第17卷　第3期　　郑州工业大学学报　　Vo1.17　No.3.
1996年　9　月　Journal of Zhengzhou University of Technoloy　Sep.　1996

非对称载荷作用的Griffith 裂纹问题的 Fourier 积分变换解法

乐金朝　王复明　刘文廷
（郑州工业大学水环系）

摘要　本文使用Fourier 积分变换，对非对称载荷作用下的Griffith 裂纹问题进行了研究。利用裂纹两侧的位移和应力联结条件，将问题归结为一组带Cauchy 核的奇异积分方程，通过Cauchy 反演求得了问题的精确解，在此基础上，给出了其应力强度因子的表达式。该结果可作为基本解用于求解一般裂纹系问题。

关键词　Griffith 裂纹，Fourier 积分变换，应力强度因子

中图分类号　Q 29；TV 133

1　引言

无限平面中非对称载荷作用下Griffith 裂纹问题，Erdogan[1]，Sih [2]，Панасюк[3]等都曾作过研究，他们用的都是复应力势法。Sneddon[4]曾试图利用Fourier 积分变换方法处理上述问题，但未能获得成功。文[5]使用Mellin 积分变换，对该问题作了系统讨论，并得到了其封闭形式的基本解，在此基础上，文[6]使用边界积分方程方法也曾对该问题进行了研究。本文利用Fourier 积分变换对此问题进行了探讨。根据本文的结果，利用叠加原理，可以求解无限平面中含有任意多个裂纹的一般裂纹系问题。

2　平面问题的基本关系及 Fourier 积分变换

根据弹性理论[7]，在直角坐标系中，平面问题的应力($\sigma_x,\sigma_y,\tau_{xy}$)和应变($\varepsilon_x,\varepsilon_y,\varepsilon_{xy}$)与应力函数$\varphi(x,y)$之间的关系为：

$$\sigma_x=\frac{\partial^2\varphi(x,y)}{\partial y^2},\sigma_x=\frac{\partial^2\varphi(x,y)}{\partial x^2},\tau_{xy}=-\frac{\partial^2\varphi(x,y)}{\partial x\partial y}\tag{2.1}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_x&=\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{E}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}-\nu\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)\\ \varepsilon_y&=\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{E}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-\nu\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)\\ \gamma_{xy}&=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{2(1+\nu)}{E}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\end{aligned}\tag{2.2}$$

河南省自然科学基金资助项目。项目编号：964051900
收稿日期：1995－12－14

其中 E 为材料的弹性模量,ν 为 Poisson 比。应力函数 $\varphi(x,y)$ 满足以下双调和方程:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^2\varphi(x,y)=0 \tag{2.3}$$

根据积分变换理论[8],应力函数 $\varphi(x,y)$ 的 Fourier 积分变换及其逆变换分别为:

$$\Phi(\xi,y)=F[\varphi(x,y),\xi]=\int_{+\infty}^{-\infty}\varphi(x,y)e^{i\xi x}dx$$

$$\varphi(x,y)=F^{-1}[\Phi(\xi,y),x]=\frac{1}{2\pi}\int_{+\infty}^{-\infty}\varphi(\xi,y)e^{i\xi x}d\xi \tag{2.4}$$

对(2.1－2.2)式分别作 Fourier 积分变换,可得到:

$$F[\sigma_x(x,y),\xi]=\frac{\partial^2\Phi(\xi,y)}{\partial y^2} \tag{2.5}$$

$$F[\sigma_y(x,y),\xi]=-\xi^2\Phi(\xi,y) \tag{2.6}$$

$$F[\tau_{xy}(x,y),\xi]=i\xi\frac{\partial\Phi(\xi,y)}{\partial y} \tag{2.7}$$

$$F\left[\frac{\partial u(x,y)}{\partial x},\xi\right]=\frac{1}{E}\left[\frac{\partial^2\Phi(\xi,y)}{\partial y^2}+\nu\xi^2\Phi(\xi,y)\right] \tag{2.8}$$

$$F\left[\frac{\partial v(x,y)}{\partial x};\xi\right]=\frac{i\xi}{E}\left[\xi^2\Psi(\xi,y)-\nu\frac{\partial\Phi(\xi,y)}{\partial y}\right] \tag{2.9}$$

其中函数 $\Psi(\xi,y)$ 为:

$$\Psi(\xi,y)=\begin{cases}\int_y^{+\infty}\Phi(\xi,y)dy & y>0\\ -\int_{-\infty}^{y}\Phi(\xi,y)dy & y<0\end{cases} \tag{2.10}$$

其通解为:

$$\Phi(\xi,y)=(A+By)e^{-|\xi|y}+(C+Dy)e^{-|\xi|y} \tag{2.12}$$

其中 A、B、C、D 都是 ξ 的未知函数,它们由边界条件来确定。根据弹性理论,$\Phi(\xi,y)$ 的通解应写成以下的形式:

$$\Phi(\xi,y)=\begin{cases}(A+By)e^{-|\xi|y} & y>0\\ (C+Dy)e^{|\xi|y} & y<0\end{cases} \tag{2.13}$$

3　问题的边界条件

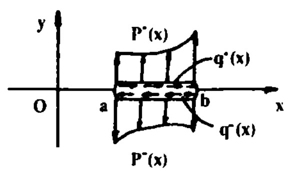

图 1

设裂纹在上、下岸上作用有任意的非对称载荷,建立如图 1 所示的直角坐标系 OXY. 此时,问题的边界条件可由 X 轴上的应力和位移的联结条件建立:

$$\sigma_y(x,0^+)-\sigma_y(x,0^-)=\begin{cases}0 & -\infty<x<a,\ b<x<+\infty\\ -2p_0(x) & a<x<b\end{cases} \tag{3.1}$$

$$\tau_{yx}(x,0^+)-\tau_{yx}(x,0^-)=\begin{cases}0 & -\infty<x<a,\ b<x<+\infty\\ -2q_0(x) & a<x<b\end{cases} \tag{3.2}$$

$$\begin{cases} u(x,0^+) - u(x,0^-) = 0 & -\infty < x < a,\ b < x < +\infty \\ \tau_{yx}(x,0^+) + \tau_{yx}(x,0^-) = -2q(x) & a < x < b \end{cases} \tag{3.3}$$

$$\begin{cases} \nu(x,0^+) - \nu(x,0^-) = 0 & -\infty < x < a,\ b < x < +\infty \\ \sigma_y(x,0^+) + \sigma_y(x,0^-) = -2p(x) & a < x < b \end{cases} \tag{3.4}$$

在以上各式中，0^+表示 y 从 $y>0$ 的区域中趋近于裂纹的上岸，0^-表示 y 从 $y<0$ 的区域中趋近于裂纹的下岸。函数 p(x)，q(x)及 $p_0(x)$，$q_0(x)$分别为：

$$p(x) = \frac{1}{2}[p^+(x) + p^-(x)],\ p_0(x) = \frac{1}{2}[p^+(x) - p^-(x)]$$

$$q(x) = \frac{1}{2}[q^+(x) + q^-(x)],\ q_0(x) = \frac{1}{2}[q^+(x) - q^-(x)] \tag{3.5}$$

其中 $p^+(x)$，$p^-(x)$和 $q^+(x)$，$q^-(x)$分别为作用于裂纹上、下岸上给定的法向和切向载荷（图 1）。

4 问题的积分方程

根据(2.13)式，该问题的应力及位移的导数在上半平面中可以分别表示为：

$$\sigma_y^+(x,y) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}(A + By)\xi^2 e^{-|\xi|y - i\xi x}d\xi \tag{4.1}$$

$$\tau_{xy}^+(x,y) = \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}[(1 - |\xi|y)B - |\xi|A]\xi e^{-|\xi|y - i\xi x}d\xi \tag{4.2}$$

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{1}{2\pi E}\int_{-\infty}^{+\infty}\{(1+\nu)\xi^2 A + [(1+\nu)\xi^2 y - 2|\xi|]B\}e^{-|\xi|y - i\xi x}d\xi \tag{4.3}$$

$$\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = \frac{i}{2\pi E}\int_{-\infty}^{+\infty}\xi\{(1+\nu)|\xi|A + [(1+\nu)|\xi|y + (1-\nu)B]\}e^{-|\xi|y - i\xi x}d\xi \tag{4.4}$$

在下半平面中，有：

$$\sigma_y^-(x,y) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}(C + Dy)\xi^2 e^{|\xi|y - i\xi x}d\xi \tag{4.5}$$

$$\tau_{xy}^-(x,y) = \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}[|\xi|C + (1 + |\xi|y)D]\xi e^{|\xi|y - i\xi x}d\xi \tag{4.6}$$

$$\frac{\partial u^-(x,y)}{\partial x} = \frac{1}{2\pi E}\int_{-\infty}^{+\infty}\{(1+\nu)\xi^2 C + [(1+\nu)\xi^2 y + 2|\xi|]D\}e^{|\xi|y - i\xi x}d\xi \tag{4.7}$$

$$\frac{\partial v^-(x,y)}{\partial x} = \frac{i}{2\pi E}\int_{-\infty}^{+\infty}\xi\{(1+\nu)|\xi|C + [(1+\nu)|\xi|y - (1-\nu)]D\}e^{|\xi|y - i\xi x}d\xi \tag{4.8}$$

为了求解方便，引进以下未知函数：

$$f_1(x) = \frac{\partial}{\partial x}[u(x,0^+) - u(x,0^-)]$$

$$f_2(x) = \frac{\partial}{\partial x}[v(x,0^+) - v(x,0^-)] \tag{4.9}$$

函数 $f_1(x)$和 $f_2(x)$一般称之为裂纹面上的位错密度，它们满足以下条件：

$$\int_a^b f_1(x)dx = 0,\ \int_a^b f_2(x)dx = 0 \tag{4.10}$$

利用边界条件(3.1)和(3.2)，可以求得：

$$A(\xi)=\frac{1}{\xi^2}\int_a^b P_0(x)e^{i\xi x}dx+\psi_1(\xi) \tag{4.11}$$

$$B(\xi)=-\frac{1}{i\xi}\int_a^b q_0(x)e^{i\xi x}dx+|\xi|\psi_1(\xi)+\psi_2(\xi) \tag{4.12}$$

$$C(\xi)=-\frac{1}{\xi^2}\int_a^b P_0(x)e^{i\xi x}dx+\psi_1(\xi) \tag{4.13}$$

$$D(\xi)=\frac{1}{i\xi}\int_a^b q_0(x)e^{i\xi x}dx-|\xi|\psi_1(\xi)+\psi_2(\xi) \tag{4.14}$$

其中函数 $\psi_1(\xi)$和 $\psi_2(\xi)$分别为：

$$\psi_1(\xi)=\frac{iE}{4\xi|\xi|}\int_a^b f_2(x)e^{i\xi x}dx-\frac{i(1-\nu)}{2\xi|\xi|}\int_a^b q_0(x)e^{i\xi x}dx$$

$$\psi_2(\xi)=-\frac{E}{4|\xi|}\int_a^b f_1(x)e^{i\xi x}dx+\frac{(1+\nu)}{2|\xi|}\int_a^b p_0(x)e^{i\xi x}dx \tag{4.15}$$

由以上的结果可以看出，只要能够确定位错密度函数 $f_1(x)$和 $f_2(x)$，则问题的应力和位移都能够确定。利用边界条件(3.3)和(3.4)，可以得到该问题的积分方程为

$$\lim_{y\to 0^+}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{iE\xi}{2|\xi|}\int_a^b f_2(t)e^{i\xi t}dt-\frac{i(1-\nu)\xi}{|\xi|}\int_a^b q_0(t)e^{i\xi t}dt\right]e^{-|\xi|y-i\xi x}d\xi=4\pi p(x)\qquad a<x<b$$

$$\lim_{y\to 0^+}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{iE\xi}{2|\xi|}\int_a^b f_1(t)e^{i\xi t}dt+\frac{i(1-\nu)\xi}{|\xi|}\int_a^b p_0(t)e^{i\xi t}dt\right]e^{-|\xi|y-i\xi x}d\xi=4\pi q(x) \tag{4.16}$$

上述两个方程经过整理，可得到：

$$\int_a^b\frac{Ef_1(t)+2(1-\nu)p_0(t)}{t-x}dt=-4\pi q(x)\qquad(a<x<b)$$

$$\int_a^b\frac{Ef_2(t)-2(1-\nu)q_0(t)}{t-x}dt=-4\pi p(x) \tag{4.17}$$

此组方程为带有 Cauchy 核的主值型奇异积分方程，可以通过 Cauchy 反演公式进行求解。

5　积分方程组的求解及应力强度因子

根据 Cauchy 型奇异积分方程求解理论[9]，可得到方程组(4.17)的解为：

$$f_1(x)=-\frac{2(1-\nu)}{E}p_0(x)+\frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{(b-x)(x-a)}}\left[\frac{4}{E}\int_a^b\frac{\sqrt{(b-t)(t-a)}}{(t-x)}q(t)dt+R_1\right] \tag{5.1}$$

$$f_2(x)=\frac{2(1-\nu)}{E}q_0(x)+\frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{(b-x)(x-a)}}\left[\frac{4}{E}\int_a^b\frac{\sqrt{(b-t)(t-a)}}{(t-x)}p(t)dt+R_2\right] \tag{5.2}$$

在以上二式中，常数 R_1 和 R_2 可根据定解条件(4.10)确定，其结果为：

$$R_1=\frac{2(1-\nu)}{E}\int_a^b p_0(x)dx$$

$$R_2=\frac{2(1-\nu)}{E}\int_a^b q_0(x)dx \tag{5.3}$$

根据以上结果，可以确定平面中任意一点处的应力和位移分量。由于表达式比较复杂，在此仅给出上半平面中的应力表达式，其结果如下：

$$\sigma_x^+(x,y)=\frac{E}{4\pi}\int_a^b\frac{y[y^2+3(t-x)^2]f_1(t)+(t-x)[(t-x)^2-y^2]f_2(t)}{[(t-x)^2+y^2]^2}dt$$
$$-\frac{1}{2\pi}\int_a^b\frac{y[(1-\nu)y^2-(1+3\nu)(t-x)^2]}{[(t-x)^2+y^2]^2}p_0(t)dt$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_a^b\frac{(t-x)[(1-\nu)y^2+(3+\nu)(t-x)^2]}{[(t-x)^2+y^2]^2}q_0(t)dt \quad (5.4)$$

$$\sigma_y^+(x,y)=\frac{E}{4\pi}\int_a^b\frac{y[y^2-(t-x)^2]f_1(t)+(t-x)[(t-x)^2+3y^2]f_2(t)}{[(t-x)^2+y^2]^2}dt$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_a^b\frac{y[(3+\nu)y^2+(1-\nu)(t-x)^2]}{[(t-x)^2+y^2]^2}p_0(t)dt$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_a^b\frac{(t-x)[(1+3\nu)y^2-(1-\nu)(t-x)^2]}{[(t-x)^2+y^2]^2}q_0(t)dt \quad (5.5)$$

$$\tau_{xy}^+(x,y)=\frac{E}{4\pi}\int_a^b\frac{(t-x)[(t-x)^2-y^2]f_1(t)+y[y^2-(t-x)^2]f_2(t)}{[(t-x)^2+y^2]^2}dt$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_a^b\frac{(t-x)[(3+\nu)y^2+(1-\nu)(t-x)^2]}{[(t-x)^2+y^2]^2}p_0(t)dt$$
$$-\frac{1}{2\pi}\int_a^b\frac{y[(1-\nu)y^2+(3+\nu)(t-x)^2]}{[(t-x)^2+y^2]^2}q_0(t)dt \quad (5.6)$$

为了计算裂纹端点处的应力强度因子，需要求出应力分量 σ_y 和 τ_{xy} 在 $y=0$ 直线上（裂纹之外）的表达式。假定裂纹岸上作用的外载 p(x) 和 q(x) 都满足 Holder 条件，可得到：

$$\sigma_y(x,0)=\frac{1}{\pi}\frac{sgn(a-x)}{\sqrt{(b-x)(x-a)}}\left[\int_a^b\frac{p(t)\sqrt{(b-t)(t-a)}}{t-x}dt-\frac{1-\nu}{2}\int_a^b q_0(t)dt\right] \quad (5.7)$$

$$\tau_{xy}(x,0)=\frac{1}{\pi}\frac{sgn(a-x)}{\sqrt{(b-x)(x-a)}}\left[\int_a^b\frac{q(t)\sqrt{(b-t)(t-a)}}{t-x}dt+\frac{1-\nu}{2}\int_a^b p_0(t)dt\right] \quad (5.8)$$

其上，sgn(a－x)为符号函数，其定义为：

$$sgn(a-x)=\begin{cases}1 & x<a\\ -1 & x>a\end{cases} \quad (5.9)$$

根据应力强度因子的定义，可求得如下结果

$$K_{1a}=\lim_{x\to a-0}\sqrt{2(a-x)}\sigma_y(x,0)=\frac{\sqrt{2}}{\pi\sqrt{b-a}}\left[\int_a^b\sqrt{\frac{b-t}{t-a}}p(t)dt-\frac{1-\nu}{2}\int_a^b q_0(t)dt\right] \quad (5.10)$$

$$K_{1a}=\lim_{x\to a-0}\sqrt{2(a-x)}\tau_{yx}(x,0)=\frac{\sqrt{2}}{\pi\sqrt{b-a}}\left[\int_a^b\sqrt{\frac{b-t}{t-a}}q(t)dt+\frac{1-\nu}{2}\int_a^b p_0(t)dt\right] \quad (5.11)$$

$$K_{1b}=\lim_{x\to b+0}[-\sqrt{2(x-b)}\sigma_y(x,0)=\frac{\sqrt{2}}{\pi\sqrt{b-a}}\left[\int_a^b\sqrt{\frac{t-a}{b-t}}p(t)dt-\frac{1-\nu}{2}\int_a^b q_0(t)dt\right] \quad (5.12)$$

$$K_{Ib} = \lim_{x \to b+0} [-\sqrt{2(x-b)}\tau_{yx}(x,0) = \frac{\sqrt{2}}{\pi\sqrt{b-a}}\left[\int_a^b \sqrt{\frac{t-a}{b-t}}q(t)dt + \frac{1-\nu}{2}\int_a^b p_0(t)dt\right] \tag{5.13}$$

此结果与文献[5]中的结果完全相同。值得指出的是,利用叠加原理,以上结果可以作为基本解,很方便地用于求解含有任意多个裂纹的一般裂纹系问题。本文所使用的方法可推广用于求解界面裂纹问题。

参 考 文 献

1 Erdogan, F., Proceedings Fourth U.S. National Congress of Applied Mechanics, 547-563(1962)

2 Tada, H., Paris, P.C., Irwin, G.R., The Stress Analysis of Cracks, Handbook, 1973

3 Панасюк. В. В. ,Саврукм. П. ,Д а Цышин, А. П. ,НауковВа Думка,Киев,1976

4 Sneddon, I. N., Ejike, B.C.O. ,Int. J. Solid Structure, 5(5):513-521(1969)

5 汤任基,王凯,力学学报,12(3):269-278(1980)

6 王银邦,兰州大学学报(自然科学版),26(2):35-39(1990)。

7 徐芝纶,弹性力学(上册)(第二版),人民教育出版社,1982。

8 Sneddon, I.N.,富利叶变换,上海科学技术出版社,1982。

9 Мусхелишвили, Н. N,奇异积分方程,上海科学技术出版社,1966。

FOURIER INTEGRAL TRANSFORM METHOD FOR GRIFFITH CRACK PROBLEM UNDER ASYMMETRICAL LOADS

Yue Jinchao Wang Fuming Liu Wenting

Abstract In this paper, by using Fourer integral transform, we try to investigate the problem of a Griffith crack loaded by asymmetrical distribution of surface tractions. According to the joined conditions of the crack, the problem can be reduced to a set of Cauchy singular integral equations, then the exact solutions is obtained by making use of Cauchy reversal operations, and the stress intensity factors are given. The results may be used as fundamental solutions to solve a general crack system of plane.

Key words Griffith crack, Fourier integral transform, stress intensity factor.