$

则有

引理 2.3　在引理 1 的条件下，关于 q(x) 和 $V_t(x,t)$ 成立如下封闭方程组：

$$q(x)=q_0(x)+\frac{1}{\varnothing'(x)}\int_{x_0}^{x}q(\xi)V_t(\xi,|\xi-x|)\,sign(x_0-x)\,d\xi\quad x\in[x_0-t_0,x_0+t_0]\tag{2.1}$$

$$V_t(x,t)=\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}u_0(x,t)-\frac{1}{2}[q(x+t)\varnothing'(x+t)-q(x-t)\varnothing'(x-t)]$$
$$-\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}[q(\xi)V_t(\xi,t-|x-\xi|)\ sign(\xi-x)\,d\xi\tag{2.2}$$

其中 $(x,t)\in\triangle(x_0,t_0)$

证明　利用熟知的波动方程解的 d′Alembent 公式及反问题解的补充条件(1.3)很容易得到(2.1)和(2.2)。

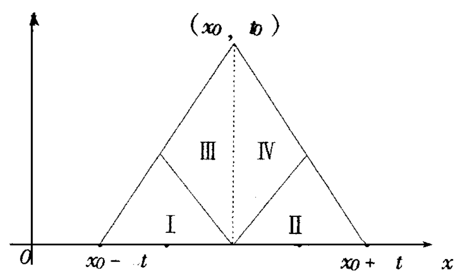

图 1 定义区域的分块区域图

3　整体稳定性

为了推出整体稳定性，首先将(2.2)进行简化

引理 3.1　(2.2)式等价于如下方程：

$$V_t(x,t)=\nabla^*(x,t)+\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}q(\xi)V_t(\xi,|x+t-\xi|)\,sign(x+t-\xi)\,d\xi+$$
$$\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}q(\xi)V_t(\xi,|x-t-\xi|)\,sign(\xi-x+t)\,d\xi\tag{3.1}$$

证明　为了由(2.2) 推出(3.1)，将 $\triangle(x_0,t_0)$ 分为四个区域来讨论，如图 1：

(1) $x+t\leqslant x_0$，此时由于 $t>0$，从而 $x\leqslant x_0$, $x-t\leqslant x_0$，将(2.1) 代入(2.2) 得

$$V_t(x,t)=\nabla^*(x,t)+\frac{1}{2}\int_{x+t}^{x_0}q(\xi)V_t(\xi,\xi-(x+t))\,d\xi-$$
$$\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x_0}q(\xi)V_t(\xi,\xi-(x-t))\,d\xi+\int_{x-t}^{x}q(\xi)V_t(\xi,t-(t-\xi))\,d\xi-$$
$$\frac{1}{2}\int_{x}^{x+t}q(\xi)V_t(\xi,t-(\xi-x))\,d\xi$$

由于 $\int_{x-t}^{x_0}q(\xi)V_t(\xi,\xi-(x-t))\,d\xi=$

$\int_{x-t}^{x_0} q(\xi) V_t(\xi, \xi-(x-t)) d\xi + \int_{x_0}^{x} q(\xi) V_t(\xi, \xi-(x-t)) d\xi$

所以　$V_t(x,t) = \nabla^* + \frac{1}{2}\int_{x+t}^{x_0} q(\xi) V_t(\xi, \xi-(x+t)) d\xi$

$-\frac{1}{2}\int_{x}^{x_0} q(\xi) V_t(\xi, \xi-(x-t)) d\xi - \frac{1}{2}\int_{x}^{x+t} q(\xi) V_t(\xi, t-(\xi-x)) d\xi$

$= \nabla^* + \frac{1}{2}\int_{x+t}^{x_0} q(\xi) V_t(\xi, |\xi-(x+t)|) sign(\xi-(x+t)) d\xi$

$+\frac{1}{2}\int_{x}^{x+t} q(\xi) V_t(\xi, |\xi-(x+t)|) sign(\xi-(x+t)) d\xi$

$+\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} q(\xi) V_t(\xi, |\xi-(x-t)|) sign(x-t-\xi) d\xi$

$= \bar{V}^* + \frac{1}{2}\int_{x}^{x_0} q(\xi) V_t(\xi, |\xi-(x+t)|) sign(\xi-(x+t)) d\xi$

$+\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} q(\xi) V_t(\xi, |\xi-(x-t)|) sign(\xi-x+t) d\xi$

将第一个积分中的符号函数变号,再将积分限颠倒即得到(3.1) 对 $x+t \leqslant x_0$ 成立

(2) $x-t \geqslant x_0$,此时必有 $x \geqslant x_0$, $x+t \geqslant x_0$,将(2.1) 代入(2.2) 得

$V_t = \nabla^* + \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x+t} q(\xi) V_t(\xi, x+t-\xi) d\xi$

$+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x_0} q(\xi) V_t(\xi, x-t-\xi) d\xi$

$-\frac{1}{2}\int_{x+t}^{x} q(\xi) V_t(\xi, t-(x-\xi)) \times (-1) d\xi$

$-\frac{1}{2}\int_{x}^{x+t} q(\xi) V_t(\xi, t-(\xi-x)) d\xi$

由于 $\int_{x_0}^{x+t} q(\xi) V_t(\xi, x+t-\xi) d\xi$

$= \int_{x_0}^{x} q(\xi) V_t(\xi, x+t-\xi) d\xi + \int_{x}^{x+t} q(\xi) V_t(\xi, x+t-\xi) d\xi$

从而 $V_t = \nabla^* + \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} q(\xi) V_t(\xi, x+t-\xi) d\xi$

$+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x_0} q(\xi) V_t(\xi, x-t-\xi) d\xi$

$+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x} q(\xi) V_t(\xi, t-(x-\xi)) d\xi$

$= \nabla^* + \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} q(\xi) V_t(\xi, x+t-\xi) d\xi + \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x-t} q(\xi) V_t(\xi, |x-t-\xi| sign(\xi-(x$
$-t)) d\xi + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x} q(\xi) V_t(\xi, |x-t-\xi| sign(\xi-(x-t)) d\xi$

$= \nabla^* + \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} q(\xi) V_t(\xi, |x+t-\xi| sign(x+t-\xi) d\xi + \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} q(\xi) V_t(\xi, |x-t$
$-\xi| sign(\xi-(x-t)) d\xi$

即当 $x-t\geqslant x_0$ 时,(2.2)式成立

(3) $x-t\leqslant x_0$, $x+t\geqslant x_0$, $x\leqslant x_0$

由(2.1)及(2.2)得

$$V_t=\bar{V}^*+\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x+t}q(\xi)V_t(\xi,x+t-\xi)d\xi-\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x_0}q(\xi)V_t(\xi,\xi-(x-t))d\xi-$$
$$\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x}q(\xi)V_t(\xi,t-(x-\xi))\times(-1)d\xi-\frac{1}{2}\int_{x}^{x+t}q(\xi)V_t(\xi,t-(\xi-x))d\xi$$

由于 $\int_{x-t}^{x_0}q(\xi)V_t(\xi,\xi-(x-t))d\xi$

$$=\int_{x-t}^{x}q(\xi)V_t(\xi,\xi-(x-t))d\xi+\int_{x}^{x_0}q(\xi)V_t(\xi,\xi-(x-t))d\xi$$
$$+\int_{x}^{x+t}q(\xi)V_t(\xi,t-(\xi-x))d\xi$$
$$=\int_{x}^{x_0}q(\xi)V_t(\xi,t-(\xi-x))d\xi+\int_{x_0}^{x+t}q(\xi)V_t(\xi,t-(\xi-x))d\xi$$

所以 $V_t=\bar{V}^*-\frac{1}{2}\int_{x}^{x_0}q(\xi)V_t(\xi,\xi-(x-t))d\xi-\frac{1}{2}\int_{x}^{x_0}q(\xi)V_t(\xi,t-(\xi-x))d\xi$

$$=\bar{V}^*+\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}q(\xi)V_t(\xi,|\xi-(x-t)|)sign(\xi-x+t)d\xi+\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}q(\xi)V_t(\xi,|\xi-x-t|)sign(x+t-\xi)d\xi$$

即当(x,t)属于区域Ⅲ时(2.2)成立。

(4) $x-t\leqslant x_0$, $x+t\geqslant x_0$, $x\geqslant x_0$

同区域Ⅲ的讨论,只须将$[x_0,x+t]$上积分分解为$[x_o,x]$和$[x,x+t]$上的积分和,将$[x-t,x]$上的积分分解为$[x-t,x_0]$和$[x_o,x]$上的积分和。

引理3.1证毕

考虑 φ,ψ的函数集合$M(\alpha,k,x_0,t_0)$, $M(\alpha,k,x_0,t_0)=\{\varphi,\psi|\ |\psi(x)|\geqslant\alpha,\ \|\varphi\|_{c^2}\leqslant k,\ \|\psi\|_{c^1}\leqslant k\}$ 其中 $C^l=C^l[x_0-t_0,x_0+t_0](l=1,2)$

$q(x)$的函数集合

$Q(M,x_0,t_0)=\{q(x)|\ \|q\|_{c[x_0-t_0,x_0+t_0]}\leqslant M\}$

定理3.2 设$q(x)$,$\bar{q}(x)$,分别是反问题(1.1)——(1.3)对应于φ、ψ、f_1,f_2及$\bar{\varphi}$、$\bar{\psi}$、$\bar{f_1}$,$\bar{f_2}$的解,且$q(x)$,$\bar{q}(x)\in Q(M,x_0,t_0)$,$\bar{\varphi}$、$\bar{\psi}$、$\varphi$、$\psi\in M(\alpha,k,x_0,t_0)$则有估计

$\|q-\bar{q}\|\leqslant C[\|\varphi-\bar{\varphi}\|_2+\|\psi-\bar{\psi}\|_1+\|f_1''-[-\bar{f_1}''\|_0+\|f_2'-\bar{f_2}'\|_0$ 其中C为只依赖于类$Q(M,x_0,t_0)$及$M(\alpha,k,x_0,t_0)$常数

证 记u,$\bar{u}$分别对应于q,$\bar{q}$的正问题的解,且记

$\hat{u}=u-\bar{u}$,$\hat{q}=q-\bar{q}$,其余符号意义类推。由(2.1)得

$$\hat{q}(x)=-\frac{\bar{q}(x)}{\phi(x)}\hat{\phi}(x)+\frac{1}{\phi(x)}[-\hat{f_1}''(|x-x_0|)-\hat{f_2}'(|x-x_0|)sign(x-x_0)+(\frac{\partial}{\partial t^2}$$
$$-sign(x-x_0)\frac{\partial^2}{\partial t+\partial x})\hat{U_0}(x,t)|_{x=x_0,t=|x-x_0|}+\frac{sign(x-x_0)}{\phi(x)}\int_{x_0}^{x}[q(\xi)\hat{V_t}(\xi,|\xi-x$$

$|)+\hat{q}(\xi)\bar{V}_t(\xi,|\xi-x|]d\xi$

$$(3.2)$$

由(3.1)得

$$\hat{V}_t(x,t)=\hat{V}^*(x,t)+\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}[q(\xi)\hat{V}_t(\xi,|x+t-\xi|)+\hat{q}(\xi)\bar{V}_t(\xi,|x+t-\xi|]$$

$$\cdot sign(x+t-\xi)d\xi-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}[q(\xi)\hat{V}_t(\xi,|x-t-\xi|)+\hat{q}(\xi)\bar{V}_t(\xi,|x-t-\xi|)]\cdot sign(x-t-\xi)d\xi$$

其中 $\hat{V}^*(x,t)=\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}\hat{U}_0(x,t)-\frac{1}{2}[-\hat{f}_1''(|x+t-x_0|)-\hat{f}_2'(|x+t-x_0|)]sign(x+t-x_0)+\left(\frac{\partial}{\partial\tau^2}\mp sign(x+t-x_0)\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\tau}\cdot\hat{U}_0(\xi,\tau)|_{\xi=x_0,\tau=|x+t-x_0|}\right]+\frac{1}{2}$

$$\left[-\hat{f}_1(|x-t-x_0|)-\hat{f}_2'(|x-t-x_0|)sign(x-t-x_0)+\left(\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}+sign(x-t-x_o)\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\tau}\right)\hat{U}_0(\xi,\tau)|_{\xi=x_o,\tau=|x-t-x_0|}\right] \tag{3.3}$$

由 $\hat{U}_0(x,t)$ 的表达式,显然有如下估计:

$$\|\hat{U}_0\|_2\leqslant C_1[\|\hat{\varphi}\|_2+\|\hat{\psi}\|] \tag{3.4}$$

由(3.3)及(3.4)可得:$\hat{V}^*(x,t)$ 的估计:

$$\|\hat{V}^*\|_0\leqslant C_1\|\hat{U}_0\|_2+C_2\|\hat{f}_1''\|_0+C_3\|\hat{f}_2'\|_0 \tag{3.5}$$

其中 C_i 只依赖于类 $Q(M,x_0,t_0)$,及类 $M(\alpha,k,x_0,t_0)$ 以下类同

由(2.2)知:$\bar{V}_t(x,t)$ 满足以下方程:

$$\bar{V}_t(x,t)=\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}\bar{U}_0(x,t)-\frac{1}{2}[\bar{q}(x+t)\bar{\phi}(x+t)-\bar{q}(x-t)\bar{\phi}(x-t)]-\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}\bar{q}(\xi)\bar{V}_t(\xi,t-|x-\xi|]sign(\xi-x)d\xi$$

若记 $V_0^*(x,t)=\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}\bar{U}_0(x,t)-\frac{1}{2}[\bar{q}(x+t)\bar{\phi}(x+t)-\bar{q}(x-t)\bar{\phi}(x-t)]$

$P(x,t)=\bar{V}_t(x,t)$

则 $P(x,t)$ 满足

$$P(x,t)=V_0^*(x,t)-\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}\bar{q}(\xi)P(\xi,t-|x-\xi|)\cdot sign(\xi-x)d\xi$$

由逐次逼近法易于证明:

$$\|P(x,t)\|_0\leqslant\|V_0^*\|_0 exp(\|\bar{q}\|_0 t_0)\equiv C_4 \tag{3.6}$$

记 $Q^*(t)=max(|\hat{q}(x_0+t)|,|\hat{q}(x_0-t)|)$ 　　　　$0\leqslant t\leqslant t_0$

$P^*(t)=\max\limits_{0\leqslant\tau\leqslant t_0-t}[\max(|\hat{V}_t(x_0+t,\tau),|\hat{V}_t(x_0-t,\tau)|)]$

由(3.2)得

$Q^*(t)\leqslant\frac{1}{\alpha}[M\|\hat{\varphi}\|_2+\|\hat{f}_1''\|_0+\|\hat{f}_2'\|_0+\|\hat{U}_0\|_2]+\frac{1}{\alpha}[\int_0^t MP^*(\tau)d\tau+$

$$C_4\int_0^t Q^*(\tau)d\tau] \tag{3.7}$$

由(3.3)得

$$P^*(t) \leqslant \|\hat{V^*}\|_0 + [\int_0^t MP^*(\tau)d\tau + C_4\int_0^t Q^*(\tau)d\tau] \tag{3.8}$$

记 $W(\tau) = max(P^*(t), Q^*(t))$，由(3.7)，(3.8)可得：

$$P^*(t) \leqslant \|\hat{V^*}\|_0 + (C_4 + M)\int_0^t W(\tau)d\tau$$

$$Q^*(t) \leqslant \frac{1}{\alpha}[M\|\hat{\varphi}\|_2 + \|\hat{f_1''}\|_0 + \|\hat{f_2'}\|_0 + \|\hat{U_0}\|_2] + \frac{1}{\alpha}[M + C_4]\int_0^t W(\tau)d\tau$$

记 $W_0 = max\{\|\hat{V^*}\|_0, \frac{1}{\alpha}[M\|\hat{\varphi}\|_2 + \|\hat{f_1''}\|_0 + \|\hat{f_2'}\|_0 + \|\hat{U_0}\|_2]$

$$\lambda = max\{C_4 + M, \frac{1}{\alpha}(C_4 + M)\}$$

则 $W(t) \leqslant W_0 + \lambda\int_0^t W(\tau)d\tau$，由 *Gronwall* 不等式有：

$$W(t) \leqslant W_0 e^{\lambda t} \leqslant W_0 e^{\lambda t_0}$$

注意到 λ、W_0 及 $\|\hat{V_0^*}\|$ 的估计，即可得到稳定估计.

定理 3.2 证毕.

参考文献

1 吕延华.确定波动方程一阶导数系数的反问题.河南科学，1994.(1)

2 V.G.Romanov.lnverse Problems of Mathematical physics.1987

Global Stability of the Inverse Problem of the Equation $U_{tt} - U_{xx} + q(x)\frac{\partial u}{\partial x} = 0$

Lu Yanhua

(*Henan Teachers' College*)

Abstract Paper[1] discussed the local existence aniquenes and local stability of the solution for the inverse problem of determining the coefficient q(x) of the equation $U_{tt} - U_{xx} + q(x) U_x = 0$ by means of the property of characteristic line, this paper gives the global stability of the inverse problem considereol in paper [1].

Keywords inverse problem; characteristic line; global stability