第15卷 第3期　　郑州工学院学报　　Vol.15 No.3
1994年 9 月　　Journal of Zhengzhou Institute of Technology　　Sep. 1994

高阶 Vacco 动力学方程的降阶方法* * *

孙利民　　罗绍凯

(郑州工学院)　(河南商丘师专)

摘　要: 本文给出高阶非线性非完整力学系统Vacco动力学方程的循环积分，并利用循环积分降阶高阶 Vacco 动力学方程，发展了著名的 Routh 降阶法.

关键词: 高阶非完整约束，动力学，循环积分，降阶方法.
中图分类号: O316

随着现代科学技术的进步，非完整动力学的研究愈来愈受到人们的重视. 以往，非完整力学的研究要对系统的虚位移施加限制条件，1990 年郭仲衡教授放弃这种限制，得到一种新型方程[1]，该方程与莫斯科大学 Козлов 所声言[2]的作为新方法，新数学模型的 Vacco 动力学方程形式相同. 这引起了分析力学研究者很大的兴趣，相继被推广到高阶非完整系统[3]和变质量系统[4]. 但是，这一问题的研究局限于方程的建立，对方程本身的研究甚少，对其积分理论的研究尚无报道.

最近，文献[5]、[6]中全面地给出了 Vacco 动力学方程的积分理论. 本文进一步研究高阶 Vacco 动力学方程的积分理论，给出其降阶方法. 首先，给出高阶 Vacco 动力学方程的循环积分；而后，利用循环积分降阶高阶 Vacco 动力学方程，得到 Routh 型的高阶 Vacco 动力学方程；最后，给出几个推论.

1877 年，Routh 首创利用循环积分降阶完整保守系统运动方程的方法[7]，为此剑桥大学授予他 Adam 奖. 本文是对降阶法的继承和发展.

1　高阶 Vacco 动力学方程的循环积分

研究由 n 个广义坐标 $q_s(s=1, \cdots, n)$描述的力学系统，其运动受有 9 个 m 阶非线性非完整约束作用

$$f_\beta(q_s, \dot{q}_s, \cdots, q_s, t)=0 \qquad (\beta=1,\cdots, g) \tag{1}$$

系统的运动满足高阶 Vacco 动力学方程[3]

* 河南省自然科学基金资助课题
* * 收稿日期: 1993-6-22

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=\sum_{\beta=1}^{q}\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\frac{d^{(k)}}{dt^{(k)}}(\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial^{(k)}_{q_s}})\quad(s=1,\cdots,n)\tag{2}$$

其中λ_β为待定乘子，我们研究满足

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\frac{d^{(k)}}{dt^{(k)}}(\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial^{(k)}_{q_s}})=g_{\beta s}(q_l,q_L,t)\qquad(s,l=1,\cdots,n)\tag{3}$$

的一类特殊的高阶系统，如果方程(2)满足

$$\frac{\partial L}{\partial q_a}=0,\ \frac{\partial f_\beta}{\partial^{(k)}_{q}}=0\qquad(a=1,\cdots,\alpha\leqslant n;\ k=0,1,\cdots,m;$$

$$\beta=1,\cdots,g)\tag{4}$$

则给出α个循环积分

$$\frac{\partial L}{\partial q_a}=\beta_a=const\qquad(a=1,\cdots,\alpha\leqslant n)\tag{5}$$

2 利用循环积分降阶高阶 Vacco 动力学方程

假设由(5)可解出 α 个 q，记作

$$q_a-h_a(q_{\alpha+1},\cdots,q_n;\beta_1\cdots\beta_2;\dot{q}_{\alpha+1},\cdots,\dot{q}_n;t)\qquad(a=1,\cdots,\alpha)\tag{6}$$

我们构造广义$Routh$函数

$$R=\tilde{L}-\sum_{a=1}^{\alpha}h_a\beta_a\tag{7}$$

其中

$$\tilde{L}(q_{\alpha+1},\cdots,q_n;\beta_1\cdots\beta_2;q_{\alpha+1},\cdots,\dot{q}_n;t)$$
$$=L(q_{\alpha+1},\cdots,q_n;h_1\cdots h_2;\dot{q}_{\alpha+1},\cdots,\dot{q}_n;t)\tag{8}$$

由(5)至(8)可以证明

$$\frac{\partial R}{\partial q_{\alpha+d}}=\frac{\partial L}{\partial q_{\alpha+d}},\ \frac{\partial R}{\partial q_{\alpha+d}}=\frac{\partial L}{\partial q_{\alpha+d}},\ \frac{\partial R}{\partial\beta_a}=-q_a\quad(d=1,\cdots,n-\alpha;$$

$$a=1,\cdots,\alpha)\tag{9}$$

将（9）代入(2)的后面$(n-\alpha)$个方程，我们得到高阶非线性非完整系统的$Vacco$型广义$Routh$方程

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial q_{\alpha+d}}-\frac{\partial R}{\partial q_{\alpha+d}}=\sum_{[10S]\beta=1}^{g}\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\frac{d^{(k)}}{dt^{(k)}}(\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial q^{(k)}_{\alpha+d}})$$

$$(d=1,\cdots,n-\alpha)\tag{10}$$

方程(10)与$\frac{\partial R}{\partial\beta_a}=-q_a$及约束方程(1)构成封闭方程组，方程(10)与方程(2)具有

相同的形式，但方程的个数已由 n 个缩减到 $n-2$ 个，实现了方程 (2) 的降阶，其余 α 个方程由 (5) 或 $\frac{\partial R}{\partial \beta_a}=-\dot{q}_a$ 独立地给出。

3 推论

推论 1　本文的方法自然的适用于郭仲衡方程[1]的降阶。

推论 2　本文的方法可推广应用于变质量高阶 Vacco 动力学方程[4]的降阶。

推论 3　对于完整保守系统，本文的方法蜕变为原始的 Routh 降阶法[7]。

本文的方法具有一般性。

参　考　文　献

1 郭仲衡，高普云，力学学报，1990，22(2)：185—190

2 козлов вв.вестник мту，1982，(3)：92—100；1982，(4)：70—76；1983，(3)：102—111.

3 陈立群，科学通报，1990，35 (23)：1835—1837

4 岳庆文，张溜良，乔永劳，黄淮学刊，1991，7(4)，11—20

5 罗绍凯，新疆大学学报，1993，10(1)L54—60

6 Luo Shaokai(罗绍凯). In tegration Methods for Vacco Dynamics of Nonlinear Nonholonomic Systems. Aplied Mathematics and Mechanics

7 Routh E. T. A Treatise on the stability of Motion, Macmillia, London, 1877

The method of Reduetion for Higher–order Vacco Dynamical Equations

Sun Limin　　Luo Shaokai

(Zhenzhou Institute of Technology)　　(Shangqiu Normal College)

Abstract: This paper introduces the cyclic integration for Vacco dynamical equations with higher–order nonliner and nonholonomic system. The cyclic integratal method is used for reduction higher–order Vacco dynamical equation. Therefor , the reduetion of Routh is developed.

Keywords: Higher–order and nonholonomic constraint, Vacco Dnamic, Cyclic integration, Method of reduetion