第 17 卷 第 3 期
1996 年 9 月

郑州工业大学学报
Journal of Zhengzhou University of Technoloy

Vol. 17 No. 3.
Sep. 1996

变厚度圆板的非线性振动

黄士涛
(郑州工业大学机械系)

摘 要:本文利用有限元的方法研究了变厚度的圆板,在大变形时所作的非线性振动情况。文章首先导出了在一般情况时的非线性偏微分主程及其边界条件。然后,利用结点座标和插入函数重新改写圆板的应变能和动能,再应用 Hamilton 原理,获得变厚度圆板在大变形时的矩阵形式的方程。把相应的边界条件强加到该矩阵方程中,以至于该方程满足边界条件。然后,利用递归的方法来解其特征值问题。本文利用一个例子说明了变厚度圆板在作非线性振动时,其基频与振幅之间的关系。其计算结果的精度优于其它方法。该方法可以推广到解其它类似的圆板的非线性振动问题中去。

关键词:变厚度圆板,非线性振动,有限元方法,特征值问题。

中图分类号:O322

1 序言

非均匀厚度的圆板结构在现代的工程设计中经常会遇到,这样的圆板结构在遭受到严重操作情况下,将会发生较大幅度的振动。根据 Von Karmen 的理论,当振动的幅值与板的厚度为同一数量级时,该板中部的变形就不能再忽略了,此时其振动方程是耦合的非线性方程。由于该类方程复杂性,要得到其确切的解析解是很困难的。因此用近似解的方式来解该类问题[1]。

变厚度圆板在小振幅下的振动情况和在大振幅下的振动情况,已由其他作者研究[2,3,4],但他们都是用 Kantorovich 平均法来解得的。而本文是用有限元方法来解。

本文研究的圆板,其中心具有一个刚性的圆芯,其四周被夹紧不动,该圆板的轴向是对称的并各向同性。本文首先使用变分原理导出单元的方程,再利用单元的方程组合成整个圆板的非线性振动方程。本文对该问题获得了数值解,并获得了其相应的基本振动频率。

2 基本微分方程的导出

考虑一个具有刚性圆芯的薄圆板,其圆芯的质量为 M_0、圆板的外径为 a、刚性圆芯的半径为 b,其等于圆板的内径。刚性圆芯的厚度为 h_0,其值不变。圆板的厚度为 η,其为变值,但只为半径的函数,并在圆板的内径处的厚度恰好为刚性圆芯的厚度,如图所示。

根据 Hamilton 原理,中心具有刚性圆芯的,各向同性的,变厚度的圆板,在做有限振幅轴对称振动时的无量纲运动方程为:

收稿日期:1996—03—04

$$X\tau\tau + \frac{\eta^2}{h_0^2}(X_{\xi\xi\xi\xi} + \frac{2}{\xi}X_{\xi\xi\xi} - \frac{1}{\xi^2}X_{\xi\xi} + \frac{1}{\xi^3}X_\xi)$$

$$+ \frac{3}{h_0^2}(\eta\eta_{\xi\xi} + 2\eta_\xi^2)(X_{\xi\xi} + \frac{\nu}{\xi}X_\xi) - \frac{3}{h_0^2}\eta\eta_\xi(\frac{\nu}{\xi}X_{\xi\xi\xi} + \frac{1}{\xi^2}X_{\xi\xi} - \frac{1}{\xi^3}X_\xi)$$

$$= 12\frac{a}{h_0}(U_\xi X_{\xi\xi} + U_{\xi\xi}X_\xi + \frac{1+\nu}{\xi}U_\xi X_\xi + \frac{\nu}{\xi}UX_{\xi\xi} + \frac{1}{2}\frac{a}{h_0}\frac{1}{\xi}X_\xi^3 + \frac{3}{2}\frac{a}{h_0}X_\xi^2 X_{\xi\xi})$$

$$+ 12\frac{a}{h_0}\frac{\eta_\xi}{\eta}(U_\xi X_\xi + \frac{\nu}{\xi}X_\xi U + \frac{1}{2}\frac{a}{h_0}X_\xi^3) \tag{1}$$

$$U_{\xi\xi} + \frac{1}{\xi}U_\xi - \frac{1}{\xi^2}U + \frac{a}{h_0}(\frac{1}{2}\frac{1}{\xi}X_\xi^2 + X_\xi X_{\xi\xi}$$

$$- \frac{1}{2}\frac{\nu}{\xi}X_\xi^2 + \frac{1}{2}\frac{\eta_\xi}{\eta}X_\xi^2) + \frac{\eta_\xi}{\eta}(U_\xi + \frac{\nu}{\xi}U) = 0 \tag{2}$$

对于该运动方程，使用了以下的无量纲变量进行变换：

$$X = \frac{w}{a} \qquad \xi = \frac{r}{a} \qquad R = \frac{b}{a} \qquad r = \frac{M_0}{\pi \cdot b^2 \cdot \rho \cdot h_0}$$

$$U = \frac{u}{h_0} \qquad \tau = t\left[\frac{D_0}{\rho \cdot h_0 \cdot a^4}\right]^{\frac{1}{2}}$$

其中 $D_0 = \frac{E \cdot h_0^3}{12(1-\nu^2)}$

称为该板的柔刚度，E 是 Young 氏模量，ν 是 Poision 系数，ρ 是圆板材料的密度，t 是时间变量。

对于四周被夹紧的圆板，其无量纲的边界条件可表示成如下形式：

在 $\xi=1$ 处，即圆板的四周，其为：

$$X = 0$$
$$X_\xi = 0 \tag{3a}$$
$$U = 0$$

在 $\xi=R$ 处，即圆板与刚性圆芯连接处，其为：

$$X_\xi = 0$$
$$U = 0$$

及 $$\frac{\eta^3}{h_0}\xi(X_{\xi\xi\xi} + \frac{1}{\xi}X_{\xi\xi} - \frac{1}{\xi^2}X_\xi) + \frac{3\eta^2\eta_\xi}{h_0{}^0}\xi(X_{\xi\xi} + \frac{\nu}{\xi}X_\xi) \tag{3b}$$

$$- 12\frac{a}{h_0{}^2}\eta\xi X_\xi(U_\xi + \frac{\nu}{\xi}U + \frac{1}{2}\frac{a}{h_0}X_\xi^2) + \frac{1}{2}\gamma R^2\frac{\partial^2 X}{\partial\tau^2} = 0$$

3 有限元方法分析

求解由方程(1)、(2)和(3)所组成的联合偏微分方程的解析解是很困难的，因此，只能用数值的方法来求解该方程。对于求解这样大振幅的振动问题，有几种近似的求解方法，如模态样条函数法[1]和 Kantorovich 平均法[2]。本文将用有限元方法来解该问题。

既然在此所考虑的圆板是轴向对称的，且其厚度只是圆板半径的函数，因此可考虑选择环形元作为有限元的单元。圆板归一化后的区域为[R,1]，将其划分成宽度为 2s 的 n 个单元，其中 s=(1−R)/2n，每个单元将有三个结点，其中两个为外结点，一个为内结点，每个结点将有三个自由度，其分别为 $(X_j, X_{j\xi}, U_j)$，其中 j 表示第 i 个单元中的第 j 个结点，X 表示

该结点的横向变形，X_ξ 表示该结点的斜率，U 表示该结点在板中的位移。则第 i 个单元的位移和斜率值可表示为：

$$\{X^{(e)}(\xi,\tau)\}=[N^{(e)}]\{W^{(e)}\} \tag{4a}$$

$$\{U^{(e)}(\xi,\tau)\}=[L^{(e)}]\{V^{(e)}\} \tag{4b}$$

其中$\{W^{(e)}\}$和$\{V^{(e)}\}$均为列矢量型结点变量，其定义如下：

$$\{W^{(e)}\}^T=(X_{(j)},X_{(j)\xi},X_{(j+1)},X_{(j+1)\xi},X_{(j+2)},X_{(j+2)\xi})$$

$$\{V^{(e)}\}^T=(V_{(j)},V_{(j+1)},V_{(j+2)})$$

$[L^{(e)}]$和$[N^{(e)}]$为行矢量形状函数，其在有限元分析中起着重要的作用。本文使用 Hermit 函数形成插入函数，则形状函数为：

$$[N^{(e)}]^T=\begin{bmatrix} 3/4 & -1/2 & -4/5 & 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & -1/4 & -1/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -3/4 & -1/2 & 5/4 & 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & -1/4 & -1/4 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_5 \\ X_4 \\ X_3 \\ X_2 \\ X_1 \\ X_0 \end{bmatrix} \tag{5a}$$

$$[L^{(e)}]^T=\begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_2 \\ X_1 \\ X_0 \end{bmatrix} \tag{5b}$$

其导出请参见[4]的附录。如果整个圆板具有 n 个单元，则整个圆板的所有变量可表示为：

$$X(\xi,\tau)=\sum_j^n[N_j^{(e)}]\{W_j^{(e)}\}=N^TW \tag{6a}$$

$$U(\xi,\tau)=\sum_j^n[L_j^{(e)}]\{V_j^{(e)}\}=L^TV \tag{6b}$$

其中 $W^T=(X_1,X_{(1)\xi},X_2,X_{(2)\xi},\cdots,X_{(2n+1)},X_{(2n+1)\xi})$

表示结点的横向变形和斜率的未知值，而

$$V^T=(U_1,U_2,\cdots,U_{(2n+1)})$$

表示结点在板内位移的未知值。

考虑弹性介质在大变形时应变一位移的关系式（根据 Von Karman 理论），则应变矢量$\{\varepsilon\}$可表示为：

$$\{\varepsilon\}=\begin{bmatrix} u_r \\ u/r \\ \cdots \\ -w_{rr} \\ -w_r/r \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1/2w_r^2 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \varepsilon'_p \\ \cdots \\ \varepsilon_b \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \varepsilon''_p \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix}=\{\varepsilon'\}+\{\varepsilon''\} \tag{7}$$

$\{\varepsilon'\}$和$\{\varepsilon''\}$分别表示线性和非线性应变矢量。应变矢量 ε'_p，ε''_p 和 ε_b 的无量纲形式分别为：

$$\varepsilon'_p=\frac{h_0}{a}\begin{bmatrix} U_\xi \\ U/\xi \end{bmatrix},\quad \varepsilon_b=\frac{-1}{a}\begin{bmatrix} X_{\xi\xi} \\ X_\xi/\xi \end{bmatrix}\quad \varepsilon''_p=\begin{bmatrix} X_\xi^2/2 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{8}$$

对于各向同性的弹性材料，其弹性常数矩阵为：

$$C=\begin{bmatrix}C_p & 0\\ 0 & C_b\end{bmatrix} \tag{9}$$

其中

$$C_b=\frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix}1 & \nu\\ \nu & 1\end{bmatrix}=\frac{E}{1-\nu^2}C_1$$

$$C_b=\frac{Ez^2}{1-\nu^2}\begin{bmatrix}1 & \nu\\ \nu & 1\end{bmatrix}=\frac{Ez^2}{1-\nu^2}C_1$$

其中z为圆板中层面沿厚度方向到板面的距离。为建立全局的刚度矩阵和质量矩阵，先求出圆板的动能和势能。利用方程(6)—(9)，圆板的应变势能为：

$$\begin{aligned}\prod &=\frac{1}{2}\int\varepsilon^T\cdot C\cdot\varepsilon dV\\ &=\frac{1}{2}\int\varepsilon'^T\cdot C\cdot\varepsilon'\cdot dV+\frac{1}{2}\int(\varepsilon'^T\cdot C\cdot\varepsilon''+\varepsilon''^T\cdot C\cdot\varepsilon'+\varepsilon''^T\cdot C\cdot\varepsilon'')dV\\ &=\prod{}'+\prod{}''\end{aligned} \tag{10}$$

其第一项为二次函数，表示了应变势能的线性部分，而第二项则为应变势能的非线性部分。

把方程(8)和(9)代入方程(10)，然后对板的厚度进行积分，则圆板的应变势能的线性和非线性部分，分别成为：

$$\prod{}'=\frac{1}{2}\frac{12\cdot D_0}{h_0^3}\iint\left(\eta\cdot\varepsilon'^T_p\cdot C_1\cdot\varepsilon'_p+\frac{\eta^3}{12}\varepsilon_b^T\cdot C_1\cdot\varepsilon_b\right)ds \tag{11}$$

$$\prod{}''=\frac{1}{2}\frac{12\cdot D_0}{h_0^3}\iint\eta\cdot(\varepsilon'^T_p\cdot C_1\cdot\varepsilon''_p+\varepsilon''^T_p\cdot C_1\cdot\varepsilon'_p+\varepsilon''^T_p\cdot C_1\cdot\varepsilon''_p)ds$$

其中η为厚度函数且只与半径有关。把方程(6a)和(6b)代入方程(8)，方程(11)中的应变部分可写成：

$$\varepsilon'_p=\frac{h_0}{a}\begin{bmatrix}L_\xi^T\\ L^T/\xi\end{bmatrix}V \qquad \varepsilon_b=-\frac{1}{a}\begin{bmatrix}N_{\xi\xi}^T\\ N_\xi^T/\xi\end{bmatrix}W \qquad \varepsilon''_p=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}X_\xi^2\\ 0\end{bmatrix} \tag{12}$$

对其取一次变分，有

$$\delta\varepsilon'_p=\frac{h_0}{a}\begin{bmatrix}L_\xi^T\\ L^T/\xi\end{bmatrix}\cdot\delta V \qquad \delta\varepsilon_b=-\frac{1}{a}\begin{bmatrix}N_{\xi\xi}^T\\ N_\xi^T/\xi\end{bmatrix}\cdot\delta W \qquad \delta\varepsilon''_p=\begin{bmatrix}X_\xi\\ 0\end{bmatrix}\cdot N_\xi^T\cdot\delta W \tag{13}$$

现对圆板的全部应变势能取一次变分，并利用表达式(12)，(13)，则有

$$\begin{aligned}\delta\prod &=\begin{bmatrix}\delta V\\ \delta W\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}\frac{12\cdot D_0}{h_0}K_p & 0\\ 0 & \frac{D_0}{h_0^3}K_b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V\\ W\end{bmatrix}\\ &+\begin{bmatrix}\delta V\\ \delta W\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}0 & \frac{12\cdot D_0}{h_0^2\cdot a}K_1\\ \frac{6\cdot D_0\cdot a}{h_0^2}K_1 & \frac{12\cdot D_0\cdot a^2}{h_0^3}K_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V\\ W\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{14}$$

其中

$$K_p = \iint \eta \cdot \left(L_\xi \cdot L_\xi^T + \frac{\nu}{\xi} L \cdot L_\xi^T + \frac{\nu}{\xi} L_\xi \cdot L^T + \frac{1}{\xi^2} L \cdot L^T \right) \cdot ds'$$

$$K_p = \iint \eta^3 \cdot \left(N_{\xi\xi} \cdot N_{\xi\xi}^T + \frac{\nu}{\xi} N_{\xi\xi} \cdot N_\xi^T + \frac{\nu}{\xi} N_\xi \cdot N_{\xi\xi}^T + \frac{1}{\xi^2} N_\xi \cdot N_\xi^T \right) \cdot ds'$$

$$K_1 = \iint \eta \cdot (X_\xi) \cdot \left(L_\xi + \frac{\nu}{\xi} L \right) \cdot N_\xi^T \cdot ds'$$

$$K_2 = \iint \eta \cdot \left(\frac{1}{2} X_\xi^2 \right) \cdot N_\xi N_\xi^T \cdot ds'$$

圆板的总动能为

$$T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{V} \\ \dot{W} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D_0 \cdot M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{V} \\ \dot{W} \end{bmatrix} \tag{15}$$

其中 $\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial \tau}, \dot{W} = \frac{\partial W}{\partial \tau}$ 以及 $M = \frac{1}{h_0} \iint \eta \cdot N \cdot N^T \cdot ds' + \frac{M_0}{\rho \cdot h_0 \cdot a^2} N \cdot N^T \Big|_{\xi = R}$

应用 Hamilton 原理，便可得圆板的 Euler－Lagrange 方程，其为

$$K_p \cdot V + \frac{a}{h_0} K_1 \cdot W = 0$$

$$M \cdot \ddot{W} + \frac{1}{h_0^3} K_b \cdot W + 6 \frac{a}{h_0^2} K_1^T \cdot V + 12 \frac{a^2}{h_0^3} K_2 \cdot W = 0 \tag{16}$$

方程组(16)即为中心具有一个刚性的圆芯的，各向同性的，变厚同的圆板，在作大幅度自由振动时的运动方程。为解该方程，必须把边界条件强加给方程(16)。对于四周夹紧的边界条件，方程(16)中，W 和 V 项前的系数矩阵中的某些元素必须作相应的变化，以适应相应的边界条件。

4　数值计算

为得到该圆板在作非线性振动时的响应，必须根据相应的边界条件求解方程(16)，数值计算时，必须使用递归的方法[4]。其步骤大致如下：

首先，完成质量矩阵 M，线性弯曲刚度矩阵 K_b 及线性刚度矩阵 K_p 的组成。厚度函数也应转换成相应的结点的函数。

然后，计算非线性刚度矩阵 K_1 和 K_2 的值。为此，先让板作很小振幅的振动，此时可认为它是作线性振动。再把一个相当小的弯曲强加在第一个结点上，根据板的弯曲形状可得到它的斜率函数，利用这斜率函数即可算出非线性刚度矩阵的值。在这时，即可把所有的线性和非线性刚度矩阵的值相加起来，组成一个总刚度矩阵。此时，即可解出其特征值和特征向量问题。在此基础上，再加上一个相当小的弯曲，重复以上的步骤，从而即可得到该板在这样边界条件下，振幅和基本特征频率之间的关系。

作为例子以便说明本文方法的正确，本文计算了厚度为双曲函数
$\eta = 0.815 - 0.2 \cdot \xi^2$ 的圆板的非线性振动。计算结果如图所示。图还说明了圆板的刚性圆芯半径对频响特征的影响。圆板的频响特征非常类似于 Duffng 硬弹簧系统。

5　结论

利用有限元方法来解圆板的非线性振动问题，是一个十分有效的方法。由于有限元方法的良好特点及适应性，因此该方法很容易推广到该类圆板其它边界条件下自由或强迫振动

中去。利用该方法所得到的结果的精度要比用其它方法，如平均法要好。

本文中所考虑的圆板一质量系统振动的非线性特性与圆板的刚性圆芯半径有着重要的关系。圆板的频响特征非常类似于 Duffing 硬弹簧系统。

参考文献

1 Meirovitch, L. (1976). Analytical Methods in Vibration. MacMillan Series in Applied Mechanics

2 Chiang, D. C. and Chen, S. S. H. (1972). Large Amplitute Vibration of a Circular Plate with Concentric Rigid Mass. J. Appl. Mech. Vol. 39, No. 2, Trans. ASME

3 Huang, C. L. D. and Aurora, P. R. (1978). Non—Linear Oscillation of Elastic Orthotropic Annular Plate of Variable Thickness. Journal of Sound and Vibration 62(3), 443—453

4 Huang, C. L. D. and Huang, S. T. (1989). Finite Element Analysis of Nonlinear Vibration of a Circular Plate with a Concentric Rigid Mass. Journal of Sound and Vibration. 131(2), 215—227

Nonlinear Vibration of Annular Plates of Variable Thickness

Huang, Shitao

(Department of Mechanical Engineering)

Abstract In the paper finite element method for the problem of large amplitute oscillation of annular elastic plate of variable thickness with rigid mass on inside is presented. It can be shown that the equations and associated boundary conditions of motion for a finite amplitute vibration of the annular plate are non-linear and coupling partial differential. The kinetic energy and strain energy of the plate are rewritten by the coordinates of nodes and interpulating functions in matrix form. Applying Hamilton Principle the equations for the plate in large deformation are obtained. Then, boundary conditions are imposed on vector of nodal field variables, so that the appropriate boundary conditions are satisfied. The eigenvalue problems are solved by iterated method. The relations between the fundamental frequencies and the amplitutes of non-linear vibrations of a example of the annular plates with variable thickness are obtained. The results are more accurate by finite element method than by other methods. The method cab be extended to solving similary non-linear vibrations of annular plates.

Keywords Annular plate of variable thickness, Non-linear vibration, Finite element method, Eigenvalue problem.