第 17 卷 第 4 期
1996 年 1 2 月
郑州工业大学学报
Journal of Zhengzhou University of Technology
Vol. 17 No. 4.
Dec. 1996

# 环形截面钢筋混凝土偏压构件正截面承载力简化计算

杨卫忠　　　卢长来　王　丽
(郑州工业大学土建系)　(河南省建设总公司)

**摘　要**:本文利用牛顿法,建立了直接求解受压区混凝土截面面积与全截面面积的比值 $\alpha$ 的数值计算公式,避免了解超越方程,该法具有简单、快捷和计算精度高等优点。

**关键词**:混凝土结构　环形截面　承载力　计算方法

**中图分类号**:TUS02

## 1　前言

桩、管柱等是工程中常遇到的环形截面砼偏压构件,按正截面承载力确定钢筋数量和截面校核时,需按《混凝土结构设计规范》(GBJ10-89)(以下简称《规范》)中的第 4·1·18 条规定的一组公式计算,该组公式如下:

$$N = \alpha f_{cm} A + (\alpha - \alpha_t) f_y A_s \tag{1}$$

$$N\eta e_i = f_{cm} A (r_1 + r_2) \frac{\sin\pi\alpha}{2\pi} + f_y A_s r_s \frac{\sin\pi\alpha + \sin\pi\alpha_t}{\pi} \tag{2}$$

式中:$\alpha_t = 1 - 1.5\alpha$　当 $\alpha \geq 2/3$ 时,取 $\alpha_t = o$

$A$—构件截面面积;

$A_s$—全部纵向钢筋面面积;

$r_1$,$r_2$—环形截面的内、外半径;

$r_s$—纵向钢筋所在圆周的半径;

$\alpha$—受压区混凝土截面面积与全截面面积的比值;

$\alpha_t$—纵向受拉钢筋截面面积与全部纵向钢筋截面面积的比值。

式(1)、(2)适用于沿截面周边均匀配置纵向钢筋且钢筋数量不少于 6 根的环形截面钢筋混凝土构件,并满足 $r_1/r_2 \geq 0.5$。

解 $\alpha$ 时出现超越方程,计算比较繁琐,一般须采用迭代法,如迭代初值选择不合适,迭代次数会明显增加。本文在分析上述公式的基础上,二次利用牛顿公式,建立了直接求解 $\alpha$ 的数值计算公式,为解决该问题提供了一条简便而有效的方法。

## 2　简化计算公式

### 2.1　截面设计(已知 $N\eta e_i$、$f_{cm}$、$f_y$、$r_1$、$r_2$、$r_s$ 求 $A_s$)

收稿日期:1996-5-2

由式(2)得：

$$A_s = \frac{\pi N\eta e_i - 0.5 f_{cm} A(r_1 + r_2)\sin\pi\alpha}{f_r r_2(\sin\pi\alpha + \sin\pi\alpha_t)} \tag{3}$$

将式(3)代入式(1)并令

$$H = \frac{N}{f_{cm}A}, J = \frac{\eta e_i}{r_s}, K = \frac{r_1 + r_2}{r_s} \tag{4}$$

则有

$$(\sin\pi\alpha + \sin\pi\alpha_t)H + \frac{1}{2}(\alpha - \alpha_t)\sin\pi\alpha K - (\alpha - \alpha_t)\pi HJ - \alpha(\sin\pi\alpha + \sin\pi\alpha_t) = o \tag{5}$$

若式(5)左边记为 $\varphi(\alpha)$，并对 $\alpha$ 求导，得：

当 $\alpha < 2/3, \alpha_t = 1 - 1.5\alpha$

$$\varphi(\alpha) = (\sin\pi\alpha + \sin\frac{3}{2}\pi\alpha)H + \frac{1}{2}\left(\frac{5}{2}\alpha - 1\right)\pi\sin\pi\alpha K + \left(1 - \frac{5}{2}\alpha\right)\pi HJ - \alpha(\sin\pi\alpha + \sin\frac{3}{2}\pi\alpha) \tag{5a}$$

$$\varphi'(\alpha) = (Cos\pi\alpha + \frac{3}{2}Cos\frac{3}{2}\pi\alpha)\pi H + \left[\frac{5}{4}\sin\pi\alpha + \frac{\pi}{2}\left(\frac{5}{2}\alpha - 1\right)Cos\pi\alpha\right]K - \frac{5}{2}\pi HK - \left[\sin\pi\alpha + \sin\frac{3}{2}\pi\alpha + \pi\alpha(Cos\pi\alpha + \frac{3}{2}Cos\frac{3}{2}\pi\alpha)\right] \tag{6a}$$

当 $\alpha \geq 2/3, \alpha_t = 0$

$$\varphi(\alpha) = \sin\pi\alpha H + \frac{1}{2}\alpha\sin\pi\alpha K - \pi\alpha HJ - \alpha\sin\pi\alpha \tag{5b}$$

$$\varphi'(\alpha) = \pi Cos\pi\alpha H + \left(\frac{1}{2}\sin\pi\alpha + \frac{\pi}{2}\alpha Cos\pi\alpha\right)K - \pi HJ - (\sin\pi\alpha + \pi\alpha Cos\pi\alpha) \tag{6b}$$

利用牛顿公式，得到原方程式(5)的根的迭代形式

$$\alpha_{k+1} = \alpha_k - \frac{\varphi(\alpha_k)}{\varphi'(\alpha_k)} \tag{7}$$

为了避免牛顿公式的迭代，可采取下述步骤：首先，在 $\alpha$ 的取值范围内选取迭代初值 $\alpha_0$，由式(7)即得原方程的一次近似解 $\alpha_1$；然后，将 $\alpha$ 的取值范围分成若干个小区间，根据 $\alpha_1$ 所属区间，在该小区间上再次运用式(7)，由于牛顿法具有平方收敛的特性，这样得到的解就十分接近真值。为了使误差最小，初值可取该区间的中点值。以钢筋的拉应变 $\varepsilon_s = 0.01$ 作为达到极限状态的标志，按平截面假定即可求得环形截面的最小 $\alpha$ 为 0.164，故 $\alpha$ 的取值范围为(0.1,1.0)。

根据上述原理，$\alpha$ 的一次近似计算公式如下：

$$\alpha_1 = 0.55 - \frac{1.5102H + 0.1852K - 1.1781HJ - 0.8306}{-4.5094H + 1.1425K - 7.854HJ + 0.97} \tag{8}$$

将 $\alpha$ 取值区间分成十六个小区间，在各小区间上 $\alpha$ 的计算公式为：

$$\alpha = b - \frac{c_1 H + c_2 K + c_3 HJ + c_4}{d_1 H + d_2 K + d_3 HJ + d_4} \tag{9}$$

式中相应的系数 $b$、$c_1 \sim c_4$、$d_1 \sim d_4$ 列于表 1 中,$H$、$J$、$K$ 见式(4)。

表 1

| $\alpha$1 范围＼系数 | $b$ | $c_1$ | $c_2$ | $c_3$ | $c_4$ | $d_1$ | $d_2$ | $d_3$ | $d_4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (0.1,0.2) | 0.15 | 1.1034 | -0.1419 | 1.9635 | -0.1655 | 6.3825 | -0.3073 | -7.8540 | -2.0608 |
| [0.2,0.25) | 0.225 | 1.5219 | -0.1421 | 1.3745 | -0.3424 | 4.6915 | 0.2892 | -7.8540 | -2.5775 |
| [0.25,0.3) | 0.275 | 1.7229 | -0.1188 | 0.9817 | -0.4738 | 3.3194 | 0.6317 | -7.8540 | -2.6357 |
| [0.3,0.35) | 0.325 | 1.8519 | -0.0800 | 0.5890 | -0.6019 | 1.8265 | 0.9119 | -7.8540 | -2.4455 |
| [0.35,0.4) | 0.375 | 1.9047 | -0.0289 | 0.1963 | -0.7142 | 0.2829 | 1.1173 | -7.8540 | -2.0108 |
| [0.4,0.45) | 0.425 | 1.8805 | 0.0304 | -0.1963 | -0.7992 | -1.2395 | 1.2384 | -7.8540 | -1.3537 |
| [0.45,0.5) | 0.475 | 1.7822 | 0.0935 | -0.5890 | -0.8466 | -2.6709 | 1.2693 | -7.8540 | -0.5316 |
| [0.5,0.55) | 0.525 | 1.6160 | 0.1558 | -0.9817 | -0.8484 | -3.9472 | 1.2076 | -7.8540 | 0.4563 |
| [0.55,0.6) | 0.575 | 1.3910 | 0.2127 | -1.3745 | -0.7998 | -5.0129 | 1.0550 | -7.8540 | 1.4914 |
| [0.6,0.67) | 0.635 | 1.060 | 0.2677 | -1.8457 | -0.6732 | -5.9528 | 0.7595 | -7.8540 | 2.720 |
| [0.67,0.7) | 0.685 | 0.8358 | 0.2863 | -2.1520 | -0.5725 | -1.7248 | -0.1728 | -3.1416 | 0.3457 |
| [0.7,0.75) | 0.725 | 0.7604 | 0.2756 | -2.2777 | -0.5513 | -2.0403 | -0.3594 | -3.1416 | 0.7188 |
| [0.75,0.8) | 0.775 | 0.6495 | 0.2517 | -2.4347 | -0.5033 | -2.3889 | -0.6010 | -3.1416 | 1.2019 |
| [0.8,0.85) | 0.825 | 0.5225 | 0.2155 | -2.5918 | -0.4311 | -2.6786 | -0.8437 | -3.1416 | 1.6874 |
| [0.85,0.9) | 0.875 | 0.3827 | 0.1674 | -2.7489 | -0.3349 | -2.9025 | -1.0785 | -3.1416 | 2.1570 |
| [0.9,1.0) | 0.95 | 0.1564 | 0.0743 | -2.9845 | -0.1486 | -3.1029 | -1.3957 | -3.1416 | 2.7913 |

2.2　截面校核(已知 $\eta e_i$、$F_{cm}$、$f_y$、$r_1$、$r_2$、$r_s$、$A_s$,求 $N$)

将式(1)代入式(2),并令

$$L = \frac{f_y A_s}{f_{cm} A}, J = \frac{\eta e_i}{r_s}, K = \frac{r_1 + r_2}{r_s} \tag{10}$$

则有

$$-[\alpha + (\alpha - \alpha_t)L]\pi J + \frac{1}{2}\sin\pi\alpha K + (\sin\pi\alpha + \sin\pi\alpha_t)L = 0 \tag{11}$$

若式(11)左边记为 $\varphi(\alpha)$,并对 $\alpha$ 求导,得

当 $\alpha < \frac{2}{3}$,$\alpha_t = 1\text{-}1.5\alpha$

$$\varphi(\alpha) = -\left[\alpha + \left(\frac{5}{2}\alpha - 1\right)L\right]\pi J + \frac{1}{2}\sin\pi\alpha K + (\sin\pi\alpha + \sin\frac{3}{2}\pi\alpha)L \tag{11a}$$

$$\varphi'(\alpha) = -\left(1 + \frac{5}{2}L\right)\pi J + \frac{\pi}{2}Cos\pi\alpha k + \pi(Cos\pi\alpha + \frac{3}{2}Cos\frac{3}{2}\pi\alpha)L \tag{12a}$$

当 $\alpha \geq \frac{2}{3}$,$\alpha_t = 0$

$$\varphi(\alpha) = \alpha(1 + L)\pi J + \frac{1}{2}\sin\pi\alpha K + \sin\pi\alpha L \tag{11b}$$

$$\varphi'(\alpha) = -(1 + L)\pi J + \frac{\pi}{2}Cos\pi\alpha K + \pi Cos\pi\alpha L \tag{12b}$$

由式(7)，$\alpha$ 的一次近似公式如下：

$$\alpha_1 = 0.55 + \frac{0.4938K + 1.5102L - 1.1781LJ - 1.7279J}{0.2457K + 4.5094L + 7.8540LJ + 3.1416J} \tag{13}$$

在小区间上 $\alpha$ 的计算公式为：

$$\alpha = b_1 + \frac{C_5K + C_6L + C_7LJ + C_8J}{d_5K + d_6L + d_7LJ + d_8J} \tag{14}$$

式中相应系数 $b_1$，$C_5 \sim C_8$，$d_5 \sim d_8$ 列于表 2 中，$L$，$J$，$K$ 见式(10)。

表 2

| 系数 / $\alpha_1$ 范围 | $b_1$ | $C_5$ | $C_6$ | $C_7$ | $C_8$ | $d_5$ | $d_6$ | $d_7$ | $d_8$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (0.1,0.2) | 0.15 | 0.2270 | 1.1034 | 1.9635 | -0.4712 | -1.3996 | -6.3825 | 7.8540 | 3.1416 |
| [0.2,0.25) | 0.225 | 0.3247 | 1.5219 | 1.3745 | -0.7069 | -1.1944 | -4.6915 | 7.8540 | 3.1416 |
| [0.25,0.3) | 0.275 | 0.3802 | 1.7229 | 0.9817 | -0.8639 | -1.0201 | -3.3194 | 7.8540 | 3.1416 |
| [0.3,0.35) | 0.325 | 0.4263 | 1.8519 | 0.5890 | -1.0210 | -0.8207 | -1.8265 | 7.8540 | 3.1416 |
| [0.35,0.4) | 0.375 | 0.4619 | 1.9047 | 0.1963 | -1.1781 | -0.6011 | -0.2829 | 7.8540 | 3.1416 |
| [0.4,0.45) | 0.425 | 0.4862 | 1.8805 | -0.1963 | -1.3352 | -0.3667 | 1.2395 | 7.8540 | 3.1416 |
| [0.45,0.5) | 0.475 | 0.4985 | 1.7822 | -0.5890 | -1.4923 | -0.1232 | 2.6709 | 7.8540 | 3.1416 |
| [0.5,0.55) | 0.525 | 0.4985 | 1.6160 | -0.9817 | -1.6493 | 0.1232 | 3.9472 | 7.8540 | 3.1416 |
| [0.55,0.6) | 0.575 | 0.4862 | 1.3910 | -1.3745 | -1.8064 | 0.3667 | 5.0129 | 7.8540 | 3.1416 |
| [0.6,0.67) | 0.635 | 0.4557 | 1.0600 | -1.8456 | -1.9949 | 0.4464 | 5.9528 | 7.8540 | 3.1416 |
| [0.67,0.7) | 0.685 | 0.4179 | 0.8358 | -2.1520 | -2.1520 | 0.8624 | 1.7248 | 3.1416 | 3.1416 |
| [0.7,0.75) | 0.725 | 0.3802 | 0.7604 | -2.2777 | -2.2777 | 1.02021 | 2.0403 | 3.1416 | 3.1416 |
| [0.75,0.8) | 0.775 | 0.3247 | 0.6495 | -2.4347 | -2.4347 | 1.1944 | 2.3889 | 3.1416 | 3.1416 |
| [0.8,0.85) | 0.825 | 0.2613 | 0.5225 | -2.5918 | -2.5918 | 1.3393 | 2.6786 | 3.1416 | 3.1416 |
| [0.85,0.9) | 0.875 | 0.1913 | 0.3827 | -2.7489 | -2.7489 | 1.4512 | 2.9025 | 3.1416 | 3.1416 |
| [0.9,1.0) | 0.95 | 0.0782 | 0.1564 | -2.9845 | -2.9845 | 1.5515 | 3.1029 | 3.1416 | 3.1416 |

## 3 本文方法计算步骤

### 3.1 截面设计

环形截面编压构件截面设计时，已知轴力设计值 $N$，增大后的偏心距 $\eta e_i$，在假定截面尺

寸、钢筋和混凝土强度等级的条件下，可采取下述步骤求纵向钢筋 $A_s$：

(1)由已知数据代入式(4)求常数 $H$、$J$ 和 $K$。

(2)由式(8)求 $\alpha$ 的一次近似值 $\alpha_1$。若 $\alpha_1>1$，取 $\alpha_1=1$。

(3)由 $\alpha_1$ 所属区间，按式(9)求 $\alpha$。

(4)若 $\alpha$ 与 $\alpha_1$ 属同一小区间，由式(3)求 $A_S$；否则，取 $\alpha_1=\alpha$，按式(9)再求一次 $\alpha$，并由式(3)求 $A_s$。若 $\alpha$ 极接近1.0，式(3)右端分母将趋于零。此时，取 $\alpha_t=0$，直接按式(1)求 $A_s$。

### 3.2　截面校核

环形截面偏压构件截面校核时，已知截面尺寸，钢筋和混凝土强度等级，纵向钢筋截面面积 $A_s$，情况一：已知轴向力设计值 $N$，求该截面所能承担的弯矩 $N\eta ei$；情况二：已知增大后的偏心距 $\eta ei$，求该截面所承受的轴向力。对于情况一，可由式(1)直接求 $\alpha$，并按式(2)求 $N\eta ei$。情况二，则按下列步骤求 $N$：

(1)由已知数据代入式(10)求常数 $L$、$J$ 和 $K$。

(2)由式(13)求 $\alpha$ 的一次近似值 $\alpha_1$。若 $\alpha_1>1$，取 $\alpha_1=1$

(3)由 $\alpha_1$ 所属区间，按式(14)求 $\alpha$。

(4)若 $\alpha$ 与 $\alpha_1$ 属同一小区间，由式(1)求 $N$；否则，取 $\alpha_1=\alpha$，按式(14)再求一次 $\alpha$，按式(1)求 $N$。

## 4　算例

[例1]选自文献[1]中例[1·2·5－1]，已知参数如下：$r_2=200mm$，$r_1=140mm$，$r_s=170mm$，$f_{cm}=16.5N/mm^2$，$f_y=310N/mm^2$，$N=400KN$，$\eta e_i=250mm$，求 $A_s$。

按本文方法的计算结果如下：$H=0.3782$，$K=2$，$J=1.4706$，$\alpha_1=0.3570$，$\alpha=0.3893$，$A_s=1445.4mm^2$

文献[1]的结果：$\alpha=0.389$，$A_s=1445mm^2$，迭代2次。

精确解为：$\alpha=0.3894$，$A_s=1445.16mm^2$

[例2]选自文献[1]中例[1·2·5－2]，已知参数如下：$r_2=150mm$，$r_1=80mm$，$r_s=115mm$，$f_{cm}=11N/mm^2$，$f_y=310N/mm^2$，$N=350KN$，$\eta e_i=72.4mm$，求 $A_s$。

按本文方法的计算结果如下：$H=0.6291$，$K=2$，$J=0.62956$，$\alpha_1=0.5586$，$\alpha=0.5586$，$A_s=319mm^2$。

文献[1]的解：$\alpha=0.559$，$A_s=319mm^2$，迭代6次。

精确解为：$\alpha=0.5586$，$A_s=319mm^2$

[例3]环形截面偏压构件，截面几何参数和材料强度同例2，并配有6$\Phi$12钢筋($A_s=678mm^2$)，若 $\eta ei=34.5mm$，求该柱截面所能承担的最大轴向力 $N$。

按本文方法的计算结果如下：$L=0.3778$，$K=2$，$J=0.30$，$\alpha_1=0.7750$，$\alpha=0.7507$，$N=575.453KN$

精确解为：$\alpha=0.7501$，$N=575\ KN$.

## 5 结论

本文计算方法为一近似算法,但它具有计算简单、快捷和计算精度高等优点,能满足工程设计要求。

## 参考文献


1 施岚清等主编:《混凝土结构设计规范应用指南》,地震出版社,1991年。

2 李庆扬等编:《数值分析》,华中理工大学出版社,1989年9月。

3 秦力一:圆形截面钢筋混凝土偏压构件正截面承载力的分区逼近算法,建筑结构,1995年第3期。

4 中华人民共和国国家标准,混凝土结构设计规范(*GBJ*10-89),中国建筑工业出版社,1990年4月。


## Bearing Capacity Calculation of the Reinforced Concrete Cilcle Section under Eccentric Compressed Load


Yang Weizhong Lu ChangLai Wang Li

(*Zhengzhou University of Technology*) (*Henan Office of Construction Corporation*)



**Abstract** In this paper, by use of Newton Formula, numerical calculation formulae about the ratio of the area of the concrete compression zone to the area of the member are foundcl. Extracting a root from transcendental equation is evaded. This method has many advantages such as simplicity, high-speed and high-precision etc.



**Keywords** concrete structure, circle section, bearing capacity, calculation method.