第15卷 第3期 郑州工学院学报 Vol.15 No.3
1994年 9 月 Journal of Zhengzhou Institute of Technology Sep. 1994

四阶特征问题的线性有限元逼近*

石东洋 蒋慧琴

(郑州大学) (郑州工学院)

摘 要: 本文利用混合元方法，讨论了四阶特征值问题$\triangle^2 u=\lambda u$的线性有限元逼近，同时给出了相应的特征值的收敛估计。

关键词: 混合元；线性元；特征值；收敛估计.
中图分类号: O243

1 引言

关于四阶特征值问题:

$$\begin{cases}\triangle^2 u=\lambda u & \text{在}\Omega\text{内}\\ u=\dfrac{\partial u}{\partial n}=0 & \text{在}\Gamma=\partial\Omega\text{上}\end{cases}\tag{1.1}$$

的有限元逼近已有大量文献，见[1,2,6]等，其方法包括混合元、杂交元等方法。但所用的有限元空间都是次数$\geqslant 2$的分片多项式空间，而且Ω要求是多角形区域。本文利用[1, 5]的想法考虑了问题(1.1)的线性有限元逼近，同时给出了相应特征值的敛速估计，这时要求Ω的边界$\partial\Omega$充分光滑。

2 一些记号和引理

设$\Omega\subset R^2$是有界开区域，其边界Γ充分光滑，$L^2(\Omega)$，$H^m(\Omega)$，$H_o^m(\Omega)$ $(m\geqslant 0)$表示熟知的复值$Sobelev$空间，$\|\cdot\|_o$ $\|\cdot\|_m$是一般常规意义下的范数.

$$V_1=\{(u,\varphi)\in H_o^1(\Omega)\times L^2(\Omega)|\forall v\in H^1(\Omega),\ \beta((u,\ \varphi),\ v)=0\}$$

$$V_2=\{(u,\varphi)\in H_o^2(\Omega)\times L^2(\Omega))|-\triangle u=\varphi\}$$

$$\beta((u,\varphi),v)=\int_\Omega \nabla v\,\overline{\nabla v}dx-\int_\Omega \varphi\bar{v}dx$$

设$0<h<1$ $(h\to 0)$是剖分参数，对Ω进行三角形剖分，满足正则性假设[3]。相应的

* 收稿日期: 1993-06-25

有限元空间记为 S_h，它是由分片线性的连续函数组成．(对于曲边三角形单元，采用通常的修正[3])。.

记 $X=H^1(\Omega)\times L^2(\Omega) \qquad H=L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)$

$$V_h=S_h^o\times S_h \qquad S_h^o=S_h\bigcap H_o^1(\Omega)$$

$$V_h^o=\{(u,\ \varphi)\in V_h,\quad \forall v\in S_h,\quad \beta((u,\ \varphi),\ v)=0\}$$

$$a((u,\ \varphi),\ (v,\ \psi))=\int_\Omega \varphi\bar{\psi}dx \qquad \forall (u,\ \varphi),\ (v,\psi)\in X$$

$$r((u,\ \varphi),\ (v,\ \psi))=\int_\Omega u\bar{v}dx \qquad \forall (u,\ \varphi),\ (v,\ \psi)\in H$$

引理 1.1[3] 当 Γ 充分光滑时 $V_1=V_2$(记 $V=V_1=V_2$) 则 $\|\psi\|_o$，$(\|\psi\|_o^2+|v|_1^2)^{\frac{1}{2}}$ 都可作为 V 上元素 $(v,\ \psi)$ 之范数，且彼此等价，同样 $\|\varphi_h\|_o$，$(\|\varphi_h\|_o^2+|u_h|_1^2)^{\frac{1}{2}}$，都可作为 V_h 上元素 $(u_h,\ \varphi_h)$ 之范数，且彼此等价．

定义 2.1 称 $(\lambda,\ u)$ 是问题 (1.1) 之解，若 $(\lambda,\ u)$ 满足 $\lambda\in C$，$u\in H_o^2(\Omega)$，且 $\int_\Omega \triangle u\triangle\bar{v}dx=\lambda\int_\Omega u\bar{v}dx.\ \forall\ v\in H_o^2(\Omega)$ 成立。

我们有下面的

引理 2.2 假设 Γ 充分光滑，则求解问题 (1.1) 与求解下列变分问题等价:

$$\begin{cases}\text{求}\quad \lambda\in C \qquad 0\neq(u,\ \varphi)\in V \quad \text{使}\forall(v,\ \psi)\in V \\ \int_\Omega \varphi\bar{\psi}dx=\lambda\int_\Omega u\bar{v}dx\end{cases} \tag{2.1}$$

证 设 $-\triangle u=\varphi$ 则(1.1)可写成:

$$\begin{cases}-\triangle\varphi=\lambda u & \text{在}\Omega\text{内} & (2.2)\\ -\triangle u=\varphi & \text{在}\Omega\text{内} & (2.3)\\ u=\dfrac{\partial u}{\partial n}=0 & \text{在}\Gamma=\partial\Omega\text{上} & (2.4)\end{cases}$$

设 $(\lambda,\ u)$ 是 (1.1) 之解，则 $u\in H_o^2(\Omega)$，$\varphi\in L^2(\Omega)$，故 $\forall(v,\ \psi)\in V$，在 (2.2),(2.3) 两边分别用 v，ψ 作用，并利用 *Green* 公式，注意到 $-\triangle v=\psi$，$v\in H_o^2(\Omega)$，再用 (2.3) 式知，$(\lambda,\ (u,\ \varphi))$ 是变分问题 (2.1) 之解，反之若 $(\lambda,\ (u,\ \varphi))$ 是 (2.1) 之解，再利用 *Green* 公式并注意 $u\in H_o^2(\Omega)$，知 $(\lambda,\ u)$ 是 (1.1) 之解。

3　问题逼近及误差估计

考虑(2.1)的逼近问题:

$$\begin{cases}\text{求 } \lambda_h \in C \quad 0 \neq (u_h, \varphi_h) \in V_h^o,\ \text{使 } \forall (v_h, \psi_h) \in V_h^o \\ \int_\Omega \varphi_h \bar{\psi}_h dx = \lambda_h \int_\Omega u_h v_h dx\end{cases} \tag{3.1}$$

那么(2.1), (3.1)可写成下列形式

$$(I)\quad \begin{cases}\text{求 } \lambda \in C \quad 0 \neq (u, \varphi) \in V \quad \forall (v, \psi) \in V \\ a((u, \varphi), (v, \psi)) = \lambda r((u, \varphi), (v, \psi))\end{cases}$$

$$(II)\quad \begin{cases}\text{求 } \lambda_h \in C \quad 0 \neq (u_h, \varphi_h) \in V_h^o,\ \forall (v_h, \psi_h) \in V_h^o \\ a((u_h, \varphi_h), (v_h, \psi)) = \lambda r((u_h, \varphi_h), (v_h, \psi_h))\end{cases}$$

为进行特征值逼近，我们引入下面有界算子T, T^*, T_h, T_h^*: $H \to H$ 分别定义为:

$$\forall (f, g) \in H$$

$$T(f, g) \in V \quad a(T(f, g), (v, \psi)) = r((f, g), (v, \psi)) \quad \forall (v, \psi) \in V$$

$$T_h(f, g) \in V_h^o \quad a(T_h(f, g), (v, \psi)) = r((f, g), (v, \psi)) \quad \forall (v, \psi) \in V_h^o$$

$$T^*(f, g) \in V \quad a((v, \psi), T^*(f, g)) = r((v, \psi), T^*(f, g)) \quad \forall (v, \psi) \in V$$

$$T_h^*(f, g) \in V_h^o \quad a((v, \psi), T_h^*(f, g)) = r((v, \psi), T_h^*(f, g)) \quad \forall (v, \psi) \in V_h^o$$

由$a(\cdot,\cdot)$ $r(\cdot,\cdot)$的定义及上述引理，上面各式均有意义且唯一可解，同时由$a(\cdot,\cdot)$的对称性及在V, V_h^o上的正定性，得到$T = T^*$，$T_h = T_h^*$。同时还有：若μ是问题（I）的特征值，那么$\frac{1}{\mu}$是T的特征值（注意$\mu = 0$不是（I）的特征值），若$(u\ \ \varphi)$是对应于μ的特征向量，那么它也是对应于T的特征值$\frac{1}{\mu}$的特征向量。

定理3.1　对$\forall (f, g) \in H$，有$\|T - T_h\| \to 0$ $(h \to 0)$　且T: $H \to H$是紧算子，$\|\cdot\|$表示H上算子的范数。

证　当T充分光滑时，$\forall (f,g) \in H$. 记

$$T(f,g) = (u,\varphi) \qquad T_h(f,g) = (u_h,\varphi_h)$$

那么$-\triangle u = \varphi$且根据[4]中定理2.1有$u \in H^4(\Omega)$

$\|u\|_4 \leq c\|f\|_o$　根据[5]成立估计式

$$\|u - u_h\|_o + h^{\frac{1}{2}} lnh \| |\varphi - \varphi_h\|_o \leq chlnh^2 \|u\|_4$$

所以　$\|u - u_h\|_o + \|\varphi - \varphi_h\|_o \leq ch^{\frac{1}{2}} lnh|^2 \|f\|_o$

故　$\|T(f,g) - T_h(f,g)\|_o \leq ch^{\frac{1}{2}}(\|f\|_o + \|g\|_o) lnh|^2$

$$\|T-T_h\| = \sup_{\|(f,g)\in H} \|f\|_o + \|g\|_o = \|T(f,g)-T_h(f,g)\|_o \leqslant ch^{\frac{1}{2}}|lnh|^2$$

由于 $a(\cdot,\cdot)$、$r(\cdot,\cdot)$ 是有界线性泛函，故 T_h 关于 h 是一致有界的，又 V_h 是有限维空间，根据泛函分析知识，T 也是 $H\to H$ 的紧算子。

因此，根据[1]中的谱理论，若设 μ 是 T 的代数重数为 m 的特征值、E 是对应于 μ 的广义特征向量空间，则恰好有 T_h 的 m 个特征值，记为 $\mu_1(h)$，$\mu_2(h)$，…，$\mu_m(h)$，使得:

$$\mu_j(h)\to\mu \quad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ m) \quad (h\to 0)\text{且存在}h_o>0\text{当}h\leqslant h_o\text{时有:}$$

$$|\mu-\hat{\mu}(h)|\leqslant C\left\{\sup_{\substack{(u,\varphi)\in E\\ \|u\|+\|\varphi\|=1}}\ \sup_{\substack{(v,\psi)\in E\\ \|v\|+\|\psi\|=1}}|r((T-T_h)(u,\varphi),\ (v,\psi))|+\|T-T_h\|_E^2\right\}=c\delta_h$$

$$(\text{Ⅲ}) \qquad |\mu^{-1}-\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{\mu_j(h)}|\leqslant c\delta_h \qquad |\mu-\mu_j(h)|\leqslant c\delta_h \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ m)$$

其中 $\hat{\mu}(h)=\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\mu_j(h)$，$\|T-T_h\|_E$ 表示 $T-T_h$ 在 E 上限制后的 H 范数，α 是满足 $Ker(\mu-T)=Ker(\mu-T)^{\alpha}$ 的最小正整数。

记 $\quad T(u,\varphi)=(\hat{u},\hat{\varphi}) \qquad T_h(u,\varphi)=(\hat{u}_h,\hat{\varphi}_h)$

则 $\quad \hat{\varphi}=\triangle\hat{u}$，由定理3.1，知:

$$\|\hat{u}-\hat{u}_h\|_o\leqslant ch|lnh|^2\|u\|_o\leqslant ch|lnh|^2(\|u\|_o+\|\varphi\|_o)$$

$$|r((T-T_h)(u,\ \varphi),\ (v,\ \psi))|=|\int_\Omega(\hat{u}-\hat{u}_h)\bar{v}dx|\leqslant c\|\hat{u}-\hat{u}_h\|_o\|v\|_o\leqslant ch|lnh|^2\|u\|_o\|v\|_o$$

$$\leqslant ch|lnh|^2(\|u\|_o+\|\varphi\|_o)(\|v\|_o+\|\psi\|_o)$$

由定理3.1 $\quad \|T-T_h\|_E\leqslant ch^{\frac{1}{2}}|lnh|$

将上面估计代入(Ⅲ)式，我们得到主要结果:

$$\begin{cases}|\mu-\hat{\mu}(h)|\leqslant ch|lnh|^2\\ |\mu^{-1}-\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{\mu_j(h)}|\leqslant ch|lnh|^2\\ |\mu-\mu_j(h)|\leqslant ch|lnh|^2\end{cases}$$

注3.1 以上文中所有 c 均为常数，均与 h 无关，不同地方可以不同。

参 考 文 献

1 Mercier. B. etc. Eigen Value Approximation by Mixed and Hybrid Method. Math. Comp. 1981. 36(154): 427–453

2 CanTo. C. EigenValue Approximation by Mixed Method. R. A. I. R. O. Anal. Numer. 1978. 12(1): 27−50.

3 Ciarlet. P. G. The finite element method for elliptic problems. Amsterdam. North−Holland. 1978.

4 BABUSKA. etc. Nonconforming element in the finite element Method with penalty. SIAM. J. Numer. Anal. 1973. 10(5): 863−875.

5 SCHOLZ. A Mixed methon for 4−th oder problems using linear finite elements. R.A.I.R.O. Anal.Numer. 1978. 12(1): 85−90.

6 石东洋. 4特征值问题的非协调元逼近. 郑州大学学报. 1989. 22(2):33−40.

Linear Finite element approximation for 4−th order eigenvalue problem

Shi Dongyang　　Jiang Huiqin
(Zhengzhou University)　　(Zhengzhou Institute of Technology)

Abstract: In this paper, the linear finite element approximation for 4−th order eigenvalue problem is discussed by using mixed method. The convergence estimates are given.

Keywords: Mixed element; Linear element; eigenvalue; Convergence estimates.